

Д.Ф. Киселев, А.С. Жукарев, С.А. Иванов,  
С.А. Киров, Е.В. Лукашева

# ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

*Допущено УМО по классическому университетскому образованию РФ  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению 010700.62 «Физика»  
и по специальности 010701.65 «Физика»*



Москва  
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова  
2010

**Д.Ф. Киселев и др. Электричество и магнетизм. Методика решения задач / Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. 332 с.**

ISBN 978-5-8279-0084-9

Учебное пособие по решению задач по курсу «Электричество и магнетизм» написано на основании многолетнего опыта проведения занятий по физике на физическом факультете МГУ. При этом авторы стремились использовать в первую очередь наиболее характерные и типичные задачи. С этой целью наряду с оригинальными задачами были использованы формулировки условий задач из существующих учебников, задачника и учебных пособий, которые подвергались существенному исправлению и доработке.

Пособие разбито по главам, каждая из которых включает в себя теоретический материал, основные типы задач и методы их решения, примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Настоящее пособие предназначено для студентов высших учебных заведений и имеет целью помочь им овладеть основными методами и приобрести навыки решения задач по курсу электричество и магнетизм.

Рецензенты: д.ф.-м. н., профессор *Г.С. Плотников*,  
д.ф.-м. н., профессор *А.С. Илюшин*

ISBN 978-5-8279-0084-9

© Физический факультет МГУ  
им. М.В. Ломоносова, 2010 г.  
© Коллектив авторов, 2010 г.

## **К читателям серии пособий «УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ»**

На кафедре общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова создан и готовится к изданию «Университетский курс общей физики», предназначенный для студентов физических специальностей вузов.

Курс охватывает четыре раздела: «Механика», «Молекулярная физика», «Электромагнетизм» и «Оптика». Отличительной особенностью данного курса является то, что в нем в методическом отношении осуществлено единство основных форм обучения физике: лекции, лабораторные работы и семинары. В системе университетского образования теоретический материал излагается в основном в лекционных курсах, а умение решать задачи отрабатывается на семинарских занятиях. Развитие навыков эксперимента и анализа его результатов происходит в процессе занятий в общем физическом практикуме. В связи с этим, каждый раздел курса состоит из четырех пособий: «Лекции», «Лекционный эксперимент», «Лабораторный практикум» и «Методика решения задач».

Каждая глава пособия «Лекции» содержит материал базового уровня, соответствующего программе курса, и отражает современные тенденции и технологии физического образования. Лекции по каждой теме сопровождаются демонстрацией основных физических экспериментов, описание которых представлено в пособии «Лекционный эксперимент».

Пособием, позволяющим развивать умение решать физические задачи, является «Методика решения задач», которое составлено с таким расчетом, чтобы им можно было пользоваться для самостоятельной работы. Весь материал разбит на главы. Разбор задач всех глав проводится по единой схеме, причем каждую главу можно проработать независимо от других.

Неотъемлемой частью курса общей физики служит лабораторный практикум. Материалы пособия «Лабораторный практикум» достаточны для самостоятельной подготовки к выполнению работ. В связи с этим в пособии имеется как общее теоретическое введение, так и более подробное изложение теории к каждой лабораторной работе. Кроме того, в каждой работе сформулированы цель и идея эксперимента, дано описание установки и подробное изложение последовательности проведения эксперимента и обработки результатов.

Все пожелания и замечания по пособиям курса будут с благодарностью приняты и рассмотрены на кафедре общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	6
Глава 1. <b>Постоянное электрическое поле в вакууме. Закон Кулона.</b>	
<b>Электростатическая теорема Гаусса.....</b>	<b>8</b>
§ 1.1 Теоретический материал.....	8
§ 1.2. Основные типы задач (классификация).....	13
§ 1.3. Методы решения и примеры решения задач.....	14
§ 1.4. Задачи для самостоятельного решения.....	46
Литература к главе 1.....	51
Глава 2. <b>Энергия электростатического поля. Потенциал.....</b>	<b>52</b>
§2.1 Теоретический материал.....	52
§2.2. Основные типы задач (классификация).....	56
§2.3. Методы решения и примеры решения задач.....	56
§2.4. Задачи для самостоятельного решения.....	78
Литература к главе 2.....	81
Глава 3. <b>Проводники в электростатическом поле. Электроемкость.....</b>	<b>82</b>
§ 3.1. Теоретический материал.....	82
§ 3.2. Основные типы задач (классификация).....	87
§ 3.3. Методы решения и примеры решения задач.....	87
§ 3.4. Задачи для самостоятельного решения.....	106
Литература к главе 3.....	109
Глава 4. <b>Диэлектрики в электростатическом поле.....</b>	<b>110</b>
§ 3.1. Теоретический материал.....	110
§ 3.2. Основные типы задач (классификация).....	114
§ 3.3. Методы решения и примеры решения задач.....	115
§ 3.4. Задачи для самостоятельного решения.....	140
Литература к главе 4.....	144
Глава 5. <b>Энергия электрического поля. Пондеромоторные силы.....</b>	<b>145</b>
§ 3.1. Теоретический материал.....	145
§ 3.2. Основные типы задач (классификация).....	149
§ 3.3. Методы решения и примеры решения задач.....	149
§ 3.4. Задачи для самостоятельного решения.....	170
Литература к главе 5.....	173
Глава 6. <b>Постоянный электрический ток.....</b>	<b>174</b>
§ 3.1. Теоретический материал.....	174
§ 3.2. Основные типы задач (классификация).....	181
§ 3.3. Методы решения и примеры решения задач.....	181
§ 3.4. Задачи для самостоятельного решения.....	198
Литература к главе 6.....	203
Глава 7. <b>Магнитное поле стационарного тока в вакууме.....</b>	<b>204</b>
§ 3.1. Теоретический материал.....	204
§ 3.2. Основные типы задач (классификация).....	209
§ 3.3. Методы решения и примеры решения задач.....	210
§ 3.4. Задачи для самостоятельного решения.....	234
Литература к главе 7.....	238

Глава 8. <b>Электромагнитная индукция. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции</b> .....	239
§ 3.1. Теоретический материал .....	239
§ 3.2. Основные типы задач (классификация) .....	242
§ 3.3. Методы решения и примеры решения задач .....	243
§ 3.4. Задачи для самостоятельного решения .....	265
Литература к главе 8.....	271
Глава 9. <b>Энергия и силы в магнитостатике</b> .....	272
§ 3.1. Теоретический материал .....	272
§ 3.2. Основные типы задач (классификация) .....	274
§ 3.3. Методы решения и примеры решения задач .....	274
§ 3.4. Задачи для самостоятельного решения .....	295
Литература к главе 9.....	300
Глава 10. <b>Магнетики в постоянном магнитном поле</b> .....	301
§ 3.1. Теоретический материал .....	301
§ 3.2. Основные типы задач (классификация) .....	308
§ 3.3. Методы решения и примеры решения задач .....	309
§ 3.4. Задачи для самостоятельного решения .....	340
Литература к главе 10.....	346
Глава 11. <b>Переходные процессы в <math>RL</math>, <math>RC</math> и <math>RLC</math> цепях.</b> <b>Свободные электрические колебания в контурах</b> .....	347
§ 3.1. Теоретический материал .....	347
§ 3.2. Основные типы задач (классификация) .....	356
§ 3.3. Методы решения и примеры решения задач .....	356
§ 3.4. Задачи для самостоятельного решения .....	386
Литература к главе 11 .....	391
Глава 12. <b>Цепи переменного тока</b> .....	392
§ 3.1. Теоретический материал .....	392
§ 3.2. Основные типы задач (классификация) .....	399
§ 3.3. Методы решения и примеры решения задач .....	399
§ 3.4. Задачи для самостоятельного решения .....	431
Литература к главе 12.....	436

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Раздел «Электромагнетизм» курса «Общая физика», который в классических университетах изучается студентами на втором курсе, является одним из основных, так как материал этого раздела создает базу, на основе которой строятся практически все последующие курсы. Большая часть программного материала, связанная с умением количественного решения конкретных электродинамических задач, приходится на семинарские занятия. Выработка умений, навыков и методов решений огромного числа типовых задач, конечно, не может быть реализована только за счет часов, отведенных на семинарские занятия, и подразумевает большую самостоятельную работу студента.

В связи с этим становится чрезвычайно актуальной проблема разработки общей методики решения задач по разделу электромагнетизм, которая с одной стороны упорядочила бы и унифицировала планы проведения самих семинарских занятий, а с другой стороны стала бы руководством для самостоятельной работы студентов.

Впервые важность этой проблемы была осознана более двадцати пяти лет тому назад бывшим заведующим кафедрой общей физики профессором А.Н.Матвеевым, который под своей редакцией организовал выпуск серии книг по методике решения задач по всем разделам курса «Общая физика» и в частности книгу Л.И. Антонов, Л.Г. Деденко, А.Н. Матвеев – «Методика решения задач по электричеству» (1982 г.). За прошедшие годы программы, учебные планы, степень подготовки абитуриентов претерпели существенные изменения, в результате чего возникла острая необходимость создания обновленного, приспособленного к новым условиям, учебного пособия по решению задач в разделе электромагнетизм, которым и является предлагаемая книга.

Весь материал книги разбит на двенадцать глав, в соответствии с числом основных тем раздела.

Каждая глава состоит из четырех параграфов.

§1 – Теоретический материал. Этот параграф носит справочный характер и содержит определения основных понятий и величин, используемых в главе, формулировки фундаментальных законов, часто употребляемые формулы.

§2 — Основные типы задач (классификация). В этом параграфе предпринята попытка классифицировать все разнообразие задач,

относящихся к теме данной главы, распределить их по основным типам, каждый из которых имеет собственную методику решения.

§3 — Методы решения и примеры решения задач. На конкретных примерах рассмотрены методы решения (в том числе и альтернативные) всех типов задач. При этом наиболее типичные задачи, решения которых используются в дальнейшем при решении более сложных задач, обозначены как «базовые задачи» и их решения приводятся наиболее подробно. При подборе задач часто использовались задачи, заимствованные из классических учебников и задачников, рекомендованных в программе курса. Их список приводится в конце книги.

§4 — Задачи для самостоятельного решения. В этом параграфе подобраны задачи всех типов с ответами, решение которых позволяет студентам провести самоконтроль глубины и правильности усвоения всего предыдущего материала.

Во всей книге векторы обозначаются жирным шрифтом (**E**, **H**), а их модули или величины наклонным шрифтом (*E*, *H*). Скалярное произведение произвольных векторов **a** и **b** записывается как (**ab**), а их векторное произведение, как [**ab**]. Все решения проведены в международной системе единиц СИ. Всего в книге приведены решения 238 задач и 205 задач вынесены для самостоятельного решения.

Представленная книга прошла апробацию в течение двух лет на семинарах во всех учебных группах второго курса физического факультета МГУ и широко обсуждалась на кафедре общей физики. Авторы выражают благодарность П.А. Полякову, Ю.А. Кокшарову, А.В. Быкову, О.Н. Васильевой, Г.А. Мироновой, В.А. Погожеву, П.В. Полевому, И.Б. Поляковой, М.В. Семенову, Ю.В. Старокурову, Н.И. Чистяковой, А.А. Якуте и всем преподавателям кафедры, чьи полезные советы и критические замечания во многом способствовали улучшению книги.

Особую признательность авторский коллектив также выражает заведующему кафедрой профессору А.М. Салецкому, по чьей инициативе и было предпринято издание настоящей книги, за постоянное внимание и помощь в работе.

## Глава 1

**ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ.  
ЗАКОН КУЛОНА. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА  
ГАУССА****§1.1. Теоретический материал**

**Электрический заряд** – источник и объект действия электромагнитного поля.

**Электромагнитное поле** – материальный носитель электромагнитных взаимодействий зарядов. Понятие электромагнитного поля соответствует концепции близкодействия.

**Электрический заряд частицы** – присущая частице характеристика, определяющая ее электромагнитные взаимодействия.

**Элементарный заряд** – наименьшая неделимая часть заряда, величина которого в системе СИ равна  $e \approx 1,60 \cdot 10^{-19}$  Кл.

**Электрон** – стабильный (устойчивый к распаду) материальный носитель отрицательного элементарного электрического заряда.

**Протон** – материальный носитель положительного элементарного электрического заряда.

**Закон сохранения электрического заряда:** алгебраическая сумма зарядов всех тел, составляющих изолированную систему, не может изменяться со временем.

**Релятивистская инвариантность заряда:** величина электрического заряда не зависит от скорости движения частицы – носителя заряда и скорости движения системы отсчета.

**Точечный заряд** – модель заряженного тела, размерами которого можно пренебречь в условиях конкретной задачи ввиду малости размеров тела по сравнению с расстоянием от него до точки определения поля или по сравнению с областью неоднородности поля.

**Неподвижный заряд** – модель находящейся в физически бесконечно малом объеме системы тел, средняя скорость которых близка к нулю, а заряд постоянен. В строгом смысле неподвижных зарядов в природе не существует.

**Электростатическое поле** – электрическое поле, созданное системой неподвижных зарядов. Предполагается, что заряды удерживаются неподвижными за счет сторонних, то есть не-



электростатических сил. За счет только электростатических сил равновесие невозможно (**теорема Ирншоу**).

**Пробный заряд** – точечный заряд, который вносится в данное электростатическое поле для измерения его характеристик. Этот заряд должен быть достаточно мал, чтобы своим воздействием не нарушить положение зарядов – источников измеряемого поля и тем самым не изменить создаваемое ими поле.

**Закон Кулона:** сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , расположенных в вакууме на расстоянии  $r$  друг от друга, в системе единиц СИ равна

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

и направлена по прямой, соединяющей заряды (одноимённые заряды отталкиваются, разноимённые – притягиваются). Величина

$$\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \left( \frac{\Phi}{\text{м}} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} \right)$$

называется электрической постоянной (точное значение этой константы  $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}$ , где  $c$  – скорость света в вакууме).

В системе единиц СИ размерный коэффициент  $1/(4\pi\epsilon_0)$  входит во многие формулы электростатики и поэтому для краткости часто обозначается одной буквой:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\Phi}$$

**Напряженность электростатического поля  $E$**  – векторная характеристика поля, определяемая силой, действующей на внесенный в поле неподвижный точечный пробный заряд  $q$

$$E = \frac{F}{q} \quad (1.2)$$

**Напряженность поля точечного заряда  $q$**  на расстоянии  $r$  от него равна по величине

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (1.3)$$

(полевая трактовка закона Кулона).

**Силовая линия** – линия, касательная к которой в каждой точке имеет направление, совпадающее с направлением напряженности поля в этой точке. Силовые линии напряженности электростатического поля всегда начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах (могут начинаться или заканчиваться на бесконечности, где неявно предполагается наличие зарядов противоположного знака).

**Принцип суперпозиции:** напряженность поля  $\mathbf{E}$ , создаваемая совокупностью зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots$ , создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots$$

Напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , созданная совокупностью точечных зарядов  $q_i$ , расположенных в точках с радиус-вектором  $\mathbf{r}_i$ , равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} q_i.$$

**Объемная плотность непрерывного распределения заряда**  $\rho$  – отношение величины заряда  $dq$ , находящегося в физически бесконечно малом объеме  $dV$ , к величине объема  $dV$ :

$$\rho = \frac{dq}{dV}.$$

**Поверхностная плотность заряда**  $\sigma$  – отношение величины заряда  $dq$ , находящегося на физически бесконечно малой поверхности площади  $dS$ , к величине площади  $dS$ :

$$\sigma = \frac{dq}{dS}.$$

**Линейная плотность заряда**  $\tau$  – отношение величины заряда  $dq$ , находящегося на физически бесконечно малом отрезке линии длины  $dl$ , к величине длины  $dl$ :

$$\tau = \frac{dq}{dl}.$$

**Напряженность электростатического поля**  $\mathbf{E}$  в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , созданная совокупностью объемных зарядов с плотностью  $\rho(\mathbf{r})$ , поверхностных зарядов с плотностью  $\sigma(\mathbf{r})$  и линейных зарядов с плотностью  $\tau(\mathbf{r})$ , определяется соотношением

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq(\mathbf{r}'),$$

где  $dq(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}')dV'$ ,  $\sigma(\mathbf{r}')dS'$  или  $\tau(\mathbf{r}')dl'$  соответственно для каждого из указанных случаев.

**Электрический диполь** – система двух разноименных по знаку и одинаковых по величине точечных зарядов, находящихся на небольшом расстоянии один от другого. Вектор  $l$ , проведенный от отрицательного заряда к положительному, называется плечом диполя. Вектор

$$\mathbf{p} = ql$$

называется электрическим моментом диполя.

**Напряженность поля, создаваемого диполем** в точке, заданной радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , проведенным от центра диполя, (при условии  $l \ll r$ ) приблизительно равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]. \quad (1.4)$$

В пределе  $\frac{l}{r} \rightarrow 0$  приведенная формула становится асимптотически точной, а диполь называется точечным.

**Электрическим дипольным моментом системы  $N$  зарядов** называется вектор

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i, \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{r}_i$  – радиус-вектор  $i$ -ого заряда.

Если полный заряд системы равен нулю (электрически нейтральная система), то величина дипольного момента не зависит от выбора начала системы отсчета, поэтому радиус-векторы  $\mathbf{r}_i$  можно отсчитывать от любой точки. В таком случае на больших расстояниях от системы (намного больших ее собственных размеров), ее электрическое поле совпадает с полем точечного диполя (1.4).

**Для непрерывного распределения заряда дипольный момент системы** определяется интегралом

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} dq(\mathbf{r}), \quad (1.6)$$

где интегрирование происходит по всему распределению заряда, а дифференциал заряда для объемных, поверхностных и линейных зарядов имеет вид  $dq(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})dV$ ,  $\sigma(\mathbf{r})dS$  и  $\tau(\mathbf{r})dl$  соответственно.

**Поток произвольного вектора  $\mathbf{A}$**  через поверхность  $S$  – поверхностный интеграл

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} d\mathbf{S}, \quad (1.7)$$

где  $d\mathbf{S}$  определяется как вектор, по модулю равный площади элементарной площадки  $dS$  на поверхности  $S$  и направленный по нормали к её плоскости. Если поверхность замкнутая, то интеграл обозначается символом  $\oint$ , а направление  $d\mathbf{S}$  совпадает с направлением внешней нормали к поверхности в данной точке.

**Дивергенция вектора  $\mathbf{A}$**  – предел отношения потока вектора  $\mathbf{A}$  через бесконечно малую замкнутую поверхность, ограничивающую бесконечно малый объем  $\Delta V$ , к величине этого объема:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} d\mathbf{S}}{\Delta V}.$$

Если проекции вектора  $\mathbf{A}$  в декартовой системе координат равны  $A_x$ ,  $A_y$  и  $A_z$ , то

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = (\nabla \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (1.8)$$

где часто используемый символический оператор  $\nabla$  (набла) – вектор, проекции которого на оси декартовой системы координат равны частным производным по соответствующим координатам:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  – орты декартовых осей.

**Формула Гаусса – Остроградского** связывает интеграл по объему от дивергенции вектора с потоком этого вектора через замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ :

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S}. \quad (1.9)$$

**Электростатическая теорема Гаусса в интегральной форме** (интегральная формулировка закона Кулона): поток вектора напряженности электростатического поля через любую замкнутую по-

верхность пропорционален суммарному заряду, находящемуся внутри объема, ограниченного этой поверхностью

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.10)$$

Поверхность  $S$  часто называют поверхностью Гаусса.

**Электростатическая теорема Гаусса в дифференциальной форме** (дифференциальная формулировка закона Кулона)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.11)$$

**Градиент скалярной функции**  $\varphi$  – вектор, проекции которого на оси декартовой системы координат равны частным производным функции  $\varphi$  по соответствующим координатам:

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (1.12)$$

**Сила, действующая на точечный диполь в электростатическом поле**

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \operatorname{grad}) \mathbf{E} = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E} = p_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}. \quad (1.13)$$

**Момент сил, действующих на точечный диполь в электрическом поле**

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p} \mathbf{E}]. \quad (1.14)$$

## §1.2. Основные типы задач (классификация)

1.1. Определение напряженности электрического поля заданного распределения **точечных** зарядов.

1.2. Определение напряженности электростатического поля, созданного зарядами, распределенными **равномерно** в произвольных конечных областях пространства с постоянными значениями линейной плотности заряда ( $\tau$ ), поверхностной плотности заряда ( $\sigma$ ) или объёмной плотности заряда ( $\rho$ ).

Обычно в задачах этого типа заряд равномерно распределен по конечным отрезкам нитей, кольцам, участкам цилиндрических и сферических поверхностей.

1.3. Определение напряженности электростатического поля от зарядов, распределение которых имеет плоскую, осевую (цилиндрическую) или центральную (сферическую) симметрию.

Задачи этого типа легко решаются с помощью теоремы Гаусса. К ним относятся случаи, когда заряды распределены по бесконечным нитям с постоянной линейной плотностью  $\tau_i$ , бесконечным плоскостям с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma_i$  или же симметрично распределены по слоям, бесконечным цилиндрам или цилиндрическим слоям, а также по сферам, шарам и шаровым слоям.

1.4. Определение напряженности поля непрерывного **неравномерного** распределения заряда, когда плотность распределения заряда выражается какой либо функцией координат.

1.5. Определение напряженности поля, в создании которого участвуют электрические диполи.

1.6. Решение обратной задачи электростатики: по заданному значению напряженности электрического поля определить распределение зарядов, породившее это поле.

### **§1.3. Методы решения и примеры решения задач**

Сначала сформулируем некоторые рекомендации, общие для всех задач рассматриваемого раздела.

Первый шаг в решении задачи: из анализа условий, определить к какому типу относится данная задача. Далее в зависимости от результатов анализа использовать методы решения, применяемые для данного типа задач. Чтобы яснее представить себе изучаемую систему, следует выбрать наиболее удобную систему координат и изобразить эту систему схематически на рисунке, где отметить все характерные особенности системы. Необходимо проанализировать свойства симметрии, которыми обладает изучаемая система.

Если постановка задачи ясна, то следует составить план подхода к решению. Поиск решения должен быть не хаотическим, а целенаправленным. Начинать надо с обдумывания вопроса, поставленного в задаче. Возвращаясь к теоретическому материалу, следует определить, какие теоретические положения и формулы могут помочь начать решение или сразу ответить на вопрос задачи. Не надо бояться вводить в процессе решения величины, не заданные в условии задачи. Если с помощью этих дополнительно введенных величин усматривается план доведения решения до ответа, то далее следует поступить с введенными величинами так же, как с исходным вопросом; в конце решения все использованные промежуточные величины должны быть выражены через заданные в условии

задачи параметры. Только после этого следует последовательно записать все этапы решения, получить ответ и найти, если требуется, численное значение искомой величины. Перед выполнением численного расчета полезно проверить размерность полученной величины и правильность результатов, соответствующих различным предельным случаям.

Еще один совет общего плана. Часто для решения задачи используется результат, полученный ранее при решении другой задачи. Поэтому сразу следует подумать: нет ли среди ранее решенных и изученных задач полезных сведений и выводов для данной новой задачи, нельзя ли использовать результат или метод решения какой-либо ранее рассмотренной задачи. Те задачи, решения которых в виде конечного результата наиболее часто используются при решении данного типа задач, будем называть **базовыми** задачами. Часто использование таких задач существенно облегчает поиск путей решения новой задачи.

Отметим, что практически во всех случаях при решении используется принцип суперпозиции.

### Задачи типа 1.1

*Определение напряженности электрического поля заданного распределения **точечных** зарядов*

**Метод решения:** использовать формулы (1.1) – (1.3) теоретического материала и принцип суперпозиции. С целью упрощения вычислений необходимо выбрать такую систему координат, которая соответствует элементам симметрии, присутствующим в условии задачи.

**Задача 1.3.1.** Положительный точечный заряд  $50 \text{ мкКл}$  находится на плоскости  $xu$  в точке  $A$  с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ , где  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  – орты осей  $x$  и  $y$ . Найти модуль и направление вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  в точке  $B$  с радиус-вектором  $\mathbf{r} = 8\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ . Значения координат  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}$  даны в метрах.

#### Решение

Используя численные данные,

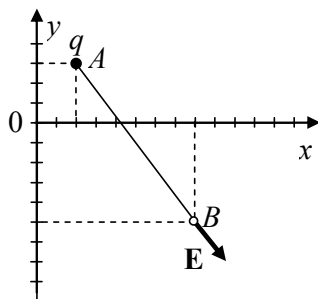


Рис. 1.1. К определению напряженности поля  $\mathbf{E}$  точечного заряда (задача 1.3.1).

приведенные в условии задачи, рисуем схематическое изображение изучаемой системы (рис. 1.1). Заряд находится в точке  $A$  с координатами  $x_0 = 2$  м,  $y_0 = 3$  м, а напряженность поля определяется в точке  $B$  с координатами  $x = 8$  м,  $y = -5$  м. Для применения формулы (1.3) находим расстояние  $d$  между точками  $A$  и  $B$ :

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ (м)}.$$

Тогда модуль напряженности поля будет равен

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{100} = 4,5 \text{ (кВ/м)}.$$

Так как направление вектора  $\mathbf{E}$  совпадает с направлением от точки  $A$  к точке  $B$ , то вектор  $\mathbf{E}$  можно представить в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{i} E \cos\alpha + \mathbf{j} E \sin\alpha,$$

где  $\cos\alpha = \frac{x - x_0}{d} = 0,6$ ,  $\sin\alpha = \frac{y - y_0}{d} = -0,8$ ; Окончательно полу-

чаем  $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j}}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{3/2}} = (2,7 \mathbf{i} - 3,6 \mathbf{j}) \text{ (кВ/м)}.$

**Ответ:**  $E = 4,5$  кВ/м,  $\mathbf{E} = (2,7 \mathbf{i} - 3,6 \mathbf{j})$  кВ/м.

**Задача 1.3.2.** В вершинах квадрата с диагональю  $2h$  находятся точечные заряды  $+q$  и  $-q$ , как показано на рис. 1.2. Найти модуль вектора напряженности электрического поля в точке, расположенной на расстоянии  $x$  от плоскости квадрата и равноудаленной от его вершин.

### Решение

Поместим начало координат в центре квадрата. Ось  $X$  проведем перпендикулярно плоскости квадрата, а ось  $Y$  — параллельно сторонам, соединяющим заряды  $+q$  и  $-q$  (рис. 1.3).

В точке  $A$ , отстоящей от плоскости квадрата на расстоянии  $x$ , вектор напряженности поля  $\mathbf{E}$  будет равен векторной сумме четырех напряженностей, создаваемых точечными зарядами (на рисунке по-

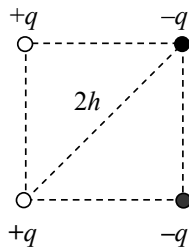


Рис.1.2. Расположение точечных зарядов  $+q$  и  $-q$  в координатной плоскости  $YZ$  (задача 1.3.2)



казано два из них). Модули этих четырех напряженностей одинаковы и согласно формуле (1.3) равны

$$E_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad r^2 = x^2 + h^2.$$

Из симметрии системы следует, что сумма проекций всех четырех напряженностей на оси  $X$  и  $Z$  равны нулю, а проекции всех четырех напряженностей  $E_q$  на ось  $Y$  одинаковы. Проекция  $E_q$  на плоскость  $YZ$  равна

$$E_h = \frac{h}{r} E_q,$$

а проекция  $E_q$  на ось  $Y$  равна

$$E_y = \frac{E_h}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{2}r} E_q.$$

Суммируя все четыре вклада, находим

$$E_y = E = \frac{4h}{\sqrt{2}r} E_q = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x^2 + h^2)^{3/2}}.$$

**Ответ:** 
$$E = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x^2 + h^2)^{3/2}}.$$

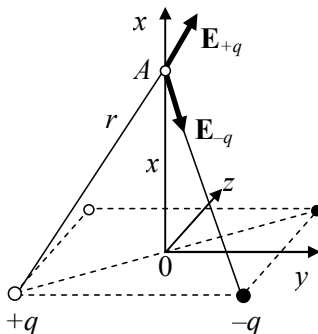


Рис.1.3. Векторы напряженности электрического поля в произвольной точке  $A$  на оси симметрии системы зарядов (задача 1.3.2)

### Задачи типа 1.2

*Определение напряженности электростатического поля, созданного электрическими зарядами, распределенными **равномерно** в конечных областях пространства с постоянными значениями линейной плотности заряда ( $\tau$ ), поверхностной плотности заряда ( $\sigma$ ) или объемной плотности заряда ( $\rho$ ).*

**Метод решения:** в непрерывно распределенных зарядах выделяем физически бесконечно малые заряды – т.е. заряды, находящиеся на отрезке бесконечно малой длины  $dl$  (в случае линейного распределения), на бесконечно малой площади  $dS$  (в случае поверхностного распределения) и в бесконечно малом объеме  $dV$  (в случае объемного распределения). Эти выделенные заряды далее рассматриваются как точечные. Создаваемая ими напряженность

поля в интересующей нас точке вычисляется по формуле напряженности поля точечного заряда (1.3), после чего по принципу суперпозиции суммируются все вклады от таких зарядов. Фактически задача сводится к вычислению линейных, поверхностных или объемных интегралов. В курсе общей физики объекты выбираются обычно такими, чтобы вычисление интегралов не представляло значительных математических затруднений.

**Задача 1.3.3 (базовая задача).** Прямая нить длиной  $L$  заряжена равномерно с линейной плотностью  $\tau$ . Найти напряженность поля в произвольной точке, расположенной на расстоянии  $h$  от нити.

### Решение

Поместим начало системы координат  $O$  в основание перпендикуляра, опущенного из точки наблюдения  $A$  на направление нити, ось  $Y$  направим вдоль нити, а ось  $X$  перпендикулярно к ней (рис. 1.4, для наглядности нить представлена в виде тонкого цилиндра). Выделим на нити на произвольном расстоянии  $y$  от начала координат участок бесконечно малой длины  $dy$ , заряд которого рассматриваем как точечный. Этот заряд создает в точке  $A$  поле напряженностью

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dy}{r^2},$$

где  $r = \sqrt{h^2 + y^2} = \frac{h}{\cos \alpha}$  (угол  $\alpha$  отсчи-

тывается от направления  $AO$ ). Вектор  $d\mathbf{E}$  лежит в плоскости  $XY$  и его проекции на координатные оси равны

$$dE_x = dE \cos \alpha, \quad dE_y = dE \sin \alpha, \\ dE_z = 0.$$

Полное значение проекций напряженности поля получим, суммируя все такие бесконечно малые вклады, т.е. вычисляя интеграл вдоль всей нити. Интегрирование выполняется совсем просто, если в качестве переменной вместо  $y$  использовать угол  $\alpha$ . Из соотношения  $y = h \operatorname{tg} \alpha$  находим

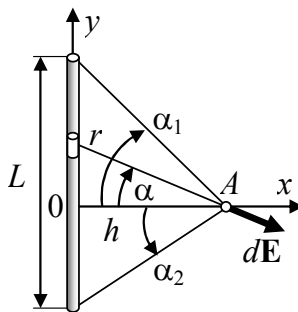


Рис. 1.4. К нахождению напряженности поля  $\mathbf{E}$ , создаваемого отрезком заряженной нити (задача 1.3.3)

$$dy = \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha \text{ и}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{h} \cos \alpha d\alpha, \quad dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{h} \sin \alpha d\alpha.$$

Пределы интегрирования определяются углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , под которыми из точки наблюдения  $A$  видны концы нити (оба угла считаем положительными). Итак,

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{h} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2), \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{h} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{h} \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right).$$

Эти формулы очень удобны для анализа частных случаев. Например, если нить бесконечная, то  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$  и мы получаем

$$E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{h}, \quad E_y = 0.$$

Если нужно вычислить напряженность в точке напротив центра нити, то полагаем  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  и получаем  $E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{h} \sin \alpha$ . И так далее. Конечно, эти результаты можно выразить и через координату  $y$  верхнего конца нити, заменяя  $\alpha_1$  на  $\arctg \frac{y}{h}$  и  $\alpha_2$  – на  $\arctg \frac{y-L}{h}$ .

**Ответ:** 
$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{h} \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$$

**Задача 1.3.4.** На одной половине тонкого кольца радиуса  $R$  равномерно распределен положительный заряд с линейной плотностью  $\tau_1$ , а на другой половине – заряд того же знака с плотностью  $\tau_2$ . Найти напряженность поля в центре кольца.

### Решение

Согласно принципу суперпозиции напряженность поля в центре кольца будет равна сумме напряженностей, создаваемых каждым зарядом. Выделим на первом полукольце бесконечно малый участок  $dl = R d\alpha$ , несущий заряд  $dq = \tau_1 dl$  (рис. 1.5). Заряд  $dq$  считаем точечным, и создаваемое им в центре кольца – точке  $O$  – поле  $dE$  находим по формуле (1.3):

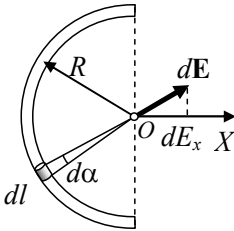


Рис. 1.5. Определение напряженности поля в центре заряженного полукольца (задача 1.3.4)

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau_1 d\alpha}{R}.$$

Из соображений симметрии ясно, что в суммарное поле войдет только проекция напряженности на ось  $X$ , проведенную через центр кольца перпендикулярно диаметру полукольца:  $dE_x = dE \cos \alpha$ . В итоге получаем

$$E_1 = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\tau_1 \cos \alpha d\alpha}{R} = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

От второго полукольца поле будет направлено в противоположную сторону, так как оба заряда одного знака. Поэтому окончательно,

$$E = \frac{|\tau_1 - \tau_2|}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Если  $\tau_1 = \tau_2$ , то  $E = 0$ . Напряженность в центре равномерно заряженного кольца равна нулю.

**Ответ:**  $E = \frac{|\tau_1 - \tau_2|}{2\pi\epsilon_0 R} \mathbf{i}$ .

**Задача 1.3.5 (базовая задача).** Вычислить напряженность поля в произвольной точке на оси тонкого кольца радиуса  $R$ , на котором равномерно распределен заряд  $q$ .

### Решение

Расположим начало координат в центре кольца и направим ось  $Z$  вдоль оси кольца (рис. 1.6). Выберем любую точку  $A$  на оси кольца с координатой  $z$  и найдем напряженность поля в этой точке.

На кольце выделяем участок бесконечно малой длины  $dl = R d\varphi$ , на котором находится заряд  $dq = \tau dl$ , где

$$\tau = \frac{q}{2\pi R}$$

– линейная плотность заряда на кольце. Заряд  $dq$  рассматриваем как

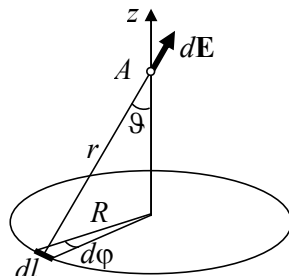


Рис. 1.6. Определение напряженности поля  $E$  на оси заряженного кольца (задача 1.3.5)

точечный. Он создает в точке  $A$  поле  $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ , где  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$  – расстояние от заряда до точки  $A$ . Из соображений симметрии ясно, что в полной напряженности поля будет отлична от нуля только ее проекция на ось  $Z$ .

Поскольку  $dE_z = dE \cos \vartheta$  и  $\cos \vartheta = \frac{z}{r}$ , имеем

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Напряженность при  $z = 0$  и при  $z \rightarrow \infty$  равна нулю и не меняет знака на всей положительной полуоси. Это означает, что в некоторой точке она достигает максимума. Чтобы найти  $(E_z)_{\max}$ , используем условие экстремума  $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ , из которого находим  $z_{\max} = \frac{R}{\sqrt{2}}$ . Максимальное значение напряженности равно

$$E_{\max} = E_z(z_{\max}) = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 R^2}.$$

При  $z \gg R$  поле мало отличается от поля точечного заряда  $q$ , расположенного в центре кольца.

**Ответ:**  $E = E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$

**Задача 1.3.6 (базовая задача).** Определить напряженность поля на оси тонкого диска радиуса  $R_0$ , заряженного равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$ .

### Решение

Выберем ось  $Z$  совпадающей с осью диска (рис. 1.7). Малый элемент поверхности диска, находящийся на расстоянии  $R$  от центра, имеет площадь  $dS = R d\varphi dR$ , где  $\varphi$  – полярный угол. Элементарный заряд на нем можно считать точечным; он равен

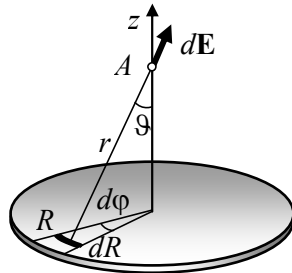


Рис. 1.7. Определение напряженности поля  $E$  на оси заряженного диска (задача 1.3.6)

$dq = \sigma dS = \sigma R dR d\varphi$ . Соответственно напряженность поля от этого точечного заряда в точке с координатой  $z_0$  будет равна

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R dR d\varphi}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad r = \sqrt{R^2 + z_0^2}.$$

Разложим  $d\mathbf{E}$  на две составляющие – по оси  $Z$  и перпендикулярную оси  $Z$ . Последняя при суммировании по площади диска в силу симметрии задачи даст нуль, а первая будет равна

$dE_z = dE \cos\vartheta$ , где  $\cos\vartheta = \frac{z_0}{r}$ . Тогда

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma z_0 R dR d\varphi}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

и

$$E_z = \frac{\sigma z_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \frac{R dR d\varphi}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z_0}{\sqrt{R_0^2 + z_0^2}} \right).$$

При  $R_0 \rightarrow \infty$  (или  $z_0 \rightarrow 0$ )  $E_z \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , т.е. стремится к величине поля равномерно заряженной бесконечной плоскости.

**Ответ:**  $E = E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z_0}{\sqrt{R_0^2 + z_0^2}} \right).$

*Замечание.* Тот же результат можно получить гораздо легче, используя решение базовой задачи **1.3.5**. Для этой цели выделим в плоскости диска малое кольцо радиуса  $r$ , которое будет нести заряд  $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$  и которое, согласно решению задачи **1.3.5**, создаст на оси диска напряженность поля, равную по величине

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z dq}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя это выражение по  $r$  от нуля до  $R_0$ , получаем искомый ответ.

**Задача 1.3.7.** Заряд равномерно распределен по поверхности полусферы радиуса  $R$  с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Определить напряженность электрического поля в центре полусферы.

**Решение**

В сферической системе координат площадь элемента поверхности равна  $dS = R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ . Элементарный заряд на этой площади, который мы будем рассматривать как точечный (рис. 1.8), будет  $dq = \sigma R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$  и поле, создаваемое им в центре полусферы, равно

$$dE = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Разложим это поле на составляющую, направленную по перпендикуляру к плоскости сечения сферы (по оси  $Z$ )

$$dE_z = dE \cos\vartheta = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta d\varphi,$$

и на составляющую, лежащую в плоскости сечения сферы. Последняя в силу симметрии задачи при суммировании даст нуль, а нормальная составляющая и есть искомая напряженность поля

$$E_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}.$$

**Ответ:**  $E = E_z = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}.$

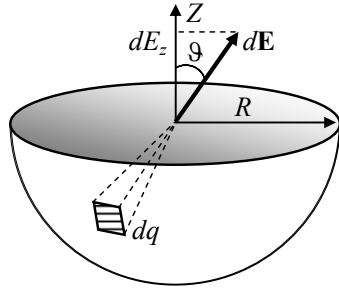


Рис. 1.8. Определение напряженности поля  $E$  в центре заряженной полусферы (задача 1.3.7)

**Задачи типа 1.3**

*Определение напряженности электростатического поля от зарядов, распределение которых имеет плоскостную, осевую (цилиндрическую) или центральную (сферическую) симметрию.*

**Метод решения:** применение электростатической теоремы Гаусса (1.10). В соответствии с условиями задачи выбирают поверхность Гаусса таким образом, чтобы вектор  $E$  на ней был постоянен и, по возможности, перпендикулярен или параллелен поверхности. Именно в этих условиях вычисление поверхностных интегралов не вызывает трудностей и сводится к простому суммированию.

Задачи этого раздела в большинстве своем являются базовыми. В дальнейшем результаты решения этих задач неоднократно будут использованы при решении задач других разделов.

**Задача 1.3.8 (базовая задача).** Найти в произвольной точке напряженность поля, создаваемого положительным зарядом, равномерно распределенным с поверхностной плотностью  $\sigma$  на бесконечной плоскости.

### Решение

Поскольку плоскость бесконечная, распределение зарядов и поля обладает плоской симметрией. Следовательно, линии напряженности поля везде направлены по нормали к плоскости и, следовательно, параллельны друг другу, а модуль напряженности одинаков во всех точках, отстоящих от плоскости на одно и то же расстояние.

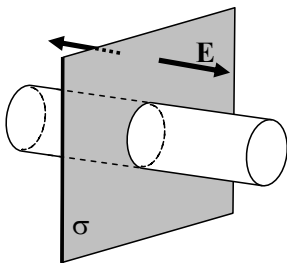


Рис. 1.9. Поверхность Гаусса для равномерно заряженной плоскости (задача 1.3.8)

Ввиду симметрии задачи целесообразно применить теорему Гаусса (1.10). Для этого рассмотрим прямой цилиндр, перпендикулярный плоскости и симметрично расположенный относительно нее (рис. 1.9). Поток вектора  $\mathbf{E}$  через боковую поверхность такого цилиндра равен нулю, так как линии напряженности везде параллельны образующим цилиндра. Потоки вектора  $\mathbf{E}$  через основания цилиндра одинаковы и равны  $ES$ , где  $S$  – площадь основания цилиндра. Заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности этого цилиндра, равен  $\sigma S$ . По теореме Гаусса имеем  $2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ , откуда находим ответ:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

**Напряженность поля не зависит от расстояния от плоскости. Это однородное поле, силовые линии которого начинаются на заряженной плоскости и уходят на бесконечность, оставаясь перпендикулярными к заряженной плоскости.**



Тот же результат получится и для отрицательного заряда. В этом случае силовые линии поля начинаются в бесконечности и заканчиваются на заряженной плоскости.

Конечно, бесконечных заряженных плоскостей в природе не существует. Однако полученный результат можно использовать для определения напряженности поля вблизи равномерно заряженной пластины, когда расстояние от точки наблюдения до пластины много меньше размеров пластины и, кроме того, точка наблюдения находится достаточно далеко от края пластины. Чем лучше выполнены эти условия, тем точнее полученная формула определяет напряженность поля в точке наблюдения. Это типичный пример придания физического смысла результатам расчета напряженности поля от объекта бесконечной протяженности.

Отметим, что на заряженной поверхности напряженность поля  $E$  не определена (испытывает скачок). Это связано с выбором модели поверхности как не имеющей толщины. В реальных материалах электрическое поле вблизи заряженной поверхности меняется очень быстро на расстояниях порядка нескольких атомных слоев. В этой области модель не имеющей толщины поверхности оказывается слишком грубой и требует уточнения с учетом свойств составляющих ее атомов и молекул. В дальнейшем, говоря о скачке напряженности, мы будем иметь в виду именно такую картину.

**Ответ:**  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

**Задача 1.3.9.** Две бесконечные параллельные друг другу плоскости равномерно заряжены с поверхностными плотностями заряда  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Найти распределение напряженности поля: а) когда заряды одного знака, б) когда заряды разных знаков.

### Решение

Напряженности полей, создаваемых каждой плоскостью, найдены в базовой задаче 1.3.8. Используем полученные там решения и принцип суперпозиции. На *рис.1.10* схематически показаны поля от каждой плоскости для случаев а) и б); при этом положительным направлением напряженности считается направление слева направо (именно это направление будем считать положительным направлением оси  $X$ ).

а) В области 1 поля  $E_1$  и  $E_2$  сонаправлены, поэтому

$$E_{(1)} = -E_1 - E_2 = -(E_1 + E_2).$$

В области 2 направления полей противоположны, поэтому

$$E_{(2)} = -E_2 + E_1.$$

Аналогично в области 3 имеем

$$E_{(3)} = E_1 + E_2.$$

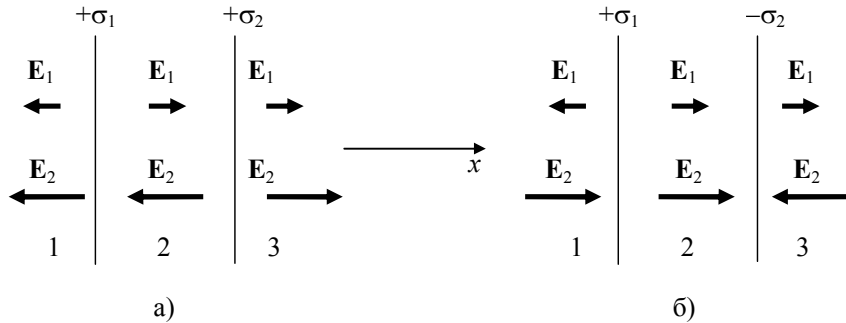


Рис.1.10. Напряженности электрических полей, создаваемых двумя равномерно заряженными плоскостями (задача 1.3.9): а) заряды плоскостей одного знака; б) заряды плоскостей противоположных знаков

Если плотности зарядов одинаковы и равны  $\sigma$ , то проекции векторов напряженностей на ось  $X$  будут равны:

$$E_{(1)} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad E_{(2)} = 0, \quad E_{(3)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

б) Рассмотрение аналогично пункту а). Находим:

$$E_{(1)} = E_2 - E_1; \quad E_{(2)} = E_1 + E_2; \quad E_{(3)} = E_1 - E_2.$$

В случае одинаковых по модулю зарядов имеем

$$E_{(1)} = E_{(3)} = 0, \quad E_{(2)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Как и в задаче 1.3.8, полученные результаты можно использовать для пластин конечных размеров в точках пространства, находящихся достаточно близко к плоскостям пластин и отстоящих достаточно далеко от краев пластин. Фактически расстояния между пластинами должны быть малыми по сравнению с размерами пластин, а точка наблюдения находится далеко от краев пластин. В противном случае отклонения от полученных результатов становятся существенными (поле искажается за счет краевых эффектов).

**Ответ:** В областях (1), (2) и (3) поля однородные и их напряженности соответственно равны:

$$\text{а) } E_{(1)} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}, E_{(2)} = 0, E_{(3)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}; \quad \text{б) } E_{(1)} = E_{(3)} = 0, E_{(2)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

**Задача 1.3.10.** В бесконечной тонкой плоскости, заряженной равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , вырезано круглое отверстие радиусом  $R$ . Найти напряженность электрического поля на оси этого отверстия (рис. 1.11, для наглядности плоскость показана в виде тонкой пластины).

### Решение

Отверстие, где плотность зарядов равна нулю, можно представить как наложение диска с поверхностным зарядом  $-\sigma$  на сплошную плоскость с поверхностным зарядом  $+\sigma$ . Используя принцип суперпозиции, напряженность электрического поля в произвольной точке  $A$  на оси отверстия можно представить как сумму напряженностей поля  $\mathbf{E}_1$ , создаваемого целой бесконечной плоскостью, и поля  $\mathbf{E}_2$  от данного противоположного заряженного диска радиуса  $R$ .

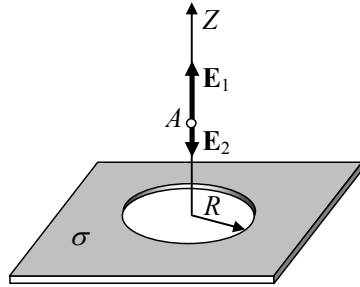


Рис. 1.11. К нахождению поля  $\mathbf{E}$  на оси отверстия, вырезанного в заряженной плоскости (задача 1.3.10)

Напряженность поля, создаваемого бесконечной плоскостью, равна  $E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . Напряженность поля на оси диска известна из решения базовой задачи 1.3.6. и в данном случае равна

$$E_2 = \frac{(-\sigma)}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} \right),$$

где  $z_0$  – расстояние от точки наблюдения до плоскости. Окончательный ответ получаем, складывая эти две напряженности.

**Ответ:**  $E = E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}}.$

**Задача 1.3.11.** Определить напряженность поля  $E$  внутри и вне безграничного плоского слоя толщиной  $2h$ , в котором равномерно распределен положительный заряд с объемной плотностью  $\rho$ .

**Решение**

В силу симметрии задачи вектор напряженности может быть направлен только перпендикулярно плоскости (ось  $X$ ). Для применения теоремы Гаусса (1.10) выбираем расположенный симметрично относительно центральной плоскости слоя цилиндр с осью, параллельной оси  $X$ , площадью основания  $S$  и длиной образующей  $2x$  (рис. 1.12).

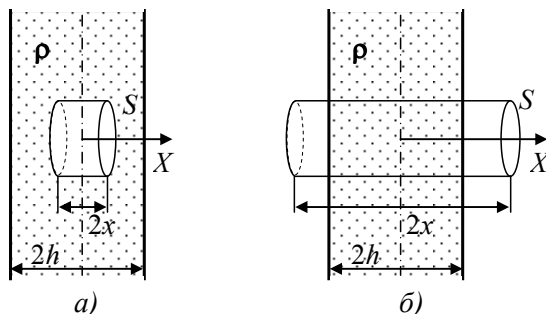


Рис. 1.12. Поверхность Гаусса для равномерно заряженного плоского слоя (задача 1.3.11): а) вычисление напряженности внутри слоя; б) вычисление напряженности вне слоя

Если  $x < h$ , то теорема Гаусса определяет напряженность поля внутри заряженного слоя, если  $x > h$  – снаружи. Рассуждения проводятся в точности аналогично базовой задаче 1.3.8. При  $x < h$  (рис. 1.12а) получаем

$$2ES = \frac{2\rho Sx}{\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad E_{\text{внутри}} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}.$$

При  $x > h$  (рис. 1.12б) имеем

$$2ES = \frac{2\rho Sh}{\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad E_{\text{вне}} = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}.$$

Внутри слоя величина напряженности поля нарастает от центра слоя по линейному закону, а вне слоя поле становится однородным, как в случае бесконечной заряженной плоскости. Как и в предыдущих двух задачах, решение для конечного по площади слоя справедливо в области, где можно пренебречь краевыми эффектами.

**Ответ:** при  $x < h$ :  $E_{\text{внутри}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} x$ ; при  $x > h$ :  $E_{\text{вне}} = \frac{\rho h}{\epsilon_0}$ .

**Задача 1.3.12 (базовая задача).** Поверхность бесконечно длинного круглого цилиндра радиуса  $R$  заряжена равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найти напряженность электрического поля в произвольной точке.

### Решение

Для применения теоремы Гаусса (1.10) выбираем в качестве поверхности Гаусса коаксиальный цилиндр произвольного радиуса  $r$  и конечной высотой  $h$  (рис. 1.13). Если  $r < R$ , то внутри такого цилиндра зарядов нет. Следовательно, в любой точке внутри равномерно заряженной цилиндрической поверхности  $E_{\text{внутри}} = 0$ .

Если  $r > R$ , то заряд внутри цилиндра равен  $2\pi R h \sigma$ , а поток вектора  $\mathbf{E}$  через поверхность цилиндра радиуса  $r$  легко подсчитать, если учесть, что ввиду цилиндрической симметрии системы вектор  $\mathbf{E}$  везде зависит только от координаты  $r$  и везде направлен по нормали к боковой поверхности цилиндра. По теореме Гаусса (1.10)

$$2\pi r h E = \frac{2\pi R h \sigma}{\epsilon_0},$$

откуда напряженность поля вне цилиндра

$$E_{\text{вне}} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \frac{1}{r},$$

где  $r$  – расстояние до оси цилиндра. На заряженной поверхности цилиндра напряженность поля не определена (испытывает скачок от  $E = 0$  вблизи поверхности внутри

до  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  вблизи поверхности снаружи).

Аналогично задаче 1.3.8, полученные результаты применимы и для цилиндров конечных размеров, если можно пренебречь краевыми эффектами.

Если, сохраняя заряд, устремить радиус  $R$  к нулю, то в пределе получим тонкую нить с линейной плотностью заряда  $\tau = 2\pi R \sigma$ ; для

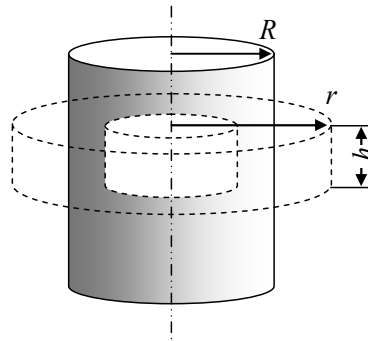


Рис. 1.13. Поверхности Гаусса для круглого цилиндра (задача 1.3.12)

нее из выражения напряженности поля вне цилиндра находим поле для бесконечной нити:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Конечно, этот результат можно получить и сразу из теоремы Гаусса, так как заряд внутри вспомогательного цилиндра равен в этом случае  $\tau h$ , а поток вектора  $\mathbf{E}$  через боковую поверхность цилиндра  $2\pi r h E$ ; поэтому  $E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ . Этот результат уже был получен в задаче 1.3.3, как предельный случай напряженности поля от нити конечной длины.

**Ответ:** для  $r < R$ :  $E_{\text{внутри}} = 0$ ;  
 для  $r > R$ :  $E_{\text{вне}} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \frac{1}{r}$ .

**Задача 1.3.13.** В круглом бесконечном цилиндре радиуса  $R$  равномерно распределен положительный заряд с объемной плотностью  $\rho$ . Найти напряженность электрического поля в произвольной точке.

**Решение**

Для применения теоремы Гаусса (1.10) выбираем поверхность Гаусса в виде цилиндра, как в задаче 1.3.12 (рис. 1.13).

Для области внутри цилиндра  $r < R$  заряд внутри поверхности Гаусса равен  $\rho\pi r^2 h$ , а поток вектора  $\mathbf{E}$  через поверхность равен  $2\pi r h E$ . По теореме Гаусса получаем  $E_{\text{внутри}} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$ . Внутри заряженного по объему цилиндра напряженность поля нарастает от нуля на оси цилиндра по линейному закону, достигая на его поверхности значения  $\frac{\rho R}{2\epsilon_0}$ . Напряженность поля является здесь непрерывной функцией от  $r$ , так как нет заряженных поверхностей с плотностью  $\sigma \neq 0$ .

Для области вне цилиндра  $r > R$  заряд внутри поверхности Гаусса равен  $\rho\pi R^2 h$ , поток вектора  $\mathbf{E}$  равен  $2\pi r h E$ , и по теореме Гаусса  $E_{\text{вне}} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}$ . Устремляя здесь  $r \rightarrow R$ , убеждаемся в непрерывности функции  $E(r)$ .

**Ответ:** Для  $r < R$ :  $E_{\text{внутри}} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$ ; для  $r > R$ :  $E_{\text{вне}} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r}$ .

**Задача 1.3.14.** Внутри бесконечного круглого цилиндра радиуса  $R_0$ , заряженного равномерно с объёмной плотностью  $\rho$ , имеется круглая цилиндрическая полость радиуса  $R_1$  ( $R_1 < R_0$ ), ось которой параллельна оси цилиндра и находится от неё на расстоянии  $a$  (рис. 1.14). Найти напряженность электрического поля в полости.

### Решение

Для решения данной задачи целесообразно использовать решение базовой задачи 1.3.13 и принцип суперпозиции. Искомое поле в полости можно представить как сумму полей сплошного цилиндра, заряженного с плотностью  $+\rho$ , и сплошного цилиндра, совпадающего с полостью, заряженного с плотностью  $(-\rho)$ .

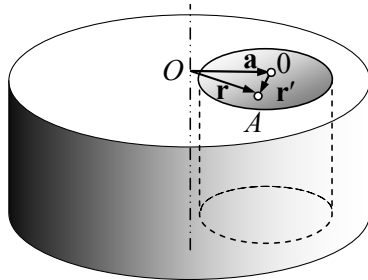


Рис. 1.14. К вычислению напряженности поля  $\mathbf{E}$  в цилиндрической полости внутри заряженного цилиндра (задача 1.3.14)

Сначала найдем поле цилиндра, заряженного с плотностью  $+\rho$ . Воспользуемся результатом задачи 1.3.13, согласно которому напряжен-

ность поля внутри такого цилиндра будет равна  $\mathbf{E}_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r}$  –

радиус-вектор точки, проведенный в перпендикулярном сечении от оси цилиндра. Аналогично, поле внутри цилиндра, совпадающего с

полостью, будет  $\mathbf{E}_2 = \frac{(-\rho)}{2\varepsilon_0} \mathbf{r}'$ , где  $\mathbf{r}'$  – радиус-вектор точки  $A$ , про-

веденный от оси полости. Напряженность поля в произвольной точке  $A$  полости будет равна сумме полученных полей

$$\mathbf{E}_a = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\rho \mathbf{a}}{2\varepsilon_0},$$

где вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  определяет смещение оси полости относительно оси цилиндра. Следует отметить, что поле внутри полости одно-

родно, то есть не зависит от  $\mathbf{r}'$ .

**Ответ:**  $\mathbf{E}_a = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \mathbf{a}$ .

**Задача 1.3.15 (базовая задача).** На поверхности сферы радиуса  $R$  равномерно распределен положительный заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найти напряженность электрического поля в произвольной точке.

**Решение**

Система имеет сферическую симметрию. Для применения теоремы Гаусса выберем в качестве поверхности Гаусса концентрическую сферу радиуса  $r$ .

При  $r < R$  заряда внутри этой поверхности нет. Значит, в любой точке внутри равномерно заряженной сферы  $E = 0$ .

При  $r > R$  весь заряд  $q = 4\pi R^2\sigma$  находится внутри поверхности Гаусса, а поток вектора  $\mathbf{E}$  через неё равен  $4\pi r^2 E$ . По теореме Гаусса находим

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}.$$

Поле вне равномерно заряженной сферы совпадает с полем точечного заряда  $q$ , расположенного в центре сферы.

На заряженной поверхности напряженность поля не определена (испытывает скачок от  $E = 0$  внутри, до  $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$  — снаружи). Физический смысл такого поведения функции  $E(r)$  объяснен в решении задачи 1.3.8.

**Ответ:** для  $r < R$ :  $E_{\text{внутри}} = 0$ ; для  $r > R$ :  $E_{\text{вне}} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$ .

**Задача 1.3.16 (базовая задача).** Шар радиуса  $R$  равномерно заряжен с объемной плотностью  $\rho$ . Найти напряженность поля в произвольной точке.

**Решение**

Система имеет сферическую симметрию. Для применения теоремы Гаусса выберем в качестве поверхности Гаусса концентрическую



скую сферу радиуса  $r$ .

При  $r < R$  заряд внутри этой сферы равен  $(4/3)\pi r^3 \rho$ , а поток  $E$  через её поверхность равен  $4\pi r^2 E$ . По теореме Гаусса  $E_{\text{внутри}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$ .

Таким образом, внутри равномерно заряженного шара поле растёт от центра шара по линейному закону, достигая на поверхности шара значения  $E = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ , где  $q$  – полный заряд, размещенный на шаре.

При  $r > R$  рассуждения ничем не отличаются от проведенных в задаче 1.3.15. Поле снаружи равномерно заряженного шара совпадает с полем точечного заряда, расположенного в центре шара и равного по величине полному заряду шара. Функция  $E(r)$  непрерывна, так как нет поверхностей, несущих поверхностный заряд.

**Ответ:** для  $r < R$ :  $E_{\text{внутри}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$ ;

для  $r \geq R$ :  $E_{\text{вне}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ , где  $q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ .

**Задача 1.3.17.** Внутри шара, равномерно заряженного с объемной плотностью  $+\rho$ , сделана сферическая полость, центр которой смещен относительно центра шара на вектор  $\mathbf{a}$ . Найти напряженность поля внутри полости.

### Решение

Если представить себе полость как шар, равномерно заполненный зарядом с плотностью  $(-\rho)$ , вставленный в сплошной шар с объемной плотностью  $+\rho$ , то поле в полости можно определить как суперпозицию полей этих двух равномерно заряженных шаров. Эти поля найдены в базовой задаче 1.3.16.

Выберем начало координат в центре  $O$  большого шара (рис. 1.15) и проведем в произвольную точку  $A$  полости радиус-вектор  $\mathbf{r}$ . Центр полости  $O'$

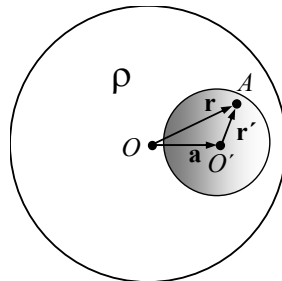


Рис. 1.15. К вычислению напряженности поля  $E$  в сферической полости внутри заряженного шара (задача 1.3.17)

определим радиус-вектором  $\mathbf{a}$ . Соединим  $O'$  с точкой  $A$  вектором  $\mathbf{r}'$ . Из построения ясно, что  $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}'$ .

Согласно результатам задачи 1.3.16 имеем в точке  $A$ :

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{a}.$$

Таким образом, поле внутри полости однородно.

**Ответ:**  $\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{a}.$

**Задача 1.3.18.** Две длинные параллельные нити равномерно заряжены с одинаковой линейной плотностью заряда  $\tau$ . Найти максимальное значение модуля напряженности поля в плоскости симметрии этой системы. Расстояние между нитями  $d$ .

### Решение

Плоскость симметрии системы параллельна нитям и отстоит от каждой из них на расстояние  $d/2$ . Напряженность поля, создаваемая каждой нитью, вычислена в базовой задаче 1.3.12: она направлена радиально от нити, а модуль ее равен

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r},$$

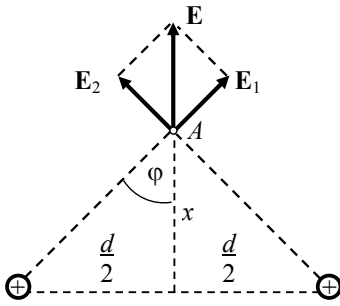


Рис. 1.16. К вычислению напряженности поля от двух заряженных нитей (задача 1.3.18)

где  $r$  – расстояние от нити до произвольной точки  $A$ , расположенной в плоскости симметрии. Пусть точка  $A$  находится на расстоянии  $x$  от линии, проведенной через две нити перпендикулярно плоскости симметрии (на рис. 1.16 показана плоскость, перпендикулярная к нитям).

Используя принцип суперпозиции, определим напряженность поля  $\mathbf{E}$  в

точке  $A$ . Из рисунка видно, что

$$E = 2E_1 \cos\varphi = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0} \frac{x}{r^2} = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0} \frac{x}{x^2 + (d/2)^2},$$

где  $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ . Максимальное значение  $E$  находим из условия

$$\frac{dE}{dx} = 0, \text{ откуда } x = \frac{d}{2} \text{ и } E_{\max} = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0 d}.$$

**Ответ:**  $E_{\max} = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0 d}.$

**Задача 1.3.19.** В сфере, заряженной равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , вырезано круглое отверстие, малое по сравнению с радиусом сферы. Найти напряженность поля в центре этого отверстия.

**Решение**

Ввиду малых размеров отверстия можно считать, что вырезанная часть сферы эквивалентна диску малого радиуса. Согласно принципу суперпозиции поле в центре отверстия можно представить как сумму поля сплошной сферы и поля, созданного диском, равным отверстию и заряженным с поверхностной плотностью  $(-\sigma)$ .

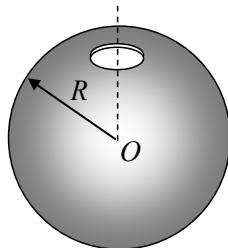


Рис.1.17. Заряженная сфера с вырезанным малым отверстием (задача 1.3.19)

Напряженность поля вблизи поверхности сплошной сферы равна  $E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  (см. базовую задачу 1.3.15).

Напряженность поля вблизи центра диска определена в базовой задаче 1.3.6. Она направлена противоположно полю сплошной сферы и по величине равна  $E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . В итоге радиальная напряжен-

ность поля в центре отверстия  $E_r = E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$

**Ответ:**  $E_r = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$

**Задачи типа 1.4**

*Определение напряженности поля непрерывного **неравномерного** распределения заряда, когда плотность распределения заряда выражается какой либо функцией координат*

**Метод решения.** В общем виде методика решения задач этого типа та же, что и при решении задач типа 1.2 и, если распределение заряда обладает элементами симметрии, задач типа 1.3. Отличие заключается в том, что выражения для плотностей зарядов  $\rho$ ,  $\sigma$  и  $\tau$  не константы, а заданы определенными функциями координат, что приводит к некоторому усложнению интегралов, определяющих проекции напряженности поля в заданной точке.

**Задача 1.3.20.** Сфера радиуса  $r$  заряжена с поверхностной плотностью заряда  $\sigma = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{a}$  – постоянный вектор,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки сферы относительно её центра (рис. 1.18). Найти напряженность электрического поля в центре сферы.

### Решение

Выберем за ось  $Z$  вертикаль, проведенную через центр сферы параллельно вектору  $\mathbf{a}$ , а начало координат поместим в центр сферы. В этом случае поверхностная плотность заряда будет распределена по закону

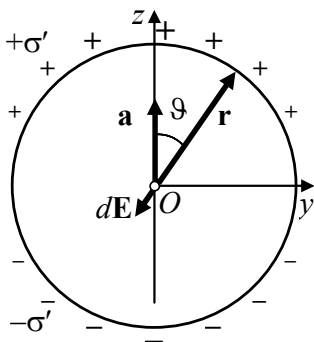


Рис. 1.18. К определению напряженности поля в центре сферы с неравномерно распределённым поверхностным зарядом (задача 1.3.20)

$$\sigma(\vartheta) = ar \cos \vartheta,$$

где  $\vartheta$  – полярный угол точки наблюдения.

Заряд элементарной площадки сферы с площадью

$$dS = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

будет равен

$$dq = \sigma dS = ar^3 \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

где  $\varphi$  – азимутальный угол. Напряженность поля от этого заряда в центре сферы равна

$$d\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq \mathbf{r}}{r^2 r^2},$$

а ее модуль

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} ar \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Проекции  $d\mathbf{E}$  на ось  $Z$  и на перпендикулярное направление  $y$  соответственно равны

$$dE_z = -dE \cos \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{ar}{2\epsilon_0} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta \, d\vartheta \quad \text{и}$$

$$dE_y = -dE \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{ar}{2\epsilon_0} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta .$$

Интегрирование по углу  $\vartheta$  соответственно дает

$$E_z = -\frac{ar}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = -\frac{ar}{3\epsilon_0} \text{ и } E_y = -\frac{ar}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \sin^2 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = 0 .$$

Вспоминая, что ось  $Z$  направлена вдоль вектора  $\mathbf{a}$ , можно ответ написать в векторном виде  $\mathbf{E} = -\frac{r}{3\epsilon_0} \mathbf{a}$ .

**Ответ:**  $\mathbf{E} = -\frac{r}{3\epsilon_0} \mathbf{a}$ .

*Замечание.* Другой способ решения этой задачи предлагается ниже в задаче 1.4.11.

**Задача 1.3.21.** Тонкое кольцо радиуса  $R$  заряжено с линейной плотностью  $\tau = \tau_0 \cos\varphi$  (начало полярной системы координат в центре кольца). Найти напряженность поля в центре и в произвольной точке на оси кольца.

**Решение**

С учетом симметрии системы рассмотрим четыре участка кольца длиной  $dl = R d\varphi$  каждый, расположенных на концах двух взаимно перпендикулярных диаметров (рис. 1.19, на котором стрелками показаны напряженности

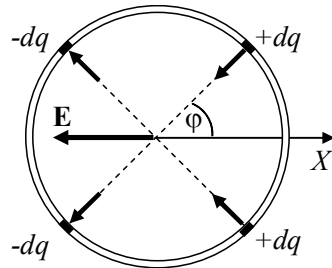


Рис. 1.19. К вычислению напряженности поля  $\mathbf{E}$  в плоскости неравномерно заряженного кольца (задача 1.3.21)

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} ,$$

создаваемые точечными зарядами  $dq = \tau dl$ , находящимися на каждом участке  $dl$ ).

Видно, что при их сложении будет отлична от нуля только проекция на ось  $X$ :

$$dE_x = -4dE_1 \cos\varphi = -\frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{\tau_0}{R} \cos^2 \varphi d\varphi = dE .$$

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до  $\pi/2$ , получим значение напряженности в центре кольца:

$$\mathbf{E} = -\frac{\tau_0}{4\epsilon_0 R} \mathbf{i},$$

(здесь учтено и направление вектора  $\mathbf{E}$ , а  $\mathbf{i}$  – орт оси  $X$ ).

В точке на оси кольца, отстоящей от плоскости кольца на расстояние  $z$ , условия симметрии те же, поэтому опять будет отлична от нуля только проекция  $\mathbf{E}$  на ось  $X$ . Но теперь (см. рис. 1.20)

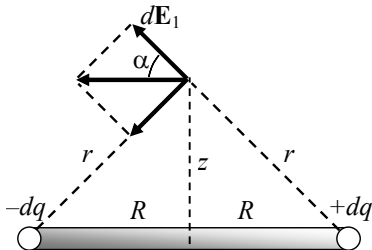


Рис. 1.20. К вычислению напряженности поля  $\mathbf{E}$  на оси неравномерно заряженного кольца (задача 1.3.21)

$$\begin{aligned} dE_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{z^2 + R^2}, \quad dE_x = -4dE_1 \cos\varphi \cos\alpha = \\ &= -4 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{z^2 + R^2} \cos\varphi \cos\alpha = -\frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{\tau_0 R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \cos^2\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Вычисляя интеграл по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $\frac{\pi}{2}$  и учитывая направление вектора  $\mathbf{E}$ , находим

**Ответ:** 
$$\mathbf{E} = -\frac{\tau_0 R^2}{4\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{i}.$$

**Задача 1.3.22.** Система состоит из шара радиуса  $R$ , заряженного равномерно, и окружающей среды, заполненной зарядом с объёмной плотностью  $\rho = \frac{\alpha}{r}$ , где  $\alpha$  – постоянная,  $r$  – расстояние до центра шара. Найти заряд шара, при котором модуль вектора напряженности электрического поля вне шара не будет зависеть от  $r$ .

### Решение

Задача обладает сферической симметрией, что позволяет воспользоваться теоремой Гаусса. Выберем в качестве поверхности

Гаусса сферу с радиусом  $r > R$ . Тогда величина заряда внутри этой поверхности будет  $Q + \Delta q$ , где  $Q$  искомый заряд шара, а  $\Delta q$  – заряд шарового слоя, равный

$$\Delta q = \int_R^r \rho 4\pi r^2 dr = 2\pi\alpha(r^2 - R^2).$$

Согласно теореме Гаусса, напряженность поля на выбранной поверхности будет

$$E = \frac{Q + \Delta q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r^2} + 2\pi\alpha - \frac{2\pi\alpha R^2}{r^2} \right)$$

Величина  $E$  не будет зависеть от  $r$ , если  $Q = 2\pi\alpha R^2$ . Напряженность поля при этом будет равна  $E_{вне} = \frac{\alpha}{2\epsilon_0}$ .

**Ответ:**  $Q = 2\pi\alpha R^2$ .

### Задачи типа 1.5

*Определение напряженности поля, в создании которого участвуют электрические диполи*

**Метод решения:** использовать определения диполя или дипольного момента системы зарядов (1.5), (1.6) и выражения для напряженности поля диполя (1.4).

**Задача 1.3.23.** Используя сферическую систему координат с ортами  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\varphi$ , начало которой совпадает с точечным электрическим диполем с моментом  $\mathbf{p}$ , найти в произвольной точке  $A$  с координатами  $(r, \varphi)$  компоненты и модуль вектора напряженности.

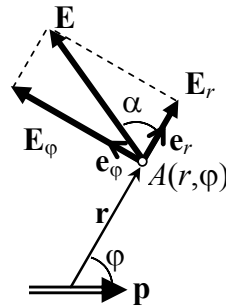


Рис.1.21. Компоненты напряженности поля диполя в сферических координатах (задача 1.3.23)

### Решение

Поместим начало координат в точку нахождения диполя и направим полярную ось  $\varphi = 0$  вдоль вектора  $\mathbf{p}$  (рис. 1.21). Используем для расчета формулу (1.4) теоретического введения, отсчитывая угол  $\varphi$  от направления вектора  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right].$$

Поскольку в выбранной системе координат

$$\mathbf{p}\mathbf{r} = pr \cos\varphi, \quad \mathbf{p}\mathbf{e}_r = p \cos\varphi, \quad \mathbf{p}\mathbf{e}_\varphi = -p \sin\varphi, \quad \mathbf{r}\mathbf{e}_\varphi = 0,$$

находим из (1.4):

$$E_r = \frac{p \cos\varphi}{2\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\varphi = \frac{p \sin\varphi}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\varphi^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2\varphi + 1}.$$

Отсюда  $\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r + E_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ . Вектор  $\mathbf{E}$  составляет с направлением  $\mathbf{r}$  угол

$\alpha$ , такой, что  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi$ .

$$\text{Ответ: } E_r = \frac{p \cos\varphi}{2\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\varphi = \frac{p \sin\varphi}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2\varphi + 1}.$$

**Задача 1.3.24.** Два точечных диполя с одинаковыми по величине дипольными моментами  $p$  находятся на расстоянии  $R$  друг от друга и ориентированы взаимно перпендикулярно. Найти величину напряженности поля в точке  $O$ , расположенной посередине между диполями. Вектор момента  $\mathbf{p}_1$  одного из диполей направлен под углом  $\vartheta$  относительно прямой, соединяющей диполи (рис. 1.22а).

### Решение

Используем решение и обозначения задачи 1.3.23. Для первого диполя угол  $\varphi_1$  между векторами  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{r}_1$  равен  $\varphi_1 = 2\pi - \vartheta$  (см. рис. 1.22б), поэтому для проекций напряженности на оси сферической системы координат получаем

$$E_{r1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_1 \cos\vartheta}{r_1^3}, \quad E_{\varphi1} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_1 \sin\vartheta}{r_1^3}.$$

Знак « $\leftarrow$ » в  $E_{\varphi1}$  показывает, что эта компонента направлена проти-

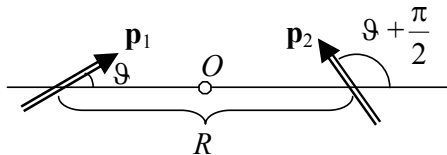


Рис. 1.22а. Система двух взаимно перпендикулярных диполей (задача 1.3.24)



воположно орту  $\mathbf{e}_{\varphi_1}$  (см. рис. 1.22б).

Аналогично для второго диполя имеем ( $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ ):

$$E_{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_2 \sin \vartheta}{r_2^3},$$

$$E_{\varphi_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_2 \cos \vartheta}{r_2^3}.$$

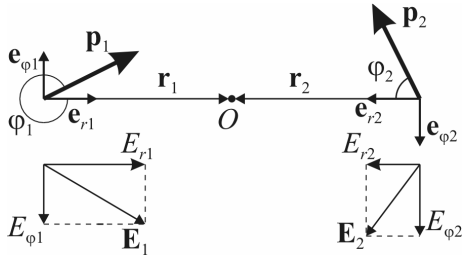


Рис.1.22б. Напряженности полей  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ , создаваемые диполями  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  в точке  $O$  (задача 1.3.24)

Так как направления векторов  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  не зависят от выбранной системы координат, то используя принцип суперпозиции в точке  $O$  ( $r_1 = r_2 = r = R/2$ ) и учитывая, что  $p_1 = p_2 = p$ , имеем:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2p \cos \vartheta}{r^3} - \frac{2p \sin \vartheta}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{16p}{R^3} (\cos \vartheta - \sin \vartheta),$$

$$E_\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{p \cos \vartheta}{r^3} + \frac{p \sin \vartheta}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8p}{R^3} (\cos \vartheta + \sin \vartheta),$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\varphi^2} = \frac{2p}{\pi\epsilon_0 R^3} \sqrt{5 - 6 \cos \vartheta \sin \vartheta}.$$

**Ответ:**  $E = \frac{2p}{\pi\epsilon_0 R^3} \sqrt{5 - 6 \cos \vartheta \sin \vartheta}.$

**Замечание.** При фиксированном  $R$  максимальное значение модуля напряженности  $E_{\max}$  соответствует углу  $\vartheta = 3\pi/4$  или  $7\pi/4$ . Минимальное значение  $E_{\min}$  соответствует  $\vartheta = \pi/4$  или  $5\pi/4$ . При этом  $E_{\min} = 2\sqrt{2} \frac{p}{\pi\epsilon_0 R^3}$ , а  $E_{\max}$  вдвое больше.

**Задача 1.3.25.** В каких точках на расстоянии  $R$  от точечного диполя с моментом  $\mathbf{p}$  величина напряженности электростатического поля будет иметь максимальное и минимальное значение?

**Решение**

Выберем систему координат так, чтобы диполь находился в начале координат, а вектор  $\mathbf{p}$  был параллелен оси  $Y$  (рис. 1.23).

Из формулы (1.4)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right],$$

определяющей поле диполя, следует, что при постоянном значении  $R$  величина напряженности  $E$  будет определяться значением полярного угла  $\vartheta$ , и во всех точках круга, полученного в результате сечения сферы с радиусом  $R$  плоскостью  $y = \text{const}$ , будет иметь постоянное значение. При этом величина  $E$  определяется разностью двух векторов, один из которых направлен по радиусу, а второй параллельно  $\mathbf{p}$ .

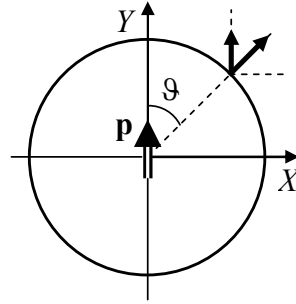


Рис.1.23. Декартова система координат для изучения поля диполя (задача 1.3.25)

Найдем проекции этой разности на координатные оси:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p}{R^3} \cos \vartheta \sin \vartheta$$

и

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3p \cos^2 \vartheta}{R^3} - \frac{p}{R^3} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{R^3} (3\cos^2 \vartheta - 1).$$

В результате  $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{R^3} \sqrt{3\cos^2 \vartheta + 1}$ .

Разумеется, эту формулу можно было сразу взять из решения задачи 1.3.23, где она была получена в полярных координатах.

Анализ функции  $f(\vartheta) = 3\cos^2 \vartheta + 1$  на экстремум показывает, что  $E_{\max} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 R^3}$  при  $\vartheta = 0, \pi$ ;  $E_{\min} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3}$  при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ .

**Ответ:**  $E_{\max} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 R^3}$  при  $\vartheta = 0, \pi$ ;

$$E_{\min} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} \text{ при } \vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}.$$

**Задача 1.3.26.** Точечный электрический диполь с моментом  $p = 10^{-12}$  Кл·м равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  относительно оси, перпендикулярной вектору момента диполя и проходящей через его центр. Найти мгновенное значение напряженности электрического поля в точке  $M$ , лежащей в плоскости вращения диполя на расстоянии  $x_0 = 2$  см от него в момент  $t = T/6$ , где  $T$  – период вращения. Угол поворота  $\varphi$  отсчитывается от направления от диполя на точку  $M$ . В начальный момент ( $t = 0$ ) положить  $\varphi = 0$ .

**Решение**

В задаче 1.3.23 получена общая формула для вычисления модуля напряженности при заданном полярном угле  $\varphi$ . Здесь надо применить эту формулу в точке  $r = 2$  см в момент времени  $t = T/6$ , когда  $\varphi = \omega T = \pi/3$ . Остается только подставить все известные численные значения и получить численный ответ:  $E = \frac{9\sqrt{13}}{16} 10^3$  В/м.

**Ответ:**  $E = \frac{9\sqrt{13}}{16} 10^3$  В/м.

*Замечание.* Приведенное решение, использующее формулы электростатики для нахождения переменного электрического поля от вращающегося диполя, асимптотически справедливо только на малых расстояниях  $r$  от диполя, удовлетворяющих условию  $r \ll c/\omega$ , где  $c$  – скорость света (электромагнитной волны). В общем случае надо учитывать излучение электромагнитных волн вращающимся диполем [1, §61; 2, §99].

**Задача 1.3.27.** Пластины плоского конденсатора, имеющие вид тонких дисков, заряжены зарядами  $+q$  и  $(-q)$  соответственно. Расстояние между пластинами  $l$  много меньше размеров самих пластин. В дипольном приближении найти величину напряженности электрического поля на расстоянии  $r$  от конденсатора, много большем его размеров. Распределение заряда на пластинах считать равномерным.

**Решение**

Поскольку полный заряд системы равен нулю, дипольный момент можно считать относительно любой точки, в качестве которой удобно взять центр нижней пластины. Ввиду симметрии системы относительно оси  $Z$  (см. рис.1.24) вектор дипольного момента  $\mathbf{p}$  будет иметь только  $z$ -компоненту  $p_z$ . Найдем ее.

Учитывая, что при постоянной плотности заряда  $\sigma$  заряд малого участка пластины пропорционален его площади  $dq = \sigma dS$ , из (1.6) находим

$$p = p_z = \int z dq(\mathbf{r}) = \int_S z \sigma dS = l\sigma \int_S dS = l\sigma S = ql.$$

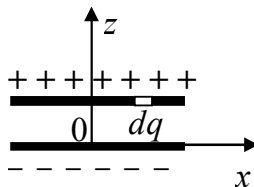


Рис. 1.24. Заряженный плоский конденсатор (задача 1.3.27)

Интегрирование проводится только по верхней пластине, поскольку на нижней  $z = 0$ .

Таким образом, плоский аксиально-симметричный заряженный конденсатор на больших расстояниях от него эквивалентен диполю с моментом  $p = ql$ . Напряженность поля диполя в произвольной точке с полярными координатами  $(r, \varphi)$  была найдена в задаче 1.3.23, откуда получаем

$$E(r, \varphi) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2 \varphi + 1} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2 \varphi + 1},$$

где угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $Z$ . На больших расстояниях от конденсатора создаваемое им электрическое поле близко к полю точечного диполя и убывает по закону  $E(r) \sim \frac{1}{r^3}$ .

**Ответ:**  $E(r, \varphi) = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2 \varphi + 1}.$

### Задачи типа 1.6

*Решение обратной задачи электростатики: по заданному значению напряженности электрического поля определить распределение зарядов, породившее это поле*

Если напряженность поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  известна во всем пространстве, то распределение заряда, создающего это поле, находится по формуле (1.11). Вычисление дивергенции выполняется по формуле (1.8). Для систем, обладающих сферической симметрией, используется выражение дивергенции в сферических координатах, в котором остается лишь одно слагаемое

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r), \quad (1.15)$$

где  $A_r$  – проекция вектора  $\mathbf{A}$  на радиальное направление. В более сложных случаях следует взять из справочника по математике полное выражение дивергенции в сферических или цилиндрических координатах.

**Задача 1.3.28.** Заряженный шар радиуса  $R$  создает в пространстве поле, равное  $E = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r \left(1 - \frac{3r}{4R}\right)$  внутри шара ( $r < R$ ) и  $E = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$  снаружи (при  $r > R$ ). По какому закону распределен заряд внутри шара?

**Решение**

Поле обладает сферической симметрией, поэтому используем формулу (1.15). Выполняя дифференцирование, находим

$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{r}{R}\right)$  внутри шара и  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  во внешней области. Зна-

чит, объемная плотность заряда внутри шара равна  $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ , а снаружи  $\rho = 0$ .

**Ответ:**  $\rho_{\text{внутри}} = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ ,  $\rho_{\text{вне}} = 0$ .

**Задача 1.3.29.** С какой объемной плотностью  $\rho$  следует распределить электрический заряд в шаре, чтобы поле внутри него было везде направлено вдоль радиуса и имело одинаковую величину  $E$ ?

**Решение**

Система сферически симметрична, поэтому используем формулу (1.15). Напряженность в произвольной точке внутри шара запишем в векторном виде:  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}$ , где  $\mathbf{e}$  – единичный вектор, направленный вдоль радиуса. Из (1.15) находим:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} E \frac{\partial}{\partial r} r^2 = \frac{2E}{r}.$$

Отсюда получаем ответ:  $\rho = 2\varepsilon_0 E/r$ . Из физических соображений ясно, что создать такое поле невозможно (в центре шара объемная плотность заряда должна быть бесконечно большой). Отме-

тим, что при этом полный заряд внутри любой малой сферы радиуса  $r$ , выделенной вокруг центра шара, будет конечным и равным  $q(r) = 4\pi\epsilon_0 E r^2$ , т.е. будет стремиться к нулю с уменьшением радиуса выбранной сферы.

**Ответ:**  $\rho = \frac{2\epsilon_0 E}{r}$ .

### §1.4. Задачи для самостоятельного решения

**1.4.1.** Два положительных заряда  $q_1$  и  $q_2$  находятся в точках с радиус-векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Найти величину отрицательного заряда  $q_3$  и радиус-вектор  $\mathbf{r}_3$  точки, в которую его необходимо поместить, чтобы сила, действующая на каждый из этих трех зарядов, была равна нулю.

**Ответ:**  $q_3 = -\frac{q_1 q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}$ ,  $\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 \sqrt{q_2} + \mathbf{r}_2 \sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}$ .

**1.4.2.** Три одинаковых одноименных заряда  $q$  расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд  $Q$  противоположного знака нужно поместить в центр этого треугольника, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю?

**Ответ:**  $Q = \frac{q}{\sqrt{3}}$ .

**1.4.3.** Тонкая непроводящая палочка длиной  $L = 0,08$  м равномерно заряжена так, что её полный заряд равен  $q = 3,5 \cdot 10^{-7}$  Кл. Какой точечный заряд  $Q$  нужно поместить на расстоянии  $d = 0,06$  м от середины палочки на её продолжении, чтобы на него действовала сила  $F = 0,12$  Н?

**Ответ:**  $Q = F \frac{4\pi\epsilon_0}{q} \left( d^2 - \frac{L^2}{4} \right) \approx 7,6 \cdot 10^{-8}$  Кл.

**1.4.4.** Тонкое полукольцо радиуса  $R = 20$  см заряжено равномерно зарядом  $q = 0,7$  нКл. Найти модуль вектора напряженности электрического поля в центре кривизны этого полукольца.

**Ответ:**  $E = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2} = 100$  В/м.

**1.4.5.** Точечный заряд  $q$  находится в центре тонкого кольца радиуса  $R$ , по которому равномерно распределен заряд  $(-q)$ . Найти модуль вектора напряженности электрического поля на оси кольца в точке, отстоящей от центра кольца на расстоянии  $x \gg R$ .

**Ответ:** 
$$E = \frac{3qR^2}{8\pi\epsilon_0 x^4}.$$

**1.4.6.** Система состоит из тонкого заряженного проводящего кольца радиуса  $R$  и очень длинной нити, равномерно заряженной с линейной плотностью  $\tau$ , расположенной на оси кольца так, что один из её концов совпадает с центром кольца. Кольцо имеет заряд  $q$ . Найти силу взаимодействия кольца и нити.

**Ответ:** 
$$F = \frac{\tau q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

**1.4.7.** Из равномерно заряженной плоскости вырезали круг радиуса  $R$  и сдвинули его перпендикулярно плоскости на расстояние  $L$ . Найти напряженность электрического поля в точке, находящейся на оси выреза посередине между кругом и плоскостью. Поверхностная плотность заряда на круге и плоскости одинаковая и равна  $\sigma$ .

**Ответ:** 
$$E\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{2L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}} - 1 \right).$$

**1.4.8.** Два длинных тонких провода расположенных параллельно на расстоянии  $d$  друг от друга, равномерно заряжены с линейной плотностью  $+\tau$  и  $(-\tau)$  соответственно. Определить напряженность электрического поля в точке, лежащей в плоскости симметрии на расстоянии  $h$  от плоскости, в которой лежат провода.

**Ответ:** 
$$E = \frac{2\tau d}{\pi\epsilon_0 (4h^2 + d^2)}.$$

**1.4.9.** Шар радиуса  $R$  сферически симметрично заряжен по объему зарядом  $Q$  так, что  $\rho(r) \sim r^2$ . Определить напряженность электрического поля в точках  $A$  и  $B$ , если  $r_A = 0,5R$ , а  $r_B = 2R$ .

**Ответ:** 
$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{8R^2}; \quad E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{4R^2}.$$

**1.4.10.** Имеются два сферических распределения зарядов с объёмными плотностями заряда  $+\rho$  и  $-\rho$  с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$ ,

сдвинутых относительно друг друга на вектор  $\mathbf{a}$ , такой, что  $a < |O_1O_2| < R$ ), где  $R$  – радиус сфер. Найти напряженность электрического поля в пространстве перекрытия зарядов.

**Ответ:** 
$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{a}.$$

**1.4.11.** Поверхностная плотность заряда на сфере радиуса  $R$  зависит от полярного угла  $\vartheta$  как  $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$ , где  $\sigma_0$  – положительная постоянная. Показать, что такое распределение заряда можно представить как результат малого сдвига друг относительно друга двух равномерно заряженных шаров радиуса  $R$ , заряды которых равны по модулю и противоположны по знаку. Воспользовавшись этим представлением, найти вектор напряженности электрического поля внутри данной сферы.

**Ответ:** 
$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \mathbf{k},$$
 где  $\mathbf{k}$  – орт оси  $Z$ , от которой отсчитывается угол  $\vartheta$ . Поле внутри данной сферы однородно.

**1.4.12.** Найти вектор напряженности электрического поля в центре шара радиуса  $R$ , объёмная плотность заряда которого  $\rho = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{a}$  – постоянный вектор, а  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, проведенный из центра шара.

**Ответ:** 
$$\mathbf{E} = -\frac{R^2}{6\epsilon_0} \mathbf{a}.$$

**1.4.13.** Шар радиуса  $R$  имеет положительный заряд, объёмная плотность которого зависит от расстояния  $r$  до его центра по закону

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right), \text{ где } \rho_0 - \text{постоянная. Найти:}$$

а) модуль вектора напряженности электрического поля внутри и вне шара как функцию расстояния  $r$ ;

б) максимальное значение напряженности электрического поля  $E_{\max}$  и соответствующее ему расстояние  $r_m$ .

**Ответ:** а) 
$$E = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{4R}\right) \text{ при } r < R, \quad E = \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 r^2} \text{ при } r > R;$$



$$\text{б) } E_{\max} = \frac{\rho_0 R}{9\epsilon_0} \text{ при } r=r_m = \frac{2}{3}R.$$

**1.4.14.** Пространство заполнено электрическим зарядом с объёмной плотностью  $\rho = \rho_0 e^{-\alpha r^3}$ , где  $\rho_0$  и  $\alpha$  – положительные константы, а  $r$  – расстояние от центра данной системы. Найти модуль напряженности электрического поля как функцию  $r$ .

$$\text{Ответ: } E = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 \alpha r^2} (1 - e^{-\alpha r^3}).$$

**1.4.15.** Поле создано двумя равномерно заряженными концентрическими сферами с радиусами  $R_1 = 5$  см и  $R_2 = 8$  см. Заряды сфер соответственно равны  $q_1 = 2$  нКл и  $q_2 = -1$  нКл. Определить напряженность электрического поля в точках, лежащих от центра сфер на расстоянии: 1)  $r_1 = 3$  см; 2)  $r_2 = 6$  см; 3)  $r_3 = 10$  см.

$$\text{Ответ: } E_1 = 0; E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_2^2} = 5 \text{ кВ/м}; E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r_3^2} = 0,9 \text{ кВ/м}.$$

**1.4.16.** Пространство между двумя концентрическими сферами с  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) заряжено с объёмной плотностью заряда  $\rho = \frac{\alpha}{r^2}$ . Найти напряженность электрического поля во всём пространстве.

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } E &= 0 && \text{при } r < R_1; \\ E &= \frac{\alpha}{\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{R_1}{r}\right) \mathbf{r} && \text{при } R_1 < r < R_2; \\ E &= \frac{\alpha}{\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{r^3} \mathbf{r} && \text{при } r > R_2. \end{aligned}$$

**1.4.17.** Бесконечно длинная цилиндрическая поверхность круглого сечения заряжена неравномерно с поверхностной плотностью  $\sigma = \sigma_0 \cos\varphi$ , где  $\varphi$  – угол цилиндрической системы координат, отсчитываемый от заданного радиуса (оси  $X$ ) в плоскости перпендикулярного сечения цилиндра (рис. 1.25). Найти модуль и направление вектора напряженности электрического поля на оси цилиндра  $Z$ .

*Указание*

*Способ 1.* Выделить на поверхности цилиндра узкие полосы, параллельные оси  $Z$ , на которых плотность заряда будет постоянна (см. рис. 1.25). Для нахождения электрического поля, создаваемого такой полосой на оси цилиндра, воспользоваться результатом базовой задачи 1.3.3, где была найдена напряженность поля от бесконечного линейного заряда.

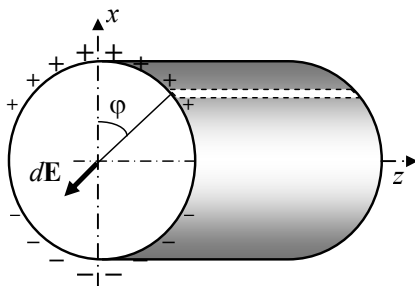


Рис. 1.25. Цилиндрическая поверхность с неравномерно распределенным зарядом (задача 1.4.17)

*Способ 2.* Показать, что заданное распределение заряда можно представить как результат малого сдвига по оси  $X$  относительно друг друга двух равномерно заряженных цилиндров одного радиуса, плотности зарядов которых равны по модулю и противоположны по знаку. Воспользовавшись этим представлением, найти вектор напряженности электрического поля внутри области пересечения цилиндров, воспользовавшись результатами задач 1.3.13 и 1.3.14.

**Ответ:** 
$$E_x = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}.$$

**1.4.18.** Точечный диполь с электрическим моментом  $\mathbf{p}$ , ориентированный в положительном направлении оси  $Z$ , находится в начале координат.

Для точки  $S$ , отстоящей от диполя на расстояние  $r$ , найти проекцию вектора напряженности электрического поля  $E_z$  и проекцию  $E_{\perp}$  на плоскость, перпендикулярную оси  $Z$ . В каких точках  $\mathbf{E} \perp \mathbf{p}$  ?

**Ответ:** 
$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{r^3}, \quad E_{\perp} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\sin\vartheta\cos\vartheta}{r^3};$$

$\mathbf{E} \perp \mathbf{p}$  в точках, лежащих на поверхности конуса с осью вдоль  $Z$  и углом полураствора  $\vartheta$ , для которого  $\cos\vartheta = 1/\sqrt{3}$  ( $\vartheta_1 = 54,7^\circ$ ), в

этих точках 
$$E = E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p\sqrt{2}}{r^3}.$$

**1.4.19.** В центре полукольца радиуса  $R$  находится точечный заряд  $-q$ . Полукольцо имеет полный заряд  $+q$ , распределенный по закону  $\tau(\vartheta) \sim \cos\vartheta$ , где  $\tau$  – линейная плотность заряда,  $\vartheta$  – угол между радиусом-вектором рассматриваемой точки и осью симметрии системы  $Z$  (рис. 1.26). В дипольном приближении найти напряженность электрического поля на оси  $Z$  на расстоянии  $z$  от системы ( $z \gg R$ ).

**Ответ:** 
$$E(z) = \frac{1}{8} \frac{qR}{\varepsilon_0 z^3}.$$

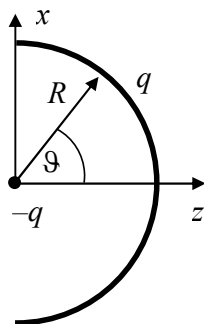


Рис.1.26. Система из точечного заряда и неравномерно заряженного полукольца (задача 1.4.19)

### Литература к главе 1

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. –М.: Оникс 21 век, 2005, §§ 1-3, 5-7, 12,13.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. –М.: Физматлит, 2006, §§ 1 – 9.
3. Калашиников С.Г. Электричество. –М.: Физматлит, 2003. §§ 8-15.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Физматлит, 2003, §§ 1- 4, 13.

## Глава 2

РАБОТА СИЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ.  
ПОТЕНЦИАЛ

## §2.1 Теоретический материал

**Работа сил электростатического поля** при перемещении точечного заряда  $q$  из точки 1 в точку 2 определяется линейным интегралом

$$A_{12} = \int_{(L_{12})} q(\mathbf{E}d\mathbf{l}), \quad (2.1)$$

где  $L_{12}$  – траектория движения заряда,  $d\mathbf{l}$  – бесконечно малое перемещение вдоль траектории. Если контур замкнутый, то для интеграла используется символ  $\oint$ ; в этом случае предполагается, что выбрано направление обхода контура.

**Электростатическое поле потенциально:** при перемещении точечного заряда по любому замкнутому контуру работа равна нулю. При произвольном перемещении заряда из точки 1 в точку 2 работа не зависит от траектории, а определяется только положением начальной и конечной точек 1 и 2. Благодаря этому работу поля можно представить в виде

$$A_{12} = q [\varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2)], \quad (2.2)$$

где **скалярная функция  $\varphi(\mathbf{r})$  называется электростатическим потенциалом.** Эта функция непрерывна во всем пространстве и имеет конечные первые производные.

**Потенциал является энергетической характеристикой электростатического поля,** его можно определить через потенциальную энергию  $W(\mathbf{r})$  пробного заряда  $q$  в электростатическом поле

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{W(\mathbf{r})}{q}.$$

Потенциал в точке  $\mathbf{r}$  численно равен потенциальной энергии единичного положительного точечного заряда, находящегося в этой точке.

**Физический смысл имеет только разность потенциалов двух точек,** поэтому потенциал, как и потенциальная энергия, оп-

ределен с точностью до произвольной постоянной, связанной с выбором начала его отсчета.

**Нормировка потенциала** – придание однозначности потенциалу путем приписывания ему определенного значения в какой-либо точке. Обычно используют один из двух наиболее удобных способов нормировки:

1) если заряды занимают ограниченную область пространства, то принимают равным нулю значение потенциала в бесконечно удаленной точке;

2) если проводящее тело каким-то образом соединено с Землей (заземление), то его потенциал равен потенциалу Земли (потенциал Земли можно положить равным нулю).

В модельных задачах, где заряды занимают бесконечные области (например, бесконечная заряженная плоскость, нить, цилиндр и т.д.), выбор нулевой точки потенциала произволен и определяется соображениями симметрии и удобством записи результата.

**Потенциал поля точечного заряда  $q$**  равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (2.3)$$

где  $r$  – расстояние от заряда  $q$  до точки наблюдения (потенциал в точке, бесконечно удаленной от заряда принимается равным нулю).

**Потенциал поля системы точечных зарядов** равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в рассматриваемой точке каждым из зарядов (принцип суперпозиции для потенциалов).

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad (2.4)$$

где  $r_i$  – расстояние от точки, в которой вычисляется потенциал, до  $i$ -ого заряда.

**Потенциал поля точечного диполя** равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.5)$$

(начало координат взято в точке нахождения диполя).

**Потенциал поля непрерывного распределения зарядов:** если все заряды расположены в конечной области пространства и потенциал нормирован на нуль в бесконечности, то

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{r}'$  – радиус-вектор заряда  $dq$ ,  $\mathbf{r}$  – вектор, проведенный из точки, в которой вычисляется потенциал, до заряда  $dq(\mathbf{r}')$  в бесконечно малой окрестности точки  $\mathbf{r}'$ . Интегрирование производится по всем объемам, содержащим распределенные с плотностью  $\rho$  заряды ( $dq(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}')dV$ ), по всем поверхностям, несущим поверхностные заряды  $\sigma$  ( $dq(\mathbf{r}') = \sigma(\mathbf{r}')dS$ ), и по всем линиям, на которых находятся распределенные с линейной плотностью  $\tau$  заряды ( $dq(\mathbf{r}') = \tau(\mathbf{r}')dl$ ).

**Циркуляцией произвольного вектора  $\mathbf{A}$**  по замкнутому контуру  $L$  называется линейный интеграл

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (2.7)$$

**Ротором вектора  $\mathbf{A}$**  называется вектор, проекция которого на положительное направление нормали  $\mathbf{n}$  равна пределу отношения циркуляции вектора  $\mathbf{A}$  по физически бесконечно малому контуру  $L$  к площади  $\Delta S$ , ограниченной этим контуром

$$\text{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} \quad (2.8)$$

Положительное направление нормали  $\mathbf{n}$  согласуется с направлением обхода контура  $L$  правилом правого винта.

В декартовой системе координат с осями  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  ротор можно представить в виде векторного произведения:

$$\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \quad (2.9)$$

где символический дифференциальный векторный оператор  $\nabla$  (набла) определен в §1.1. главы 1. В декартовых координатах он имеет вид:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

**Формула Стокса:** циркуляция вектора  $\mathbf{A}$  по произвольному контуру  $L$  равна потоку ротора вектора  $\mathbf{A}$  через любую поверхность, опирающуюся на контур  $L$ :

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \oint_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S}. \quad (2.10)$$

Теорема о циркуляции вектора  $\mathbf{E}$  (интегральная формулировка потенциальности электростатического поля): в любом электростатическом поле циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  по любому замкнутому контуру  $L$  равна нулю

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0. \quad (2.11)$$

Дифференциальная формулировка потенциальности электростатического поля: в любом электростатическом поле в любой точке

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (2.12)$$

**Градиентом скалярной функции  $\varphi$**  называется вектор

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2.13)$$

Этот вектор направлен перпендикулярно к поверхности  $\varphi = \text{const}$  в сторону возрастания  $\varphi$ , а его модуль равен производной от функции  $\varphi$  по этому направлению.

**Два полезных математических тождества:**

$$\text{div rot } \mathbf{A} \equiv 0 \quad \text{для любой векторной функции } \mathbf{A}(\mathbf{r}); \quad (2.14)$$

$$\text{rot grad } \varphi \equiv 0 \quad \text{для любой скалярной функции } \varphi(\mathbf{r}). \quad (2.15)$$

**Эквипотенциальная поверхность** – поверхность, на которой потенциал остается постоянным. Линии напряженности поля перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям и направлены в сторону убывания потенциала.

**Связь потенциала с напряженностью поля**

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (2.16)$$

Обратная операция – нахождение разности потенциалов  $\Delta\varphi_{21}$  из заданной напряженности поля

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E} d\mathbf{l}, \quad (2.17)$$

где интегрирование идет по любой траектории, соединяющей точки 1 и 2.

### Дифференциальное уравнение для потенциала (уравнение Пуассона)

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (2.18)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа. В декартовой системе координат оператор Лапласа является суммой вторых производных по всем координатам:

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.19)$$

В сферической системе координат  $(r, \vartheta, \varphi)$  оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right). \quad (2.20)$$

В областях, где заряды отсутствуют, уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (2.21)$$

## §2.2. Основные типы задач (классификация)

2.1. Определение потенциала или разности потенциалов поля заданного распределения зарядов. Вычисление работы по перемещению заряда в поле заданной системы зарядов.

2.2. Обратная задача: найти распределение зарядов, создающих заданные значения потенциала или разности потенциалов.

2.3. Определение потенциала или разности потенциалов, если задана или легко вычисляется напряженность поля, и обратная задача: найти напряженность поля, если известно распределение потенциала или задана разность потенциалов.

2.4. Построение картины силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для заданной системы неподвижных зарядов.

## §2.3. Методы решения и примеры решения задач

Так же, как в главе 1, из анализа условий задачи следует определить, к какому типу относится данная задача. Следует уяснить, какими свойствами симметрии обладает изучаемая система зарядов



и полей. В соответствии с этими сведениями надо выбрать наиболее удобную для расчетов систему координат. После того как решение получено, следует обязательно проверить его размерность, соответствие результата различных предельных случаев ожидаемым или ранее полученным результатам, а также рассмотреть физическую картину при различных значениях параметров системы.

### Задачи типа 2.1

*Определение потенциала или разности потенциалов поля заданного распределения зарядов*

**Метод решения** – прямое суммирование потенциалов в заданной точке от точечных зарядов (2.3), диполей (2.5) и непрерывно распределенных зарядов (2.6). Этот метод универсален, т.е. применим к любому распределению зарядов. Однако, в случае симметричной системы зарядов (как в задачах типа 1.2.3 главы 1), когда с помощью теоремы Гаусса легко выполняется вычисление напряженности поля  $\mathbf{E}$ , можно свести задачу к типу 2.2.3 и найти потенциал из известной напряженности поля (2.17). Такой подход часто позволяет существенно упростить расчеты.

**Если заряды распределены в конечной области пространства, то в дальнейшем (если не оговорено другое условие) будем полагать равным нулю значение потенциала в бесконечно удаленной точке.**

Потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  – скалярная функция, поэтому суммирование выполняется **алгебраически**, что значительно упрощает расчет по сравнению с вычислением напряженности поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , когда вклады от разных зарядов складываются **векторно**.

Наиболее общий подход состоит в использовании уравнения Пуассона (или уравнения Лапласа). При этом учитываются условия непрерывности потенциала, граничные условия и условия нормировки. Однако решение дифференциального уравнения второго порядка в частных производных является достаточно сложной задачей и в курсе общей физики практически не используется. Отдельные примеры применения этого метода можно найти в некоторых учебниках (см., например, [1], § 15). Другое дело – использование уравнения Пуассона для решения обратной задачи. Если задано распределение потенциала, то, вычисляя его вторые производные по координатам, можно с помощью уравнения Пуассона найти распределение заряда во всем пространстве.

**Задача 2.3.1 (базовая задача).** Найти потенциал поля, создаваемого равномерно заряженной с линейной плотностью  $\tau$  нитью длины  $2L$ .

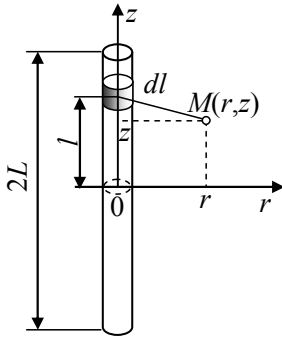


Рис. 2.1. К нахождению потенциала поля, создаваемого заряженной нитью (задача 2.3.1)

### Решение

Поместим начало координат в центре нити и направим ось  $Z$  вдоль нити. Система зарядов аксиально симметрична, поэтому для расчетов выберем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ , в которой потенциал в произвольной точке  $M$  зависит только от переменных  $r$  и  $z$  (рис.2.1, для наглядности нить показана в виде тонкого цилиндра). Выделяем на нити на расстоянии  $l$  от центра бесконечно малую область с зарядом  $dq = \tau dl$ , который можно считать

точечным. Его расстояние до точки  $M(r, z)$  равно  $\sqrt{r^2 + (l - z)^2}$ , а создаваемый им потенциал определяется формулой (2.3):

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dl}{\sqrt{r^2 + (l - z)^2}}.$$

Потенциал, создаваемый всей нитью, равен

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dl}{\sqrt{r^2 + (l - z)^2}} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{z + L + \sqrt{r^2 + (z + L)^2}}{z - L + \sqrt{r^2 + (z - L)^2}} \right|. \quad (2.22)$$

*Анализ результата и дополнительные выводы.*

1. При удалении на очень большое расстояние ( $z \rightarrow \infty$  или  $r \rightarrow \infty$ ) система выглядит как точечный заряд. Если в полученном результате сделать предельный переход  $z \rightarrow \infty$  или  $r \rightarrow \infty$ , то должен получиться потенциал точечного заряда. Выполним такой предельный переход.

Если ввести переменную  $R = \sqrt{z^2 + r^2}$ , то любой из упомянутых двух предельных переходов выполняется, если  $R \rightarrow \infty$ . Тогда при очень больших значениях  $R$  ( $R \gg L$ ) имеем:

$$\sqrt{r^2 + (z \pm L)^2} \approx R \pm \frac{zL}{R},$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{z+L+R+\frac{zL}{R}}{z-L+R-\frac{zL}{R}} &= \ln \left( \frac{1+\frac{L+\frac{zL}{R}}{R+z}}{1-\frac{L-\frac{zL}{R}}{R+z}} \right) = \ln \left( 1+\frac{L+\frac{zL}{R}}{R+z} \right) - \ln \left( 1-\frac{L-\frac{zL}{R}}{R+z} \right) \approx \\ &\approx \frac{L+\frac{zL}{R}}{R+z} - \frac{-L-\frac{zL}{R}}{R+z} = \frac{2L+2\frac{zL}{R}}{R+z} = \frac{2L}{R}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что на больших расстояниях от нити потенциал приближенно равен потенциалу поля точечного заряда

$$\varphi \approx \frac{2L\tau}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

где  $q = 2L\tau$  — полный заряд нити.

2. Если  $L \rightarrow \infty$ , то потенциал стремится к бесконечности. Потенциал остается ограниченной функцией, если только все заряды сосредоточены в области конечных размеров, а здесь заряды имеются в бесконечно удаленной области. В этом случае непосредственный физический смысл имеет только разность потенциалов в любых двух точках. В случае бесконечной нити разность потенциалов находим из (2.22) для точек 1 и 2, удаленных от оси нити на расстояния  $r$  и  $R$  ( $r < R$ )

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi(r) - \varphi(R) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R}. \quad (2.23)$$

Поясним сказанное расчетом. При  $L \rightarrow \infty$  потенциал не зависит от  $z$  и в (2.22) можно положить  $z = 0$ . Кроме того,  $r \ll L$  и

$$\sqrt{L^2 + r^2} \approx L \left( 1 + \frac{r^2}{2L^2} \right), \quad \frac{L + \sqrt{L^2 + r^2}}{-L + \sqrt{L^2 + r^2}} \approx 1 + \frac{4L}{r^2}.$$

Из (2.22) находим:

$$\begin{aligned} \varphi(r) - \varphi(R) &\approx \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( 1 + \frac{4L}{r^2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{4L}{R^2} \right) \right] \approx \\ &\approx \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R^2}{r^2} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R}. \end{aligned}$$

В случае бесконечной нити задачу можно отнести к типу 2.2.3. В главе 1 получено выражение для напряженности поля бесконечной равномерно заряженной нити:  $E = E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$ . Согласно (2.17)

$$\varphi(r) - \varphi(R) = - \int_R^r E dr = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R},$$

что совпадает с (2.23).

3. Компоненты напряженности поля можно найти из (2.22), вычисляя градиент потенциала, т.е. используя (2.16). Ввиду аксиальной симметрии системы, целесообразно расчет выполнить в цилиндрических координатах, где  $E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ ,  $E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ . Проекция  $E_\varphi$  в нашем случае равна нулю. Этот расчет мы предоставляем сделать читателю. Результат будет полезно сравнить с полученным выше в задаче 1.3.3.

**Ответ:** 
$$\varphi(r, z) = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{z + L + \sqrt{r^2 + (z + L)^2}}{z - L + \sqrt{r^2 + (z - L)^2}} \right|.$$

**Задача 2.3.2 (базовая задача).** На тонком кольце радиуса  $R$  распределен по произвольному закону заряд  $q$ . Определить потенциал поля в точке  $A$ , расположенной на оси кольца на расстоянии  $h$  от его плоскости.

**Решение**

Потенциал бесконечно удаленной точки будем считать равным нулю. На кольце выделим дугу бесконечно малой длины  $dl$ . Заряд  $dq$  этого участка рассматриваем как точечный. В точке наблюдения  $A$  он создает потенциал  $d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$ , где  $r = \sqrt{R^2 + h^2}$ . Суммирование всех таких вкладов при любом распределении заряда на

кольце дает ответ:  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + h^2}}$ . В частности, в центре кольца

$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$ . Эти результаты можно было сразу записать без всяких

вычислений, так как все части распределенного заряда находятся на одном и том же расстоянии от центра кольца.

**Ответ:** 
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

**Задача 2.3.3 (базовая задача).** Тонкий диск радиуса  $R$  заряжен равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Определить потенциал поля в точке  $A$ , расположенной на оси диска на расстоянии  $h$  от его плоскости.

**Решение**

Учитывая условия цилиндрической симметрии распределения заряда, выделим на диске кольцевую область между окружностями радиусов  $r$  и  $r + dr$ . Находящийся на ней заряд  $dq = \sigma 2\pi r dr$  создает в точке наблюдения  $A$  потенциал  $d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{l}$ , где  $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ .

Искомый потенциал есть сумма всех таких вкладов:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + h^2} - h).$$

**Ответ:** 
$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + h^2} - h).$$

*Анализ результата и дополнительные выводы.*

1. В центре диска  $h = 0$  и потенциал равен  $\frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$ .

2. На большом расстоянии от плоскости диска (при  $R \ll h$ ) имеем при разложении по малой величине  $\frac{R}{h}$  в первом порядке:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\pi R^2}{h} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{h}.$$

Это означает, что с ростом  $h$  потенциал становится все ближе к потенциалу точечного заряда, равного заряду диска и расположенному в центре диска.

3. Вблизи плоскости диска (при  $h \ll R$ ) при разложении по малой величине  $\frac{h}{R}$  в первом порядке имеем  $\varphi = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{R}\right)$ .

4. При  $R/h \rightarrow \infty$  мы ожидаем получить потенциал бесконечной заряженной плоскости (т.е. линейно зависящий от расстояния  $h$  до

плоскости). Однако такому предельному переходу препятствует наша нормировка потенциала, приемлемая только для заряда, распределенного в конечной области пространства. В этом случае за нуль потенциала следует принять его значение в какой-либо произвольной точке, не лежащей в бесконечности. Если положить  $\varphi = 0$  при  $h = 0$ , то получим закон изменения потенциала в однородном поле, соответствующем полю бесконечной заряженной плоскости. Вопрос о нормировке не возникает, если требуется вычислить разность потенциалов в двух точках, отстоящих от плоскости на расстояния  $h_1$  и  $h_2$ . В этом случае независимо от нормировки имеем  $\Delta\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(h_1 - h_2)$ , что и соответствует однородному полю от бесконечной заряженной плоскости (см. задачу 1.3.8, главы 1).

**Задача 2.3.4.** Найти потенциал  $\varphi$  на краю тонкого диска радиуса  $R$ , по которому равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ .

### Решение

Поиск подхода к решению приводит к выводу, что наиболее целесообразно использовать полярную систему координат  $(r, \alpha)$ , начало которой расположено в точке  $A$ , а угол  $\alpha$  отсчитывать от диаметра, проходящего через точку  $A$  (рис. 2.2). Элемент площади в этой системе равен  $dS = r dr d\alpha$ . На нем находится заряд  $dq = \sigma dS$ , который создает в точке  $A$  потенциал

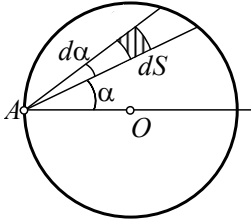


Рис. 2.2. К нахождению потенциала поля на краю заряженного диска (задача 2.3.4)

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} dr d\alpha. \text{ Интегрируя}$$

это выражение по  $r$  в пределах от нуля до  $r = 2R \cos\alpha$ , найдем вклад в потенциал от всех точек диска, находящихся внутри угла  $d\alpha$ . Интегрируя затем по углу  $\alpha$  в пределах от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ , найдем потенциал точки  $A$ :  $\varphi = \frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$ .

Потенциал в точке на краю диска в  $\pi/2$  раз, т.е. приблизительно в полтора раза, меньше потенциала в центре диска. Это и понятно: потенциал в центре диска равен работе внешних сил по пере-

мещению единичного заряда из бесконечности в центр диска. При смещении заряда из центра диска к его краю работу совершает само поле, и потенциальная энергия заряда уменьшается.

**Ответ:** 
$$\varphi = \frac{\sigma R}{\pi \epsilon_0}.$$

**Задача 2.3.5.** Два коаксиальных кольца одинакового радиуса  $R$  заряжены равномерно зарядами  $q_1$  и  $q_2$ . Плоскости колец находятся на расстоянии  $h$  друг от друга. Найти потенциал в произвольной точке  $A$  на оси колец.

**Решение**

Из симметрии задачи следует, что начало координат  $O$  следует поместить в средней точке между кольцами, а ось  $x$  направить вдоль оси колец (рис. 2.3).

Точка  $A$  с координатой  $x$  отстоит от плоскости верхнего кольца на расстояние  $x_1 = x - h/2$ , а от нижнего кольца – на  $x_2 = x + h/2$ . Каждое кольцо создает в точке  $A$  потенциал, вычисленный в базовой задаче 2.3.2:

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{\sqrt{R^2 + x_i^2}}, \text{ где } i = 1, 2.$$

Согласно принципу суперпозиции  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ . Отсюда получается ответ.

**Ответ:** 
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{R^2 + (x - h/2)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{R^2 + (x + h/2)^2}} \right).$$

*Анализ результата и дополнительные выводы*

1. Если  $q_1 = q_2$ , то функция  $\varphi(x)$  четная и распределение потенциала симметрично. В точке  $O$  потенциал равен удвоенному потенциалу от одного кольца.

Если  $q_1 = -q_2$ , то функция  $\varphi(x)$  нечетная, график ее имеет вид антисимметричной функции, а в точке  $O$  имеем  $\varphi = 0$ .

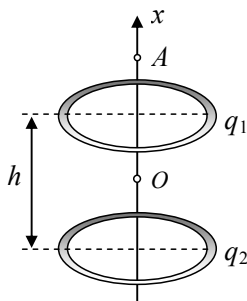


Рис. 2.3. К нахождению потенциала электростатического поля на оси двух заряженных коаксиальных колец (задача 2.3.5)

2. При большом удалении от колец, когда  $x \gg h$ ,  $R$  ( $x > 0$ ), имеем при разложении в первом порядке по малым значениям  $h/x$  и  $R/x$ :

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + (x + h/2)^2}} \approx \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{h}{2x} \right) \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 + q_2}{x} + \frac{(q_1 - q_2)h}{2x^2} \right).$$

Первое слагаемое является потенциалом точечного заряда, равного полному заряду системы  $q_1 + q_2$ , расположенного в центре между кольцами, второе – потенциал точечного диполя, расположенного в той же точке, с вектором дипольного момента, направленным вдоль оси  $x$  и равным по величине  $p = \frac{h}{2}(q_1 - q_2)$ . Радиус колец слабо влияет на поле, давая поправку только второго порядка малости. В случае  $q_1 = q_2$  поле системы двух колец видится с большого расстояния как поле точечного заряда  $2q$ , а дипольное слагаемое (т.е. слагаемое второго порядка малости) отсутствует. В случае  $q_1 = -q_2$  система электронейтральна и с большого расстояния выглядит как диполь с моментом  $p = qh$ , ориентированным вдоль оси  $x$ .

3. Если кольца расположены очень близко друг к другу ( $h \ll R$ ), то в области между кольцами  $x \ll R$ . В этой области при  $q_1 = q_2 = q$  потенциал поля на оси  $\varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$  сохраняется постоянным

в линейном приближении по малым параметрам  $x/R$  и  $h/R$ . Поправки к постоянному потенциалу существуют только за счет слагаемых второго порядка малости. Поле в этой области будет очень слабым, напряженность его будет близка к нулю. При  $q_1 = -q_2 = q$  имеем в низшем порядке по малым параметрам  $x/R$  и  $h/R$ :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qxh}{R^3}. \quad \text{Линейная зависимость потенциала от координаты}$$

говорит о том, что поле в этом случае однородное. Величина напряженности поля невелика, так как определяется малым параметром  $h/R$ .



## Задачи типа 2.2

*Обратная задача: найти распределение зарядов, создающих заданные значения потенциала или разности потенциалов.*

**Метод решения** – прямое применение уравнения Пуассона (2.18). Следует использовать запись оператора Лапласа в системе координат, наиболее подходящей из условий симметрии. Если в условии задачи задана разность потенциалов, то можно использовать формулу (2.16) и условия симметрии, чтобы определить распределение напряженности поля и потенциала во всем пространстве.

**Задача 2.3.6.** Потенциал поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния до его центра как  $\varphi = ar^2 + b$ , где  $a$  и  $b$  – постоянные. Найти распределение объемного заряда  $\rho(r)$  внутри шара.

### Решение

Это пример обратной задачи. Из сферической симметрии системы следует, что оператор Лапласа надо записать в сферических координатах – тогда остается зависимость только от одной переменной  $r$ :  $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r}$ . Выполняя дифференцирование, находим  $\Delta\varphi = 6a$ . Из уравнения Пуассона следует ответ:  $\rho = -6a\epsilon_0$ .

**Ответ:**  $\rho = -6a\epsilon_0$ .

*Замечание 1.* Задачу можно также легко решить в декартовых координатах, если в заданное выражение для  $\varphi(r)$  подставить  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  и воспользоваться выражением (2.19) для оператора Лапласа в декартовых координатах.

*Замечание 2.* Каков смысл постоянных  $a$  и  $b$ ? Величина  $a$  определяет объёмную плотность заряда  $\rho$  и отличается от неё только численным множителем. Объёмная плотность  $\rho$  заряда внутри шара постоянна. При положительном заряде коэффициент  $a$  отрицателен, что соответствует убыванию потенциала в направлении от центра шара к его поверхности. Параметр  $b$  равен значению потенциала в центре шара. Его величину можно найти из условия непрерывности потенциала при  $r = R$ :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} = aR^2 + b,$$

откуда  $b = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$ . Величина  $b$  зависит от плотности распределения заряда и от радиуса шара.

**Задача 2.3.7.** В бесконечном слое толщиной  $d$  находится равномерно распределенный объемный заряд. Разность потенциалов между границами слоя постоянна и равна  $\Delta\varphi \neq 0$ . При каком значении объемной плотности  $\rho$  заряда напряженность поля вблизи одной из границ будет равна нулю? Какова будет при этом напряженность поля у другой границы?

### Решение

Поскольку распределение заряда симметрично относительно центральной плоскости слоя, то создаваемый полем этого заряда потенциал одинаков на обеих поверхностях слоя. Таким образом, сам распределенный в плоском слое заряд не может создать разность потенциалов на своих границах (см. базовую задачу 2.3.8). Следовательно, должно присутствовать внешнее однородное поле в направлении нормали к слою, напряженность которого можно представить в виде  $E_0 = \Delta\varphi/d$ . Напряженность поля вблизи одной из границ будет равна нулю, если это внешнее поле равно по величине полю, создаваемому на этой пластине распределенным зарядом, и противоположно ему направлено. На границе слоя напряженность поля от распределенного заряда равна  $E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$  (см. задачу 1.3.11, глава 1). Из равенства  $E = E_0$  находим  $\rho = 2\varepsilon_0\Delta\varphi/d^2$ . На второй границе внешнее поле направлено одинаково с полем распределенного заряда. Поэтому напряженность поля вблизи второй границы равна  $2\Delta\varphi/d$ .

**Ответ:**  $\rho = \frac{2\varepsilon_0\Delta\varphi}{d^2}$ .

### Задачи типа 2.3

*Определение потенциала или разности потенциалов, если задана или легко вычисляется напряженность поля, и решение обратных задач*

**Метод решения.** Если напряженность поля известна (или легко вычисляется) и при этом зависит лишь от одной координаты, целесообразно для вычисления потенциала (и разности потенциалов) использовать связь потенциала с напряженностью поля (2.16). Например, для поля, зависящего от одной декартовой координаты  $x$  из

(2.16) находим:  $E(x) = -\frac{d\varphi}{dx}$ . Интегрируя это уравнение, получаем

$\varphi(x)$ . Те же соображения работают и в случае сферических или цилиндрических координат. При интегрировании появятся произвольные постоянные, которые надо доопределить с помощью нормировки потенциала и условия его непрерывности.

Представленные в данном разделе задачи в основном являются базовыми. Их решения будут неоднократно использоваться в дальнейшем.

**Задача 2.3.8 (базовая задача).** Бесконечный плоский слой толщиной  $2h$  равномерно заряжен по объему с плотностью  $\rho > 0$ . Найти потенциал поля в произвольной точке.

### Решение

В задаче 1.3.11 (гл. 1) было получено значение напряженности поля от такого слоя: если начало координат поместить в центральной плоскости слоя и отсчитывать координату  $x$  вдоль нормали к плоскости слоя, то внутри слоя ( $x \leq h$ ) поле растет по линейному закону  $E = \frac{\rho}{\epsilon_0} x$ , а вне слоя ( $x \geq h$ ) поле однородно и равно  $E = \frac{\rho h}{\epsilon_0}$ .

Из условий симметрии ясно, что достаточно рассмотреть только область  $x > 0$ , а решение для области  $x < 0$  легко записать из полученного результата.

Используя (2.16), находим  $d\varphi = -E dx$ , откуда для области  $x \leq h$  получаем

$$\varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + C_1;$$

аналогично для  $x \geq h$  имеем

$$\varphi(x) = -\frac{\rho h x}{\epsilon_0} + C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные, появляющиеся при интегрировании.

Поскольку слой имеет бесконечные размеры, нельзя положить равным нулю потенциал в бесконечно удаленной точке. Наиболее естественный способ нормировки потенциала в данной системе – положить  $\varphi = 0$  в любой точке средней плоскости слоя, где  $x = 0$ . Сразу находим, что при такой нормировке  $C_1 = 0$ . Постоянную  $C_2$  определим теперь из условия непрерывности потенциала на границе слоя. Имеем при  $x = h$ :

$$-\frac{\rho h^2}{\varepsilon_0} + C_2 = -\frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0}$$

откуда  $C_2 = \frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0}$ . Итак, внутри слоя потенциал убывает по квадра-

тичному закону  $\varphi(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2$ , а снаружи – по линейному

$\varphi(x) = -\frac{\rho h}{2\varepsilon_0}(2x - h)$ . Убывание потенциала связано с тем, что при

удалении пробного положительного заряда от центральной плоскости слоя поле совершает положительную работу и потенциальная энергия заряда уменьшается.

Ввиду плоской симметрии системы распределение потенциала при  $x < 0$  найдем, заменяя в полученных формулах  $x$  на  $|x|$ . Если уменьшать толщину слоя до нуля, сохраняя его заряд, то в результате получим плоскость, заряженную равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma = 2\rho h$ , создающую в пространстве потенциал

$\varphi(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x = -\frac{\rho h}{\varepsilon_0}x$ , соответствующий однородному полю

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

**Ответ:** 1)  $|x| < h$ :  $\varphi(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2$ ,

2)  $|x| \geq h$ :  $\varphi(x) = -\frac{\rho h}{2\varepsilon_0}(2|x| - h)$ .

**Задача 2.3.9.** Шар радиуса  $R$  равномерно заряжен с объемной плотностью  $\rho$ . Найти значение потенциала в произвольной точке.

**Решение**

Из симметрии системы следует, что для решения целесообразно выбрать сферическую систему координат. Напряженность поля равномерно заряженного шара вычислена в задаче **1.3.16** (глава 1):

внутри шара  $E_{\text{внутри}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$ , вне шара  $E_{\text{вне}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$ , где  $q$  – пол-

ный заряд шара, равный  $(4/3)\pi R^3 \rho$ . Напряженность поля зависит только от одной координаты  $r$ . В этом случае из (2.16) находим

$E(r) = -\frac{d\varphi}{dr}$  и, интегрируя это уравнение, получаем

$$\varphi_{\text{внутри}}(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C_1, \quad \varphi_{\text{вне}}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} + C_2.$$

В нашем случае заряды сосредоточены в ограниченной области пространства, поэтому можно положить равным нулю потенциал бесконечно удаленной точки. Тогда  $C_2 = 0$ , а постоянная  $C_1$  определяется из условия непрерывности потенциала при  $r = R$ :

$$-\frac{\rho}{6\varepsilon_0} R^2 + C_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R},$$

откуда  $C_1 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$ . Физический смысл константы  $C_1$  – это потенциал

в центре шара при нашей нормировке. Итак, внутри шара потенциал убывает по квадратичному закону  $\varphi_{\text{внутри}}(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (3R^2 - r^2)$ , а

снаружи – как потенциал точечного заряда  $q$ , расположенного в центре шара.

Если, сохраняя заряд  $q$  и его симметричное распределение, перенести его весь на поверхность шара, то напряженность поля и потенциал во внешней области не изменятся. Потенциал любой точки на

поверхности останется равным  $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R}$ . Но во внутренней области

теперь поле отсутствует, работа по перемещению пробного заряда с поверхности шара в его центр не совершается и потенциал в любой точке внутри получившейся заряженной сферы будет одним и тем же – потенциалом поверхности сферы.

**Ответ:** 1)  $r < R$ :  $\varphi_{\text{внутри}}(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3R^2 - r^2)$ ;

2)  $r > R$ :  $\varphi_{\text{вне}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ .

**Задача 2.3.10.** Шаровой слой между сферами радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) заряжен с плотностью  $\rho = a/r^2$ . Найти потенциал поля в произвольной точке.

**Решение**

Распределение заряда сферически симметрично (рис.2.4), поэтому поле во внешней области совпадает с полем точечного заряда, равного полному заряду слоя  $q$  и расположенного в центре сфер.

Полный заряд слоя  $R_1 < r < R_2$  найдем, суммируя заряды бесконечно тонких слоев с внутренним радиусом  $r$  и внешним  $r + dr$ . Учитывая, что заряд такого слоя  $dq = \rho dV = \rho 4\pi r^2 dr = 4\pi a dr$  и вычисляя интеграл по  $r$  в пределах от  $R_1$  до  $R_2$ , получаем:

$$q = 4\pi a \int_{R_1}^{R_2} dr = 4\pi a(R_2 - R_1).$$

Нормируя потенциал на нуль в бесконечности, находим потенциал в области  $r \geq R_2$ :

$$\varphi_3(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{a}{\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{r}.$$

Отсюда потенциал сферы радиуса

$$R_2 \text{ будет равен } \varphi(R_2) = \frac{a}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right).$$

Электрическое поле **внутри слоя**  $E_2(r)$  определяется суммарным зарядом, находящимся внутри сферы радиуса  $r$ . Этот заряд равен

$$q(r) = 4\pi a \int_{R_1}^r dr = 4\pi a(r - R_1).$$

По теореме Гаусса создаваемая им напряженность поля

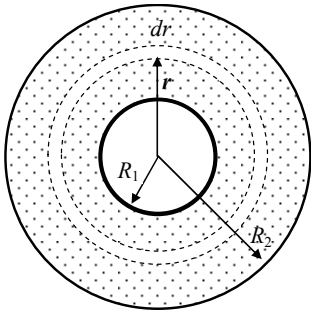


Рис. 2.4. Шаровой слой со сферически симметричным распределением заряда (задача 2.3.10)

$$E_2(r) = \frac{q(r)}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{a}{\varepsilon_0 r} \left(1 - \frac{R_1}{r}\right).$$

Потенциал внутри слоя  $\varphi_2(r)$  находим по (2.17):

$$\begin{aligned} \varphi_2(r) &= \varphi(R_2) - \int_{R_2}^r E_2(r) dr = \\ &= \frac{a}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{a}{\varepsilon_0} \int_{R_2}^r \frac{1}{r} \left(1 - \frac{R_1}{r}\right) dr = \frac{a}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{R_1}{r} - \ln \frac{r}{R_2}\right). \end{aligned}$$

Внутри сферы радиуса  $R_1$  зарядов нет, поэтому напряженность поля внутри нее равна нулю, а потенциал постоянен и равен его значению на сфере  $R_1$ :

$$\varphi(r < R_1) = \varphi_2(R_1) = \frac{a}{\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

**Ответ:**

- 1)  $\varphi_1 = \frac{a}{\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$  при  $r \leq R_1$ ,
- 2)  $\varphi_2 = \frac{a}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{R_1}{r} + \ln \frac{R_2}{r}\right)$  при  $R_1 \leq r \leq R_2$ ,
- 3)  $\varphi_3(r) = \frac{a}{\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{r}$  при  $r \geq R_2$ .

**Задача 2.3.11.** Бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса  $R$  равномерно заряжен с объемной плотностью заряда  $\rho$ . Найти потенциал в произвольной точке пространства, считая, что потенциал на поверхности цилиндра равен нулю.

### Решение

Напряженность поля такого цилиндра была определена в главе 1 (базовая задача 1.3.13). Ввиду цилиндрической симметрии системы целесообразно использовать для решения цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , у которой ось  $Z$  направлена по оси цилиндра, а начало координат расположено в произвольной точке на оси цилиндра. Учитывая, что на поверхности цилиндра потенциал, согласно условию, равен нулю, можно применить формулу (2.17), которая в нашем случае примет вид:

$$\varphi(r) - \varphi(R) = \varphi(r) = - \int_R^r E dr = \int_r^R E dr .$$

Учитывая, что **внутри цилиндра** (при  $r \leq R$ )  $E_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$ , находим

потенциал в этой области:

$$\varphi_1(r) = \int_r^R \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r dr = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} (R^2 - r^2) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

где  $\tau = \pi R^2 \rho$  – заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра.

**Вне цилиндра** (при  $r \geq R$ )  $E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$  и для потенциала в этой

области имеем

$$\varphi_2(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \int_r^R \frac{dr}{r} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{R}{r} = - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R} .$$

Внутри цилиндра потенциал убывает по квадратичному закону, а снаружи – как логарифм расстояния от оси цилиндра.

Сохраняя цилиндрическую симметрию, перенесем весь заряд на поверхность цилиндра, сохраняя линейную плотность заряда  $\tau = \pi R^2 \rho$ . Внутри заряженной цилиндрической поверхности заряда нет и напряженность поля равна нулю. Значит, потенциал во внутренней области равен нулю (при нормировке потенциала, указанной в условии). Потенциал вне цилиндра опять, как и прежде, будет

$$\text{равен } \varphi_2(r) = - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R} .$$

Если уменьшать радиус цилиндрической поверхности, то в пределе она превратится в бесконечную прямую нить, заряженную с постоянной линейной плотностью  $\tau$ . Из-за неопределенности значения  $\ln(r/R)$  при  $r \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow 0$  нельзя полагать равным нулю значение потенциала на нити. Поэтому для нормировки потенциала придется использовать какое-либо другое условие, т.е. положить равным нулю значение потенциала в произвольно выбранной точке. Отметим, что физический смысл имеет только разность потенциалов. Например, в точках, удаленных от нити на заданные расстоя-



ния  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ), а такая разность потенциалов равна  $\Delta\varphi_{12} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$  и от нормировки не зависит.

$$\text{Ответ: } \varphi_1 = \frac{\rho}{4\epsilon_0} (R^2 - r^2) \quad \text{при } r \leq R;$$

$$\varphi_2 = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} \quad \text{при } r \geq R.$$

### Задачи типа 2.4

*Построение картины силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для заданной системы неподвижных зарядов*

**Метод решения.** Обычно рассматриваются достаточно простые конфигурации, когда условия симметрии в достаточной мере определяют характер силовых линий и эквипотенциальных поверхностей. Хорошо, если задача сводится к построению плоской картины. Иногда из общих соображений удается сделать вывод о расположении поверхностей, на которых потенциал равен нулю, иногда приходится выполнить расчет для получения уравнения эквипотенциальной поверхности. Силовые линии должны начинаться на положительных зарядах (или приходить из бесконечности) и заканчиваться на отрицательных зарядах (или уходить на бесконечность). Принимаем во внимание, что вблизи точечных зарядов силовые линии расходятся радиально и равномерно. Во всех точках следим, чтобы силовые линии и эквипотенциальные поверхности были взаимно перпендикулярными. Силовые линии нигде не должны пересекаться друг с другом. Густота линий тем больше, чем больше напряженность поля в данной области. Вблизи точечного заряда эквипотенциальные поверхности будут сферами (на плоскости – окружностями). Если заряды расположены в ограниченной области, то на больших расстояниях от них эквипотенциальные поверхности также будут сферами.

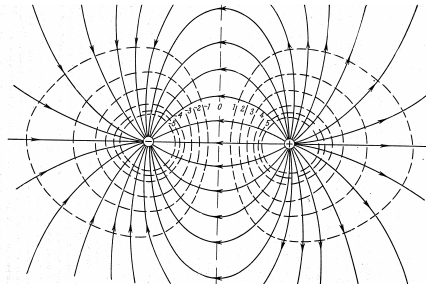
**Задача 2.3.12.** Начертить схему силовых линий электрического поля и эквипотенциальных поверхностей для системы двух точеч-

ных зарядов  $+q$  и  $-q$ , находящихся на некотором расстоянии  $d$  друг от друга.

### Решение

Потенциал любой точки плоскости, относительно которой заряды расположены симметрично, равен нулю, так как любая такая точка равноудалена от зарядов  $+q$  и  $-q$ . Значит, силовые линии вблизи этой плоскости нулевого потенциала направлены по нормали к ней. Напряженность поля в точках этой плоскости убывает по мере удаления точек от зарядов.

Поэтому густота линий будет максимальной вблизи силовой линии, соединяющей заряды. Схематически картина силовых линий (сплошные линии) и сечения эквипотенциальных поверхностей (пунктир) представлена на *рис. 2.5*.



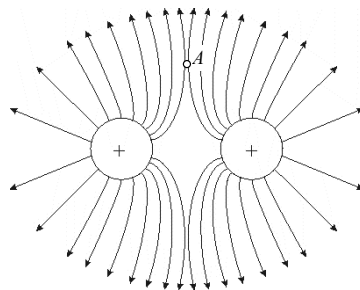
*Рис. 2.5.* Силовые линии и эквипотенциальные поверхности системы из двух одинаковых по величине и противоположных по знаку зарядов (задача 2.3.12)

**Задача 2.3.13.** Проанализировать картину силовых линий электрического поля и эквипотенциальных поверхностей для системы двух одинаковых положительных зарядов, находящихся на некотором расстоянии друг от друга.

### Решение

Из соображений симметрии ясно, что силовые линии не могут пересекать плоскость симметрии данной системы зарядов. Следовательно, приближаясь к этой плоскости, силовые линии должны изгибаться, сближаясь, и затем расходиться, уходя на бесконечность. С удалением от зарядов картина силовых линий приближается к таковой для точечного заряда величиной  $2q$ .

Модуль напряженности поля равен нулю как в центре симметрии системы, так и в бесконечности, и



*Рис. 2.6.* Силовые линии системы из двух одинаковых положительных зарядов (задача 2.3.13)

не меняет знака при удалении от центральной точки. Это означает, что в некоторой промежуточной точке плоскости величина напряженности достигает максимума, и именно там густота линий будет наибольшей. Направление на эту точку (точка  $A$  на рис. 2.6) задается углом, для которого  $\operatorname{tg} \varphi = 1/2$  ( $\varphi$  – угол, отсчитываемый от линии, проведенной через заряды). Картина силовых линий показана на рис. 2.6. Картину эквипотенциальных поверхностей легко представить, учитывая, что они в каждой точке перпендикулярны силовым линиям. На больших расстояниях от зарядов эквипотенциальные поверхности будут сферами.

**Задача 2.3.14.** Начертить схему силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для системы двух точечных зарядов  $+q$  и  $+2q$ , находящихся на расстоянии  $d$  друг от друга.

### Решение

Решение. Ввиду осевой симметрии системы достаточно рассмотреть картину силовых линий в плоскости, проходящей через заряды. Поскольку оба заряда положительные, все силовые линии начинаются на зарядах и заканчиваются на бесконечности. Отсюда ясно, что на выделенной плоскости должна существовать линия, которую силовые линии не пересекают.

Силовые линии от каждого заряда на подходе к этой разграничительной линии изгибаются и уходят на бесконечность, асимптотически приближаясь к ней. На отрезке, соединяющем заряды  $+q$  и  $+2q$  разграничительная линия проходит через точку  $A$ , в которой напряженность поля равна нулю. Точка  $A$  отстоит от заряда  $q$  на расстояние  $a = d(\sqrt{2} - 1)$ .

Около каждого заряда картина близка к картине силовых линий положительного заряда: силовые линии выходят из каждого заряда симметрично, а сечением эквипотенциальных поверхностей рассматриваемой плоскостью, являются окружности. В то же время понятно, что на очень больших расстояниях от зарядов эквипотенциальные линии вновь становятся почти ок-

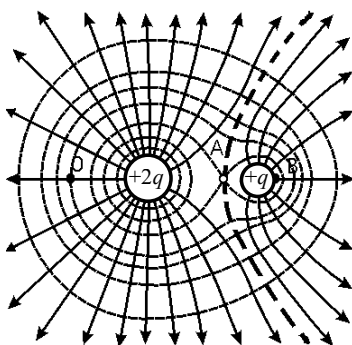


Рис. 2.7. Силовые линии и эквипотенциальные линии системы из двух неодинаковых положительных зарядов (задача 2.3.14)

ружностями. Ясно, что внутренняя часть должна отделяться от внешней части некоторой эквипотенциальной линией, проходящей через точку  $A$ . Потенциал поля в точке  $A$  равен

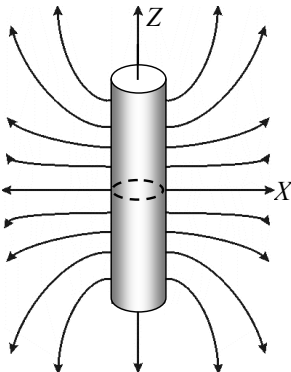
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{a} + \frac{2q}{d-a} \right).$$

На линии, соединяющей заряды  $+q$  и  $+2q$ , находим точки  $B$  и  $O$ , в которых потенциал равен потенциалу точки  $A$ . Разграничительная эквипотенциальная линия проходит через точки  $A$ ,  $B$ , и  $O$ . Общая картина изображена на *рис. 2.7*.

**Задача 2.3.15.** Начертить схему силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для тонкого равномерно заряженного стержня.

### Решение

Учитывая свойства симметрии системы, поместим начало координат в центр стержня, а ось  $Z$  направим вдоль стержня. Ясно, что достаточно рассмотреть картину в плоскости  $XZ$  при  $x > 0$  и  $z > 0$ . Все силовые линии должны начинаться на стержне и уходить в бесконечность.



*Рис. 2.8.* Силовые линии равномерно заряженного тонкого стержня (задача 2.3.15)

Силовая линия, выходящая из центра стержня, совпадает с положительной осью  $x$ , а силовая линия, выходящая из конца стержня, пойдет вдоль оси  $Z$ . На большом расстоянии от стержня эквипотенциальные линии становятся близкими к окружностям. Для анализа картины вблизи начала координат можно воспользоваться решением задачи 2.3.1. Общая картина силовых линий схематически представлена на *рис. 2.8*. Поведение эквипотенциальных поверхностей

легко представить, учитывая, что они в каждой точке перпендикулярны силовым линиям.

**Задача 2.3.16.** Два точечных заряда  $q$  и  $-nq$  ( $n > 1$ ) расположены на расстоянии  $d$  друг от друга. Доказать, что одна из эквипотенциальных поверхностей такой системы есть сфера конечного радиуса. Определить радиус этой сферы и положение ее центра.

**Решение**

Успех в решении этой задачи во многом зависит от удачного выбора системы координат. Свяжем систему координат с положением зарядов, а именно, поместим начало координат  $O$  в точку, где находится заряд  $q$ , а ось  $x$  направим по линии, соединяющей заряды. Пусть заряд  $-nq$  находится в точке  $A$ . Ввиду осевой симметрии системы, достаточно рассмотреть картину в какой-либо плоскости, содержащей отрезок  $OA$ .

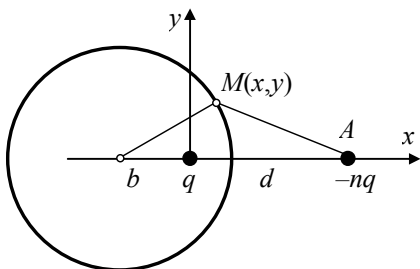


Рис.2.9. К нахождению эквипотенциальной поверхности двух точечных зарядов разного знака (задача 2.3.16)

Вычислим потенциал в произвольной точке  $M(x,y)$  этой плоскости. Задача будет решена, если показать, что вычисленный потенциал сохраняет постоянное значение на некоторой окружности, лежащей в выбранной плоскости, и определить радиус этой окружности и положение ее центра. Вычисляем потенциал в точке  $M$  (см. рис. 2.9):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{nq}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}} \right) + \text{const.}$$

Примем потенциал в точке  $M$  равным нулю. Тогда получаем уравнение

$$(n^2 - 1)y^2 + (n^2 - 1)x^2 = d^2 - 2dx.$$

Это есть уравнение окружности с центром, смещенным по оси  $x$  на расстояние  $b = -\frac{d}{n^2 - 1}$ . Записывая это уравнение через координату  $x_1 = x - b$ , получаем уравнение окружности в стандартном виде  $y^2 + x_1^2 = R^2$ , где  $R = \frac{nd}{n^2 - 1}$ .

**Ответ:**  $R = \frac{nd}{n^2 - 1}, \quad b = -\frac{d}{n^2 - 1}.$

**Задача 2.3.17.** Точечный диполь, момент которого равен  $\mathbf{p}$ , находится в однородном поле напряженности  $\mathbf{E}$ . Направление дипольного момента совпадает с направлением поля. Доказать, что

среди эквипотенциальных поверхностей есть сферическая поверхность и определить ее радиус.

### Решение

Начало координат поместим в точку расположения диполя (рис.2.10). Потенциал однородного поля относительно начала координат в произвольной точке  $\mathbf{r}$  от равен  $\varphi_1(\mathbf{r}) = -E\mathbf{r}$ . Потенциал, создаваемый диполем в этой точке (см. (2.5)), равен

$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3}$ , так что суммарный потенциал будет равен

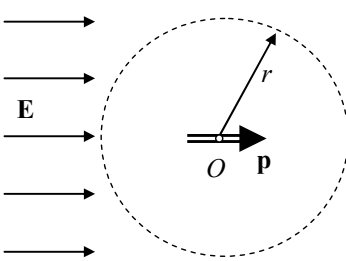


Рис. 2.10. Диполь в однородном внешнем поле (задача 2.3.17)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r}) = -E\mathbf{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3}.$$

Эквипотенциальные поверхности определяются условием  $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$ . Используя свободу с нормировкой потенциала, примем одну из них за поверхность с потенциалом, равным нулю. Для этой поверхности

$$\left(-E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right) \mathbf{r} = 0 \text{ во всех точках,}$$

что возможно, только если выражение в скобках тождественно равно нулю. Учитывая условие параллельности векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{E}$ , найдем уравнение этой поверхности:  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} = E$ . Это есть уравнение

сферы радиуса  $r = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{E}\right)^{1/3}$ .

**Ответ:**  $r = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{E}\right)^{1/3}$

## §2.4. Задачи для самостоятельного решения

**2.4.1.** Два коаксиальных тонких металлических кольца радиуса  $R$  расположены на расстоянии  $a$ , друг от друга. Заряды колец  $+q$  и  $-q$  соответственно. Найти разность потенциалов между центрами колец.

$$\text{Ответ: } \Delta\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (a/R)^2}} \right).$$

2.4.2. Найти потенциал в центре полусферы радиуса  $R$ , заряженной равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ .

$$\text{Ответ: } \varphi = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}.$$

2.4.3. Бесконечно длинная нить заряжена равномерно с линейной плотностью заряда  $\tau = 0,4$  мкКл/м. Вычислить разность потенциалов между точками 1 и 2, если точка 2 находится в  $\eta = 2$  раз дальше от нити, чем точка 1.

$$\text{Ответ: } \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \eta \approx 5 \text{ кВ.}$$

2.4.4. Три плоскости расположены параллельно друг другу на расстоянии  $h$  одна от другой. Каковы разности потенциалов между плоскостями, если на первой находится равномерно распределенный заряд с поверхностной плотностью заряда  $+\sigma_1$ , на второй  $+\sigma_2$  и на третьей  $(-\sigma_3)$ .

$$\text{Ответ: } \Delta\varphi_{12} = \frac{h}{2\varepsilon_0} (\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3), \Delta\varphi_{23} = \frac{h}{2\varepsilon_0} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

$$\Delta\varphi_{13} = \Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{23}.$$

2.4.5. Принимая Землю за шар радиуса  $R = 6400$  км, определить заряд  $Q$  Земли, если напряженность электрического поля у поверхности Земли составляет  $E = 130$  В/м. Определить потенциал  $\varphi$  поверхности Земли, принимая  $\varphi_\infty = 0$ .

$$\text{Ответ: } Q = 4\pi\varepsilon_0 R\varphi = 5,92 \cdot 10^5 \text{ Кл}; \quad \varphi = ER = 8,2 \cdot 10^8 \text{ В.}$$

2.4.6. Заряды распределены равномерно по поверхности двух концентрических сфер с радиусами  $R_1 = 10$  см и  $R_2 = 20$  см, причем поверхностные плотности электрического заряда на обеих сферах одинаковы. Найти плотность заряда  $\sigma$ , если потенциал в центре сферы равен 300 В, а на бесконечности равен нулю.

$$\text{Ответ: } \sigma = \frac{\varphi_0 \varepsilon_0}{R_1 + R_2} = 9 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2.$$

2.4.7. Две концентрические сферы с радиусами  $R$  и  $2R$  заряжены равномерно зарядами одного знака: внутренняя – одним микро-

кулоном, внешняя – двумя микрокулонами. На расстоянии  $3R$  от центра сфер потенциал  $\varphi = 9000$  В. Найти  $R$ .

**Ответ:**  $R = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{\varphi} \right) = 1$  м.

**2.4.8.** Две концентрические сферы с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) получили заряды  $Q_1$  и  $Q_2$  соответственно, которые распределились равномерно по их поверхностям. Найти потенциал на расстоянии  $r$  от центра сфер.

**Ответ:** 1)  $r \leq R_1$ ,  $\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right)$ ;

2)  $R_1 \leq r \leq R_2$ ,  $\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1}{r} \right)$ ;

3)  $r \geq R_2$ ,  $\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r}$ .

**2.4.9.** Две коаксиальные цилиндрические поверхности с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) равномерно заряжены с поверхностными плотностями заряда  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно. Вычислить напряженность электрического поля и потенциал этой системы зарядов, считая, что на оси цилиндров потенциал  $\varphi_0 = 0$ .

**Ответ:**

$r < R_1$ :  $E_0 = 0, \varphi_0 = 0$ ;

$R_1 < r < R_2$ :  $E_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma_1 R_1}{r}$ ,  $\varphi_1 = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_1 R_1 \ln \frac{r}{R_1}$ ;

$r > R_2$ :  $E_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{r}$ ,  $\varphi_2 = -\frac{1}{\epsilon_0} \left( \sigma_1 R_1 \ln \frac{r}{R_1} + \sigma_2 R_2 \ln \frac{r}{R_2} \right)$ .

**2.4.10.** Шар радиуса  $R$  заряжен по объёму зарядом  $Q$  так, что объёмная плотность заряда  $\rho \sim r^2$ , где  $r$  – расстояние от центра шара. Определить разность потенциалов  $\Delta\varphi_{AB}$  между точками  $A$  и  $B$ , если они отстоят от центра на расстояния  $r_A = 0,5R$  и  $r_B = 2R$  соответственно.

Указание: см. задачу **1.4.9**.

**Ответ:**  $\Delta\varphi_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{R^4 - r_A^4}{4R^5} + \frac{1}{R} - \frac{1}{r_B} \right] = \frac{47Q}{256\pi\epsilon_0 R}$ .



**2.4.11.** Шар радиуса  $R$  заряжен с объёмной плотностью заряда  $\rho(r) = \alpha r$  (где  $r$  – расстояние от центра шара, а  $\alpha$  – известная постоянная) и поверхностной плотностью заряда  $\sigma_0$ . Найти распределение потенциала во всём пространстве.

**Ответ:**

$$1) r \geq R: \quad \varphi_1(r) = \frac{R^2}{\varepsilon_0 r} \left( \sigma_0 + \frac{\alpha R^2}{4} \right);$$

$$2) r \leq R: \quad \varphi_2(r) = \frac{R}{\varepsilon_0} \left( \sigma_0 + \frac{\alpha R^2}{4} \right) + \frac{\alpha}{12\varepsilon_0} (R^3 - r^3).$$

**2.4.12.** Заряд с объёмной плотностью  $\rho = 3$  мкКл/м<sup>3</sup> равномерно распределен внутри сферического слоя, ограниченного сферическими поверхностями с радиусами  $R_1 = 3$  см и  $R_2 = 5$  см. Найти разность потенциалов  $\Delta\varphi_{12}$  между поверхностями слоя.

**Ответ:**  $\Delta\varphi_{12} = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} \left( 3R_1^2 - R_2^2 - \frac{2R_1^3}{R_2} \right) \approx 50$  В.

**2.4.13.** Бесконечный цилиндр радиуса  $R$  заряжен так, что объёмная плотность заряда  $\rho$  убывает по линейному закону в зависимости от  $r$ , причем  $\rho(R) = 0$ , а полный заряд на единицу длины цилиндра равен  $Q$ . Определить модуль напряженности электрического поля  $E$  в точках  $r_1 = R/3$  и  $r_2 = (3/2)R$  и разность потенциалов  $\Delta\varphi_{12}$ .

**Ответ:**

$$1) E(r_1) = \frac{7Q}{18\pi\varepsilon_0 R} \quad 2) E_2(r_2) = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0 R}$$

$$3) \Delta\varphi_{12} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \left( \ln \frac{3}{2} + \frac{56}{81} \right).$$

### Литература к главе 2

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. –М.: Оникс 21 век, 2005, §§14, 15.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. –М.: Физматлит, 2006, §§ 17 – 20.
3. Калашиников С.Г. Электричество. –М.: Физматлит, 2003, §§ 16–25, 37.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. –М.: Физматлит, 2003, §§7, 8, 11, 12, 15, 16.

## Глава 3

**ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ.  
ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ****§ 3.1. Теоретический материал**

**Проводники** – это материальные тела, в которых при наличии внешнего электрического поля возникает направленное движение зарядов, т.е. электрический ток. В проводнике электрические заряды могут перемещаться внутри тела на макроскопические расстояния (такие заряды называются **свободными**).

**Внутри проводника при электростатическом равновесии электрическое поле отсутствует ( $E = 0$ )**, следовательно и  $\operatorname{div} E = 0$ . Это означает, что в любом физически бесконечно малом объеме проводника содержится одинаковое количество положительных и отрицательных зарядов, так что суммарная объемная плотность заряда  $\rho$  равна нулю (см. (1.11) глава 1).

Если проводник заряжен или находится во внешнем электростатическом поле, то электрические заряды располагаются на его внешней поверхности и распределены с такой поверхностной плотностью  $\sigma$ , которая обеспечивает равенство нулю напряженности поля внутри проводника.

**Электростатическая индукция** – явление перераспределения зарядов на поверхности проводника при его помещении во внешнее электрическое поле. В любом статическом поле поверхностные заряды распределяются так, чтобы внутри проводника сохранялись условия  $E = 0$  и  $\rho = 0$ .

**Снаружи проводника вблизи его поверхности вектор напряженности поля  $E$  в каждой точке направлен по нормали к поверхности, а его модуль равен**

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (3.1)$$

**Весь объем проводника в условиях равновесия является одной эквипотенциальной областью** – в любой точке проводника потенциал один и тот же (он называется потенциалом проводника).

**Заземление** – соединение данного проводника с очень большим проводником, потенциал которого можно считать неизменным

при переходе заряда от него на данный проводник. В качестве такого большого проводника обычно подразумевается Земля. Обычно потенциал заземленного проводника принимается равным нулю.

**Потенциал  $\varphi$  уединенного проводника пропорционален находящемуся на нем заряду  $Q$ :**

$$Q = C\varphi. \quad (3.2)$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  между зарядом проводника и его потенциалом называется **емкостью проводника**. При изменении заряда проводника на  $\Delta Q$  его потенциал изменяется на величину

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta Q}{C}.$$

В системе единиц СИ емкость измеряется в фарадах [Ф].

**Емкость проводника зависит только от его формы и размеров (в вакууме).** В частности, емкость уединенного шара радиуса  $R$  равна  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ .

Если имеются  $N$  проводников, то потенциал каждого из них является однородной линейной функцией зарядов всех проводников, включая его самого:

$$\varphi_i(r) = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} q_j. \quad (3.3)$$

Например, для двух проводников, несущих заряды  $Q_1$  и  $Q_2$ , их потенциалы равны

$$\varphi_1 = \alpha_{11}Q_1 + \alpha_{12}Q_2 \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \alpha_{21}Q_1 + \alpha_{22}Q_2. \quad (3.4)$$

Величины  $\alpha_{ij}$  называются потенциальными коэффициентами. Они симметричны относительно своих индексов ( $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  при  $i \neq j$ ) и положительны.

Решая систему (3.3) относительно зарядов  $Q_i$ , находим

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \varphi_j. \quad (3.5)$$

**Величины  $C_{ij}$  называются емкостными коэффициентами.** Все емкостные коэффициенты с одинаковыми индексами  $i = j$  положительны; все емкостные коэффициенты с разными индексами либо отрицательны, либо равны нулю.

**Система двух любых проводников с одинаковыми по абсолютному значению, но противоположными по знаку зарядами, называется конденсатором.** В этом случае проводники называются обкладками конденсатора, а модуль заряда на обкладке называется зарядом конденсатора. **В конденсаторе все силовые линии, начинающиеся на положительно заряженной обкладке, заканчиваются на отрицательно заряженной обкладке.** В технике конденсаторы конструируются так, чтобы все электрическое поле было в максимальной степени сконцентрировано в области между обкладками, а краевые эффекты были бы минимальны. Это достигается выбором геометрии обкладок – например, это плоские пластины, или скрученные в рулон проводящие ленты, разделенные очень тонким диэлектрическим промежутком.

**Емкостью конденсатора  $C$**  называется положительная величина, коэффициент пропорциональности между величиной заряда конденсатора  $Q$  и абсолютным значением разности потенциалов между обкладками

$$Q = CU. \quad (3.6)$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора часто называют напряжением.

Если между обкладками конденсатора вакуум, то

1) **емкость плоского конденсатора** равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad (3.7)$$

где  $S$  – площадь пластин,  $d$  – расстояние между пластинами ( $d \ll \sqrt{S}$ );

2) **емкость цилиндрического конденсатора** равна

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln(r_2 / r_1)}, \quad (3.8)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы внутренней и внешней обкладок,  $h$  – длина цилиндров ( $h \gg r_2 - r_1$ );

3) **емкость сферического конденсатора** равна

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}, \quad (3.9)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы внутренней и внешней обкладок.

**Электрическая энергия, запасенная в конденсаторе, равна**

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU. \quad (3.10)$$

При параллельном включении конденсаторов их емкости складываются:

$$C = C_1 + C_2 + \dots; \quad (3.11)$$

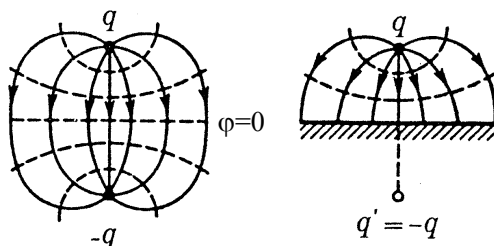
при последовательном включении конденсаторов складываются обратные величины их емкостей:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \quad (3.12)$$

**Метод изображений (или метод зеркальных отображений)** – способ рассуждений, позволяющий в некоторых случаях получить очень простые решения для поля зарядов, распределенных по поверхности проводников. Метод основывается на теореме единственности в электростатике и состоит в подборе таких дополнительных фиктивных зарядов – "изображений", которые вместе с заданными зарядами создавали бы поле, у которого одна из эквипотенциальных поверхностей совпала бы с поверхностью данного проводника. В области вне проводника поле фиктивных зарядов полностью моделирует поле, создаваемое поверхностными зарядами, расположенными на проводнике, так что поле вне проводника полностью совпадает с полем исходной системы.

В курсе общей физики обычно рассматриваются два случая, о которых говорится ниже.

### Точечный заряд $q$ около проводящей плоскости

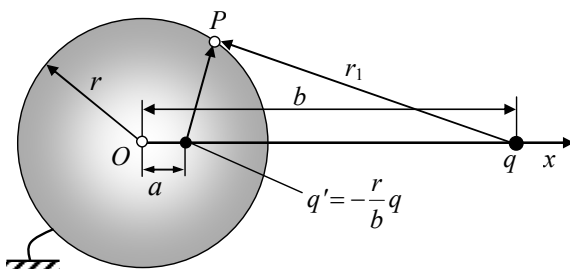


Из левого рисунка видно, что поле двух противоположных по знаку, но одинаковых по величине зарядов имеет плоскую эквипотенциальную поверхность с потенциалом  $\varphi = 0$  (пунктир) посередине между зарядами. Если поместить на нее проводящую плоскость, то поле не изменится, и мы получим показанную справа

нужную нам систему, а фиктивный заряд  $q'$  будет зеркальным отображением заданного заряда  $q$ .

### Точечный заряд $q$ около проводящей сферы (шара)

Среди эквипотенциальных поверхностей системы двух противоположных по знаку и неравных по величине зарядов  $q$  и  $q'$  существует одна сферическая поверхность, потенциал которой  $\varphi = 0$  (см. задачу 2.3.16 главы 2). Это позволяет легко решить данную задачу.



Пусть имеется проводящая заземленная сфера (или шар) радиуса  $r$  (потенциал равен нулю) и заряд  $q$  на расстоянии  $b > r$  от ее центра. Чтобы обеспечить совпадение эквипотенциальной поверхности  $\varphi = 0$  с заданной сферой, нужно поместить дополнительный фиктивный заряд-изображение величиной  $q' = -qr/b$  на расстоянии  $a = r^2/b$  от центра сферы на прямой, проведенной через заряд  $q$  и центр сферы  $O$ . Поле этих двух зарядов **вне сферы** (и только вне сферы) полностью совпадет с исходным полем, создаваемым зарядом  $q$  и поверхностными зарядами на сфере. Поле внутри сферы при этом равно нулю. Доказательство данного результата можно найти, например в [1], §16.

Разумеется, задача может быть обращена. Если внутри заземленной сферы находится на расстоянии  $a$  от центра заряд  $q'$ , то поле внутри сферы совпадет с полем системы двух зарядов:  $q'$  и заряда – "изображения"  $q = -bq'/r$ , расположенного на расстоянии  $b = r^2/a$  в соответствии с тем же рисунком.

### § 3.2. Основные типы задач (классификация)

3.1. Вычисление потенциала проводника в присутствии других заряженных тел.

3.2. Определение распределения потенциала в пространстве, в котором расположена система из нескольких проводников, для которых заданы величины их зарядов или значения потенциалов.

3.3. Определение силы взаимодействия точечного заряда или диполя с проводящей сферой или плоскостью, а также определение поверхностной плотности индуцированных на проводнике зарядов.

3.4. Расчет емкости конденсатора и батарей конденсаторов при различных их соединениях.

### § 3.3. Методы решения и примеры решения задач

*Замечание:* коэффициент  $1/(4\pi\epsilon_0) \approx 9 \cdot 10^9$  м/Ф, входящий во многие формулы электростатики, как и ранее, иногда будет обозначаться буквой  $k$ .

#### Задачи типа 3.1

*Вычисление потенциала проводника в присутствии других заряженных тел*

**Метод решения.** Рассматривается как поле заряженных тел, так и поле зарядов, появляющихся на поверхностях проводников вследствие электростатической индукции. Используется определение потенциала, условие его непрерывности во всем пространстве и принцип суперпозиции.

**Задача 3.3.1 (базовая задача).** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $d$  от центра незаряженного изолированного проводящего шара радиуса  $R < d$  (рис. 3.1). Найти потенциал шара  $\varphi_0$ , считая равным нулю потенциал на бесконечности.

#### Решение

Попытка определить потенциал, вычисляя работу при приближении заряда  $q$  к шару, встречается с трудностями учета поля зарядов, появляющихся

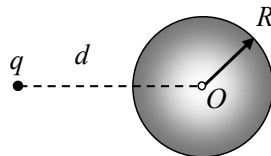


Рис.3.1. Система из точечного заряда и проводящего шара (задача 3.3.1)

на поверхности шара за счет электростатической индукции. Но потенциал всего шара одинаков, поэтому найдем его в самой удобной точке – в центре. Потенциал создается зарядом  $q$  и индуцированными на поверхности шара зарядами. В центре шара вклад заряда  $q$  равен  $k \frac{q}{d}$ , вклад индукционных зарядов равен нулю, так как все эти заряды находятся на одинаковом расстоянии  $R$  от центра шара, а их сумма равна нулю, поскольку в целом шар не заряжен. Потенциал шара равен потенциалу его центра, т.е.  $\varphi_0 = k \frac{q}{d}$ .

**Ответ:**  $\varphi_0 = k \frac{q}{d}$ .

*Замечание.* Отметим, что если бы шар имел заряд  $Q$ , то от этого заряда добавился бы вклад в потенциал  $\varphi_1 = k \frac{Q}{R}$  и потенциал шара был бы равен  $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 = k \left( \frac{q}{d} + \frac{Q}{R} \right)$ .

**Задача 3.3.2 (базовая задача).** Проводящая сфера радиуса  $R$ , на которой находится заряд  $Q$ , имеет малое отверстие. Как будет меняться потенциал сферы, если точечный заряд  $q$  перемещать из бесконечности через отверстие внутрь нее?

**Решение**

Вклад собственного заряда  $Q$  в потенциал сферы постоянен и равен  $k \frac{Q}{R}$ . Для случая, когда заряд  $q$  находится вне сферы на расстоянии  $r > R$  от ее центра, ее потенциал определен в задаче 3.3.1 и равен

$$\varphi = k \left( \frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right).$$

Как только заряд окажется внутри сферы, на внутренней поверхности сферы возникнет индукционный заряд  $-q$  (распределённый неравномерно), а на внешней поверхности сферы – равномерно распределенный заряд  $+q$ , и потенциал сферы станет равным

$$k \left( \frac{q+Q}{R} \right).$$



Потенциал при дальнейшем движении заряда  $q$  внутри сферы изменяться не будет. Это следует из того, что независимо от положения заряда  $q$  внутри сферы поле вне сферы остаётся постоянным и не зависит от перемещения заряда внутри сферы. В этом случае работа по перемещению пробного заряда из бесконечности на поверхность сферы, а, следовательно, и потенциал сферы, будут постоянными.

**Ответ:**  $r \geq R$ :  $\varphi = k \left( \frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right)$ ;  $r \leq R$ :  $\varphi = k \frac{q+Q}{R}$  :

**Задача 3.3.3.** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $r$  от центра  $O$  незаряженного сферического слоя проводника, внутренний и наружный радиусы которого равны соответственно  $R_1$  и  $R_2$ . Найти потенциал  $\varphi_0$  в точке  $O$ , если  $r < R_1$ .

### Решение

Ввиду электростатической индукции на внутренней поверхности слоя появится заряд  $(-q)$ , а на его внешней поверхности  $+q$ . Таким образом, потенциал в центре сферического слоя складывается из трех вкладов: от заряда  $+q$ , равномерно распределенного по внешней поверхности слоя с радиусом  $R_2$ , от заряда  $-q$ , распределенного неравномерно по внутренней поверхности слоя с радиусом  $R_1$ , и от заряда  $q$ ,

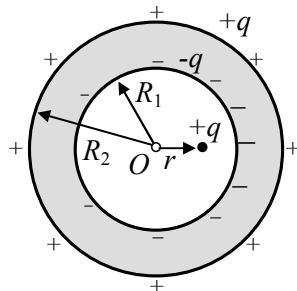


Рис.3.2. Точечный заряд внутри проводящего сферического слоя (задача 3.3.3).

расположенного от центра на расстоянии  $r$ . Так как все индуцированные заряды на внутренней поверхности расположены от центра на одинаковом расстоянии  $R_1$ , то их вклад в потенциал будет

$-k \frac{q}{R_1}$ , вклад от зарядов на внешней поверхности  $+k \frac{q}{R_2}$ . В итоге

потенциал в точке  $O$  будет равен  $kq \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{r} \right)$ .

**Ответ:**  $\varphi_0 = kq \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{r} \right)$ .

### Задачи типа 3.2

*Определение распределения потенциала в пространстве, в котором расположена система из нескольких проводников, для которых заданы величины их зарядов или значения потенциалов*

**Метод решения.** Использование формул для определения потенциала и условия его непрерывности. Если в задаче распределение электростатического поля обладает элементами симметрии, то, пользуясь теоремой Гаусса, можно найти напряженность поля в изучаемом пространстве, а затем путём интегрирования рассчитать потенциал в заданной точке.

**Задача 3.3.4 (базовая задача).** Металлический шар радиуса  $R_1$ , на котором находится положительный заряд  $q$ , окружен расположенным концентрически незаряженным металлическим шаровым слоем с внутренним радиусом  $R_2$  и внешним  $R_3$ . Построить графики зависимости напряженности поля  $E$  и потенциала  $\varphi$  от расстояния до центра шара.

#### Решение

Напряженность поля находим по теореме Гаусса, используя в качестве вспомогательных поверхностей Гаусса концентрические сферы с переменным радиусом  $r$ .

За счет электростатической индукции на внутренней поверхности слоя радиуса  $R_2$  появится заряд  $(-q)$  (все силовые линии заряда  $q$  должны закончиться на отрицательных зарядах). Из закона сохранения заряда следует, что на внешней поверхности слоя радиуса  $R_3$  должен появиться заряд  $+q$ . По теореме Гаусса находим **напряженность электрического поля:**

$$\begin{aligned} r > R_3 & : E = k \frac{q}{r^2}; \\ R_2 < r < R_3 & : E = 0; \\ R_1 < r < R_2 & : E = k \frac{q}{r^2}; \\ r < R_1 & : E = 0. \end{aligned}$$

График зависимости  $E(r)$  изображен на *рис. 3.3а*. Отметим, что на тех поверхностях, где есть индуцированные заряды, напряженность не определена (испытывает скачок). Физический смысл скачка напряженности на заряженной поверхности обсуждался в задаче 1.3.8. главы 1.

Для расчета потенциала используем его связь с напряженностью поля (2.17) и условие его непрерывности. Считая значение потенциала на бесконечности равным нулю, получаем следующий ответ:

$$r \geq R_3 : \quad \varphi_1(r) = k \frac{q}{r};$$

$$R_2 \leq r \leq R_3: \quad \varphi_2(r) = k \frac{q}{R_3} - \text{потенциал постоянен};$$

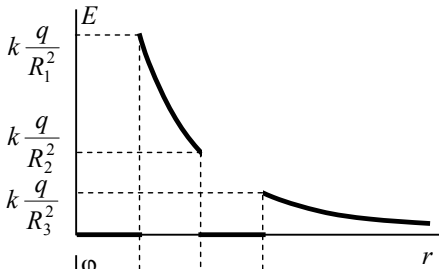


Рис. 3.3а

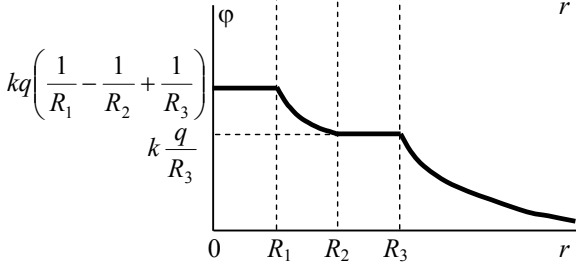


Рис. 3.3б

$$R_1 \leq r \leq R_2: \quad \varphi_3(r) = k \frac{q}{r} + C;$$

Константа  $C$  определится из условия непрерывности потенциала при  $r = R_2$ :

$$C = kq \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Итак, в области  $R_1 \leq r \leq R_2$  имеем

$$\varphi_3(r) = kq \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right).$$

При  $r \leq R_1$  потенциал остается постоянным и равным

$$\varphi_4 = kq \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right).$$

График зависимости  $\varphi(r)$  представлен на рис. 3.3б.

$$\begin{aligned}
 \text{Ответ: } r > R_3 & : E = k \frac{q}{r^2}, & \varphi_1(r) &= k \frac{q}{r}; \\
 R_2 < r < R_3 & : E = 0, & \varphi_2 &= k \frac{q}{R_3}; \\
 R_1 < r < R_2 & : E = k \frac{q}{r^2}, & \varphi_3(r) &= kq \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right); \\
 r < R_1 & : E = 0, & \varphi_4 &= kq \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right).
 \end{aligned}$$

*Замечание.* Разумеется, ответ можно сразу получить, если использовать известные формулы для потенциала сферы радиуса  $R$ :

$$\varphi(r) = k \frac{q}{r} \text{ при } r \geq R; \quad \varphi = k \frac{q}{R} = \text{const при } r \leq R$$

и принцип суперпозиции.

**Задача 3.3.5.** В условиях задачи 3.3.4. сферический слой заземлен. Найти потенциал шара.

**Решение**

В данном случае поле  $\mathbf{E}$  и потенциал  $\varphi$  в области пространства с  $r > R_2$  равны нулю. Поле  $\mathbf{E}$  в пространстве с  $R_1 < r < R_2$  будет равно

$$E = k \frac{q}{r^2}$$

и разность потенциалов  $\varphi_{12}$ , а, следовательно, и потенциал шара  $\varphi_1$ , будут равны

$$\varphi_1 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = kq \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

**Ответ:** 
$$\varphi_1 = kq \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

*Замечание.* Внутренняя поверхность металлического слоя в этом случае имеет заряд  $-q$ , а внешняя поверхность не заряжена.

**Задача 3.3.6.** Имеются три концентрические сферы 1-3 с радиусами  $R_1 < R_2 < R_3$ . Сферы 1 и 3 несут заряды соответственно  $+Q$  и  $-Q$ . Средняя сфера 2 заземлена проводником, искажающим действием которого на поле можно пренебречь (рис.3.4). Найти заряд  $q$  заземленной сферы 2.

**Решение**

Пусть индуцированный заряд на сфере 2 равен  $q$ . Так как потенциал  $\varphi_2$  этой сферы равен нулю, то

$$\begin{aligned} 0 = |\varphi_2| &= \int_{R_2}^{\infty} E(r) dr = k \int_{R_2}^{R_3} \frac{q+Q}{r^2} dr + k \int_{R_3}^{\infty} \frac{q+Q-Q}{r^2} dr = \\ &= kq \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_2}^{R_3} + k(q+Q) \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_2}^{R_3} = k \frac{q}{R_3} + k(Q+q) \left[ \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right] = \\ &= k \left( \frac{q}{R_3} + \frac{Q}{R_2} + \frac{q}{R_2} - \frac{Q}{R_3} - \frac{q}{R_3} \right). \end{aligned}$$

Отсюда  $\frac{q}{R_2} = Q \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right)$  или  $q = Q \left( \frac{R_2}{R_3} - 1 \right) < 0$ .

**Ответ:**  $q = Q \left( \frac{R_2}{R_3} - 1 \right) < 0$ .

*Замечание.* При решении этой задачи можно воспользоваться известными формулами для потенциала заряженной сферы и сразу записать потенциал средней заземленной сферы как суперпозицию потенциалов, создаваемых тремя сферами:

$$\varphi_2 = k \left( \frac{Q}{R_1} + \frac{q}{R_2} - \frac{Q}{R_3} \right) = 0, \quad \text{откуда сразу}$$

получаем ответ  $q = Q \left( \frac{R_2}{R_3} - 1 \right)$ .

Отметим, что теперь, зная заряды всех сфер, можно по аналогии с задачей 3.3.4 найти зависимости  $E(r)$  и  $\varphi(r)$ .

**Задача 3.3.7.** Имеются три незаряженные концентрические сферы 1-3 с радиусами  $R_1 < R_2 < R_3$ . На вторую сферу помещают заряд  $+Q$ , а сферы 1 и 3 соединяют проводником, искажающим действием которого можно пренебречь (рис.3.5). Найти зависимости  $E(r)$  и  $\varphi(r)$  и построить их графики.

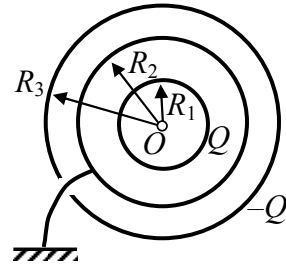


Рис.3.4. Система из трёх концентрических сфер с заземлённой средней сферой (задача 3.3.6)

**Решение**

Для решения задачи нужно сначала узнать заряды сфер 1 и 3. Пусть на сфере с радиусом  $R_1$  индуцируется заряд  $q_1$ , на сфере с радиусом  $R_3$  – заряд  $q_2$ . Тогда  $q_1 + q_2 = 0$ ,  $\varphi_1 = \varphi_3$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} 0 = |\Delta\varphi_{13}| &= k \int_{R_1}^{R_3} E(r) dr = k \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_1}{r^2} dr + k \int_{R_2}^{R_3} \frac{q_1 + Q}{r^2} dr = \\ &= k(Q + q_1) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) + kq_1 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \\ &kQ \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) + kq_1 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} \right) = \\ &= kQ \frac{R_3 - R_2}{R_2 R_3} + kq_1 \frac{R_3 - R_1}{R_1 R_3}. \end{aligned}$$

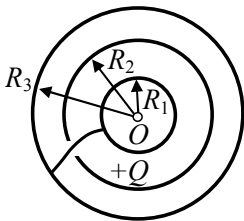


Рис.3.5. Система из трёх концентрических сфер, в которой внутренняя и внешняя сферы соединены проводником (задача 3.3.7).

Отсюда  $q_1 = -q_2 = -Q \frac{R_3 - R_2}{R_3 - R_1} \cdot \frac{R_1}{R_2}$ , при этом  $|q_1| < |Q|$ .

Зная заряды всех сфер, можно по аналогии с задачей 3.3.4. найти зависимости  $E(r)$  и  $\varphi(r)$  и построить их графики (рис. 3.6).

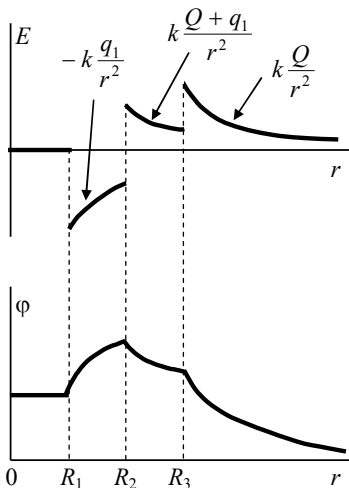


Рис. 3.6. Зависимость напряженности и потенциала от расстояния до центра сфер в задаче 3.3.7

**Ответ:**

$r < R_1$ :

$$E(r) = 0; \quad \varphi(r) = k \left( \frac{q_1}{R_1} + \frac{Q}{R_2} - \frac{q_1}{R_3} \right);$$

$R_1 < r < R_2$ :

$$E(r) = k \frac{q_1}{r^2}; \quad \varphi(r) = k \left( \frac{q_1}{r} + \frac{Q}{R_2} - \frac{q_1}{R_3} \right);$$

$R_2 < r < R_3$ :

$$E(r) = k \frac{Q + q_1}{r^2}; \quad \varphi(r) = k \frac{Q + q_1}{r};$$

$$r > R_3: \quad E(r) = k \frac{Q}{r^2}; \quad \varphi(r) = k \frac{Q}{r}.$$

*Замечание.* Для определения зарядов сфер 1, 3 проще воспользоваться готовыми формулами для потенциала сферы и сразу найти потенциал каждой сферы как суперпозицию потенциалов, создаваемых тремя сферами:

$$\varphi_1 = k \left( \frac{q_1}{R_1} + \frac{Q}{R_2} + \frac{q_2}{R_3} \right), \quad \varphi_3 = k \frac{Q}{R_3}, \quad q_1 = -q_2, \quad \varphi_1 = \varphi_3,$$

отсюда  $\frac{q_1}{R_1} + \frac{Q}{R_2} - \frac{q_1}{R_3} = \frac{Q}{R_3}$  и  $q_1 = -Q \frac{R_3 - R_2}{R_3 - R_1} \cdot \frac{R_1}{R_2}$ .

### Задачи типа 3.3

*Определение силы взаимодействия точечного заряда или диполя с проводящей сферой или плоскостью, а также определение поверхностной плотности индуцированных на проводнике зарядов*

**Метод решения.** Применение метода электростатических изображений (см. теоретический материал). Замена полей, создаваемых зарядами на поверхности проводника, полем одного (или более) фиктивного точечного заряда позволяет легко вычислить силу взаимодействия, применяя закон Кулона. Чтобы определить плотность индуцированных зарядов, надо найти напряженность поля, создаваемого этой системой точечных зарядов в произвольной точке на поверхности проводника, и затем применить формулу (3.1).

**Задача 3.3.8 (базовая задача).** На расстоянии  $h$  от проводящей бесконечной плоскости находится точечный заряд  $q$ . Определить величину напряженности поля  $\mathbf{E}$  в точке  $A$ , отстоящей от плоскости и от заряда на расстояние  $h$ .

#### Решение

Строим заряд-изображение  $-q$  в соответствии с теоретическим материалом (рис. 3.7). Напряженность поля в точке  $A$  есть векторная сумма напряженностей  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  от зарядов  $q$  и  $-q$ . Из геометрии задачи следует:

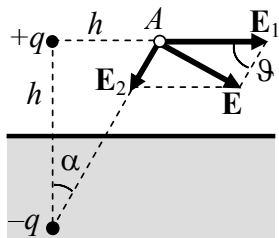


Рис. 3.7. Определение напряженности поля, создаваемого точечным зарядом  $+q$  над бесконечной проводящей плоскостью (задача 3.3.8)

$$E_1 = k \frac{q}{h^2}, \quad E_2 = k \frac{q}{5h^2}.$$

По теореме косинусов

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2 E_1 E_2 \cos \vartheta,$$

где  $\cos \vartheta = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Отсюда получаем:  $E = k \frac{q}{5h^2} \sqrt{26 - 2\sqrt{5}}$ .

**Ответ:**  $E = k \frac{q}{5h^2} \sqrt{26 - 2\sqrt{5}}$ .

**Задача 3.3.9.** На расстоянии  $h$  от заземленной проводящей бесконечной плоскости находится точечный заряд  $q$ . Определить плотность индуцированного заряда в произвольной точке на плоскости.

### Решение

Строим заряд-изображение  $-q$  (рис. 3.8). Ввиду осевой симметрии системы положение произвольной точки  $A$  на плоскости можно задать всего одним параметром – ее расстоянием  $r$  от основания перпендикуляра, опущенного из точки нахождения заряда  $q$  на плоскость. От такой точки плоскости расстояние до заряда равно  $\sqrt{r^2 + h^2}$ , а напряженность поля

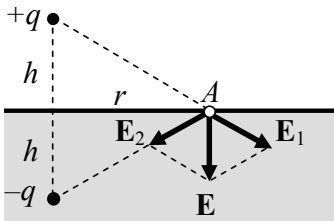


Рис. 3.8. К определению поверхностной плотности заряда, индуцированного на бесконечной проводящей плоскости (задача 3.3.9)

$$E_1 = k \frac{q}{h^2 + r^2}.$$

Учитывая, что  $E_1 = E_2$ , найдем полную напряженность  $E$  в точке  $A$ , суммируя векторы  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ :

$$E = k \frac{2qh}{(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Вектор  $\mathbf{E}$  направлен перпендикулярно плоскости в сторону от положительного заряда к отрицательному, то есть в сторону плоскости (рис. 3.8). Вблизи проводника, согласно (3.1),  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ , причем вектор  $\mathbf{E}$  направлен в сторону плоскости только в случае  $\sigma < 0$ . Приравнявая оба выражения для  $E$ , находим



$$\sigma(r) = -\frac{qh}{2\pi(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Для проверки полученного результата вычислим полный заряд  $q'$ , индуцированный на плоскости. Он должен быть равен  $-q$ , так как все силовые линии, исходящие из заряда  $q$ , заканчиваются на плоскости. Чтобы вычислить  $q'$ , выделим часть плоскости, лежащую между окружностями радиусов  $r$  и  $r + dr$ . Площадь этой части плоскости равна  $2\pi r dr$ , и на ней находится заряд  $dq' = \sigma(r) \cdot 2\pi r dr$ . Интегрируя по  $r$  в пределах от нуля до бесконечности, находим полный заряд  $q'$

$$q' = -qh \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = -q.$$

**Ответ:** 
$$\sigma(r) = -\frac{qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{3/2}}.$$

**Задача 3.3.10.** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $b$  от центра заземленного металлического шара радиуса  $r$  ( $b > r$ ). Определить силу притяжения  $F$  между зарядом и шаром. Какую работу  $A$  надо совершить, чтобы перенести заряд в бесконечно удаленную точку?

**Решение**

Потенциал заземленного шара считаем равным нулю. В соответствии с §3.1. строим заряд-изображение

$$q' = -q \frac{r}{b},$$

находящийся на расстоянии

$$a = \frac{r^2}{b}$$

от центра шара (рис 3.9).

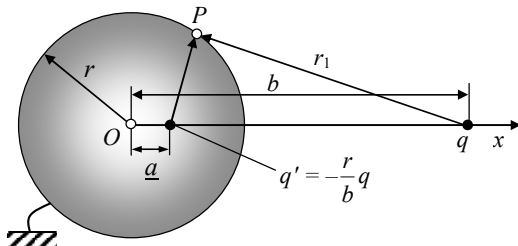


Рис 3.9. Точечный заряд  $q$  вблизи заземлённого металлического шара и заряд-изображение  $q'$  (задача 3.3.10)

Поскольку поле, создаваемое индуцированными зарядами на шаре в точке нахождения заряда  $q$ , эквивалентно полю заряда-"изображения"  $q'$ , то искомая сила взаимодействия между шаром и зарядом  $q$  равна силе притяжения данных

зарядов противоположного знака  $q$  и  $q'$ , определяемой законом Кулона. Следовательно, величина этой силы  $F$  равна:

$$F = k \frac{|qq'|}{(b-a)^2} = k \frac{brq^2}{(b^2 - r^2)^2}.$$

При удалении заряда от шара за счет внешней силы будет также изменяться и положение (координата  $x$ ) заряда-изображения. Учитывая, что внешняя сила направлена по оси  $x$  и выполняя интегрирование, находим величину ее работы, необходимой для полного разведения зарядов:

$$A = \int_b^{\infty} F(x) dx = k \int_b^{\infty} \frac{rq^2 x dx}{(x^2 - r^2)^2} = k \frac{rq^2}{2(b^2 - r^2)}.$$

Эта работа положительна, поскольку совершена внешней силой против электрических сил притяжения.

**Ответ:**  $F = k \frac{brq^2}{(b^2 - r^2)^2}; \quad A = k \frac{rq^2}{2(b^2 - r^2)}.$

**Задача 3.3.11.** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $b$  от центра изолированного незаряженного металлического шара радиуса  $r$ . Определить силу притяжения  $F$  между зарядом и шаром.

### Решение

Если шар изолирован, то его потенциал, вычисленный в задаче 3.3.1, равен  $k \frac{q}{b}$ . Поскольку заряд-изображение  $q' = -\frac{qr}{b}$  обеспечивает равенство потенциала сферы нулю, то для увеличения ее потенциала до нужного значения надо добавить в центр шара точечный заряд  $q''$  такой, чтобы потенциал сферы стал равен  $k \frac{q}{b}$ .

Величину заряда  $q''$  легко установить: она должна удовлетворять соотношению  $k \frac{q''}{r} = k \frac{q}{b}$ , откуда  $q'' = q \frac{r}{b}$ . В области вне шара электростатическое поле будет в точности совпадать с полем, созданным тремя точечными зарядами:  $q$ ,  $q''$  и зарядом-изображением

$$q' = -\frac{qr}{b}.$$

К этому же выводу можно придти и по-иному: поток вектора  $\mathbf{E}$  через поверхность шара должен равняться нулю, т.к. шар не заряжен. Отсюда по теореме Гаусса следует, что сумма зарядов, размещаемых нами внутри шара для моделирования внешнего поля, также должна равняться нулю:  $q'' + q' = 0$ , что опять приводит к равенству  $q'' = q(r/b)$ .

Теперь вычисляем силу, действующую на заряд  $q$ , как сумму двух сил от точечных зарядов  $q'$  и  $q''$ . Первое слагаемое в скобках соответствует притяжению зарядов  $q$ ,  $q'$ , второе – отталкиванию зарядов  $q$ ,  $q''$ . Хотя заряды  $q'$  и  $q''$  одинаковы по модулю, в итоге получается сила притяжения, поскольку заряд  $q'$  находится к  $q$  ближе, чем заряд  $q''$ .

**Ответ:** 
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} r q^2 \left( \frac{b}{(b^2 - r^2)^2} - \frac{1}{b^3} \right).$$

*Замечание.* Можно дополнительно вычислить и работу, необходимую для удаления заряда  $q$  на бесконечность. Она вычисляется совершенно аналогично расчету, приведенному в задаче 3.3.11. В

нашем случае она равна  $A = k \frac{r^3 q^2}{2b^2(b^2 - r^2)}$ . Как и следовало ожи-

дать, она меньше, чем в случае заземленного шара предыдущей задачи, потому что тогда за счет заземления на шаре появлялся отличный от нуля индуцированный заряд противоположного знака и требовалась дополнительная работа по преодолению его силы притяжения.

**Задача 3.3.12.** Тонкое проволочное кольцо радиуса  $R$  имеет заряд  $q$ . Кольцо расположено параллельно безграничной проводящей плоскости на расстоянии  $h$  от последней. Найти: а) поверхностную плотность заряда в точке плоскости на оси кольца; б) напряженность и потенциал электрического поля в центре кольца.

### Решение

Воспользуемся результатом решения базовой задачи 1.3.5, в которой получено значение напряженности поля на оси заряженного кольца на произвольном расстоянии  $z$  от его плоскости:

$$E(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Заряд-изображение имеет вид заряженного отрицательно кольца, расположенного симметрично относительно плоскости. Ответы на вопросы задачи получим, суммируя вклады от заряда  $q$  и заряда-изображения.

а) Речь идет о точке плоскости, через которую проходит ось кольца. Для нее  $z = h$  и векторы напряженности от двух колец направлены одинаково. Поэтому суммарная напряженность равна

$$E = 2E(h) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Искомую плотность заряда найдем из формулы (3.1), что дает **ответ а)**:

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi} \frac{qh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

б) Напряженность в центре кольца создается только зарядом-изображением. Для этой точки

$$z = 2h \text{ и } E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qh}{(R^2 + 4h^2)^{3/2}}.$$

Мы считали  $q > 0$ , поэтому вектор  $\mathbf{E}$  направлен вдоль оси кольца в сторону плоскости. Итак, получена первая часть **ответа б)**.

Задача о потенциале для точек на оси такой системы двух колец решена в главе 2 (см. задачу **2.3.5**). В общий ответ, полученный при нормировке потенциала на нуль в бесконечно удаленной точке,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{R^2 + (x-h)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{R^2 + (x+h)^2}} \right),$$

надо подставить  $q_1 = q$ ,  $q_2 = -q$ ,  $x = h$ .

В итоге получаем:  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4h^2}} \right)$ , где  $\varphi$  – потен-

циал средней точки кольца относительно проводящей плоскости (или, эквивалентно, относительно бесконечно удаленной точки).

В этом частном случае, когда заряды  $q_1$  и  $q_2$  равны по величине и противоположны по знаку, потенциал в точке  $x = 0$  тоже равен нулю. Это означает, что вся проводящая плоскость из условия задачи имеет равный нулю потенциал.

**Ответ:** а)  $\sigma = -\frac{1}{2\pi} \frac{qh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}$ ;

$$\text{б) } E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qh}{(R^2 + 4h^2)^{3/2}}; \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4h^2}} \right).$$

### Задачи типа 3.4

*Расчет емкости конденсатора и батарей конденсаторов при различных их соединениях*

**Метод решения.** Анализ распределения потенциала в системе проводников и использование формул (3.2), (3.6) – (3.9), (3.11), (3.12) теоретического материала.

**Задача 3.3.13 (базовая задача).** Расстояние между обкладками плоского конденсатора равно  $d$ . В пространство между обкладками конденсатора вносится металлическая пластинка толщиной  $h$ , поверхность которой параллельна обкладкам и находится на расстоянии  $b$  от одной из обкладок (рис.3.10.) Пластины конденсатора имеют потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2 < \varphi_1$ .

Найти потенциал  $\varphi$  металлической пластины.

#### Решение

Внутри металлической пластины  $E_0 = 0$ , а вне неё поле однородно и имеет напряженность

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d - h}.$$

Изменение потенциала при переходе от верхней обкладки к пластине вычисляем как взятую с обратным знаком работу электрического поля  $E$  по перемещению единичного положительного заряда на расстояние  $b$ :  $\Delta\varphi = -bE$ . Следовательно, потенциал металлической пластины равен

$$\varphi = \varphi_1 + \Delta\varphi = \varphi_1 - b \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d - h}.$$

**Ответ:** 
$$\varphi = \varphi_1 - b \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d - h}.$$

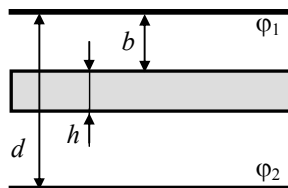


Рис. 3.10. Металлическая пластинка внутри плоского конденсатора (задача 3.3.13)

**Задача 3.3.14.** Плоский конденсатор состоит из двух пластин, находящихся друг от друга на расстоянии 0,5 мм. Как изменится емкость конденсатора, если

а) его поместить в изолированную металлическую коробку («экранировать»), стенки которой будут находиться на расстоянии 0,25 мм от пластин (рис. 3.11)?

б) если коробку соединить с одной из пластин? При расчётах искажением поля у краев конденсатора пренебречь.

### Решение

Потенциал коробки есть величина постоянная, поэтому работа по перемещению единичного положительного заряда от нижней плоскости коробки до верхней по любому пути равна нулю. Иными словами,

$$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3 = 0,$$

где индексами 1, 2, 3 отмечены последовательно проходимые промежутки между всеми пластинами (рис.3.11). Пусть  $C$  – емкость неэкранированного конденсатора. Из условия задачи следует, что емкости каждого из конденсаторов, образованных внутренней пластиной и пластиной коробки, равны  $C_1 = C_3 = 2C$ . Из симметрии системы заключаем, что

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_3 = -\frac{\Delta\varphi_2}{2}.$$

Значит, конденсаторы  $C_1$  и  $C_3$  включены навстречу конденсатору  $C$ , т.е. эквивалентная схема имеет вид, показанный на рис. 3.12 (работа при обходе всего контура равна нулю). Используя формулы сложения емкостей, находим ответ: суммарная емкость (т.е. емкость конденсатора  $C$ , заключенного в коробку) равна  $2C$ .

Если коробку соединить с одной из пластин, то это эквивалентно удалению одного из конденсаторов с емкостью  $2C$  (соединение проводом без геометрического перемещения). Суммарная емкость при этом станет равной  $3C$ .

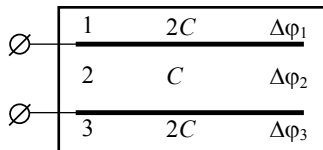


Рис.3.11. Плоский конденсатор внутри металлической коробки (задача 3.3.14)

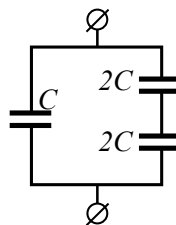


Рис. 3.12. Эквивалентная схема конденсатора, находящегося внутри металлической коробки (задача 3.3.14)

**Ответ:** а)  $C_1 = 2C$ ; б)  $C_2 = 3C$ .

**Задача 3.3.15.** Два длинных провода радиусом  $a$  каждый расположены параллельно друг другу. Расстояние между их осями равно  $b$  ( $b \gg a$ ). Найти ёмкость участка проводов длиной  $h$ .

**Решение**

Чтобы воспользоваться формулой (3.2), необходимо вычислить разность потенциалов проводов, если поместить на них равные по величине и противоположные по знаку заряды. Пусть на одном проводе находится заряд с поверхностной плотностью  $+\sigma$ , а на втором — с поверхностной плотностью  $-\sigma$  (рис. 3.13). Провода рассматриваем как бесконечно длинные цилиндры. Напряженность поля в точке  $A$ , находящейся вне проводов на расстоянии  $r$  от оси первого провода, равна

$$E = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 (b-r)},$$

где  $r$  — расстояние от левого провода (см. задачу 1.3.12, глава 1). Отсюда следует, что потенциал в точке  $A$  равен

$$\varphi(r) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \ln \frac{r}{(b-r)} + \text{const.}$$

Потенциал первого провода  $\varphi_1$  получим, полагая здесь  $r = a$ :  $\varphi_1 = \varphi(a)$ ; для второго, полагая  $r = b - a$ :  $\varphi_2 = \varphi(b - a)$ . Разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\sigma a}{\varepsilon_0} \ln \frac{b-a}{a},$$

а заряд  $q$ , приходящийся на участок провода длиной  $h$ , равен  $qh = 2\pi\sigma ah$ .

$$\text{Из (3.2) при } b \gg a \text{ находим ответ: } C = \frac{qh}{\Delta\varphi} = \frac{\pi\varepsilon_0 h}{\ln \frac{b-a}{a}} \approx \frac{\pi\varepsilon_0 h}{\ln \frac{b}{a}}.$$

**Ответ:**  $C = \frac{\pi\varepsilon_0 h}{\ln \frac{b-a}{a}} \approx \frac{\pi\varepsilon_0 h}{\ln \frac{b}{a}}.$

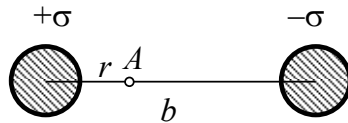


Рис. 3.13. К определению ёмкости системы из двух длинных проводов (задача 3.3.15)

*Замечание.* При решении задачи не учитывалось перераспределение поверхностных зарядов на проводах за счет электростатического

ской индукции. Это приближение оправдано при большом расстоянии между проводами ( $b \gg a$ ).

**Задача 3.3.16.** Определить приближенно емкость  $C$  системы из двух одинаковых металлических шаров радиуса  $R$ , находящихся на очень большом по сравнению с  $R$  расстоянии друг от друга.

**Решение**

Поместим на шарах заряды  $+q$  и  $-q$ . Условие большого расстояния между шарами позволяет пренебречь перераспределением зарядов на шарах за счет электростатической индукции и приближенно считать распределение зарядов на шарах равномерным. Тогда потенциал в точках плоскости симметрии системы, перпендикулярной линии, проведенной через центры шаров, равен нулю. Потенциалы шаров относительно этой плоскости равны  $\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} = -\varphi_2$ , а разность потенциалов  $\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{R}$ . Следовательно, согласно (3.2) емкость такой системы равна  $C = 2\pi\epsilon_0 R$ . Эта величина вдвое меньше емкости уединенного шара.

**Ответ:**  $C = 2\pi\epsilon_0 R$ .

**Задача 3.3.17 (базовая задача).** Батарея из четырех одинаковых конденсаторов включена один раз по схеме а), а другой раз – по схеме б) (рис. 3.14).

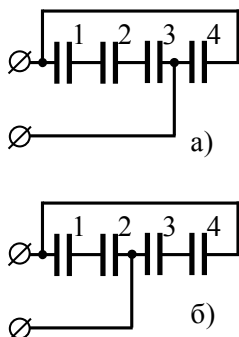


Рис. 3.14. Две разные схемы соединения конденсаторов в батарею (задача 3.3.17)

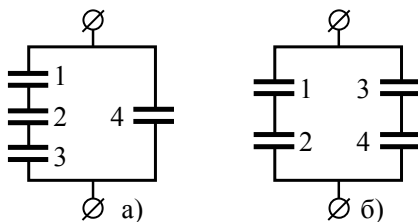


Рис. 3.15. Эквивалентные схемы батарей, изображенных на рис. 3.14 (задача 3.3.17)

В каком случае емкость батареи будет больше? Если емкости конденсаторов различны, то какому соотношению они должны



удовлетворять, чтобы при переключении со схемы а) на схему б) емкость батареи не менялась?

### Решение

Построим эквивалентные схемы, используя точки с одинаковыми потенциалами (рис. 3.15). Теперь легко сразу дать **ответ на первый вопрос**:

$$C_a = C + \frac{1}{3}C = \frac{4}{3}C; \quad C_6 = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C = C.$$

Видим, что  $C_a > C_6$ .

Емкость батареи не будет зависеть от схемы подключения, если

$$C_4 + C_{123} = C_{12} + C_{34},$$

где

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}; \quad C_{34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}; \quad C_{123} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3}.$$

Отсюда следует **ответ на второй вопрос**: емкость схем а) и б) одинакова, если

$$C_4 + \frac{C_1 C_3 C_3}{C_{12} + C_{23} + C_{13}} = \frac{C_1 C_2 (C_3 + C_4) + C_3 C_4 (C_1 + C_2)}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}.$$

**Ответ:**  $C_a > C_6$ ; емкость батареи не будет зависеть от схемы подключения, если

$$C_4 + \frac{C_1 C_3 C_3}{C_{12} + C_{23} + C_{13}} = \frac{C_1 C_2 (C_3 + C_4) + C_3 C_4 (C_1 + C_2)}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}.$$

**Задача 3.3.18.** Два конденсатора, емкости которых  $C_1$  и  $C_2$ , соединены последовательно и присоединены к источнику ЭДС  $\mathcal{E}$ . Определить напряжение на каждом конденсаторе и находящиеся на них заряды после установления равновесия.

### Решение

При последовательном соединении заряды на конденсаторах будут одинаковыми, а сумма напряжений равна ЭДС подключенного источника. Поэтому

$$\Delta\varphi_1 = \frac{q}{C_1}, \quad \Delta\varphi_2 = \frac{q}{C_2}, \quad \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \mathcal{E}.$$

Решая эту систему уравнений, получим

**Ответ:**  $\Delta\varphi_1 = \varepsilon \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ ;  $\Delta\varphi_2 = \varepsilon \frac{C_1}{C_1 + C_2}$ ;  $q = \varepsilon \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ .

**Задача 3.3.19.** Четыре одинаковых конденсатора соединены, как показано на рис. 3.16, и присоединены к батарее с ЭДС  $\varepsilon$ . Ключ  $K_2$  сначала разомкнут, а ключ  $K_1$  замкнут. Затем размыкают ключ  $K_1$  и замыкают ключ  $K_2$ . Какова будет разность потенциалов на каждом конденсаторе, если ЭДС батареи  $\varepsilon = 9$  В?

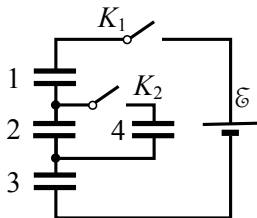


Рис. 3.16. Схема соединения конденсаторов в задаче 3.3.19

### Решение

В первом положении три конденсатора замкнуты на ЭДС  $\varepsilon$ . На каждом конденсаторе будет напряжение  $(1/3)\varepsilon$  и заряд  $q = (1/3)C\varepsilon$ . После переключения ключей заряды на конденсаторах 1 и 3 останутся неизменными (следовательно, и напряжения не изменятся), а заряд конденсатора 2 распределится поровну на два одинаковых конденсатора 2 и 4. Поэтому напряжение на конденсаторах 2 и 4 станет равным  $(1/6)\varepsilon$ . Итак, разности потенциалов будут 3 В; 1,5 В; 3 В и 1,5 В.

**Ответ:** 3 В; 1,5 В; 3 В и 1,5 В.

## § 3.4. Задачи для самостоятельного решения

**3.4.1.** Заряды распределены равномерно по поверхности двух концентрических сфер с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , причем поверхностные плотности зарядов на обеих сферах одинаковы. Найти плотность заряда  $\sigma$ , если потенциал в центре сфер равен  $\varphi_0$ , а на бесконечности равен нулю.

**Ответ:**  $\sigma = \frac{\varepsilon_0 \varphi_0}{R_1 + R_2}$ .

**3.4.2.** Две концентрические проводящие сферы с радиусами  $R$  и  $2R$  заряжены так, что на внутренней сфере заряд  $q$ , а на внешней  $2q$ . На расстоянии  $3R$  от центра сфер потенциал равен  $\varphi$ . Найти  $R$ .

**Ответ:**  $R = \frac{kq}{\varphi}$ .

**3.4.3.** Внутри незаряженного металлического шара радиуса  $R$  имеется произвольно расположенная относительно центра сферическая полость радиуса  $r$ , в которой расположен неподвижный точечный заряд  $q$  на расстоянии  $a$  от центра полости. Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля в центре полости.

**Ответ:** 
$$\varphi = kq \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right).$$

**3.4.4.** Незаряженные концентрические металлические сферы имеют радиусы  $R_1$  и  $R_2$ . Между сферами помещен на расстоянии  $r$  от центра точечный заряд  $+q$ . Найти разность потенциалов между сферами.

**Ответ:** 
$$\Delta\varphi = kq \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right).$$

**3.4.5.** Найти потенциал  $\varphi(r)$  создаваемый двумя концентрическими металлическими сферами с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , заряженными зарядами  $q_1$  и  $q_2$  соответственно ( $R_1 < R_2$ ).

**Ответ:** 
$$R_2 \leq r: \quad \varphi(r) = k \frac{q_1 + q_2}{r};$$

$$R_1 \leq r \leq R_2: \quad \varphi(r) = k \left( \frac{q_2}{R_2} + \frac{q_1}{r} \right);$$

$$r \leq R_1: \quad \varphi(r) = k \left( \frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} \right).$$

**3.4.6.** Точечный заряд  $q$  помещен на расстоянии  $R/2$  от центра заземлённой тонкостенной металлической сферы радиуса  $R$ , на которой расположен заряд  $Q$ . Определить силу  $F$ , действующую на заряд  $q$ .

**Ответ:** 
$$F = -k \frac{8q^2}{9R^2}.$$

**3.4.7.** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $r$  от центра  $O$  заряженного проводящего сферического слоя, внутренний и наружный радиусы которого равны, соответственно,  $a$  и  $b$ . Найти полный заряд  $Q$  слоя, если потенциал в точке  $O$  равен  $\varphi$ . Учтеть, что  $r < a$ .

**Ответ:** 
$$Q = q \left( \frac{b}{a} - \frac{b}{r} - 1 \right) - 4\pi\epsilon_0 b\varphi.$$

**3.4.8.** Три концентрические металлические сферы имеют радиусы  $R_1, R_2, R_3$  соответственно. На внутренней сфере заряд  $+Q$ , на внешней  $+2Q$ , средняя – не заряжена. Определить:

- а) распределение потенциала во всём пространстве;  
 б) поверхностную плотность зарядов  $\sigma$  на внешних поверхностях всех сфер. Считать  $\varphi(\infty) = 0$ .

**Ответ:**  $r \geq R_3$ :  $\varphi = k \frac{3Q}{r}$ ,  $\sigma_3 = \frac{3Q}{4\pi R_3^2}$ ;

$$R_1 \leq r \leq R_3: \varphi = kQ \left( \frac{2}{R_3} + \frac{1}{r} \right), \sigma_2 = \frac{Q}{4\pi R_2^2};$$

$$r \leq R_1: \varphi = kQ \left( \frac{2}{R_3} + \frac{1}{R_1} \right), \sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R_1^2}.$$

**3.4.9.** Три концентрические металлические сферы имеют радиусы  $R, 2R, 3R$  соответственно. На средней сфере заряд  $+Q$ . В ней проделано отверстие, через которое проволокой соединены первоначально незаряженные внешняя и внутренняя сферы. Найти распределение потенциала во всем пространстве, считая  $\varphi(\infty) = 0$ .

**Ответ:**  $3R < r$ :  $\varphi = k \frac{Q}{r}$ ;

$$2R < r < 3R: \varphi = kQ \left( \frac{3}{4r} + \frac{1}{12R} \right);$$

$$R < r < 2R: \varphi = kQ \left( -\frac{1}{4r} + \frac{7}{12R} \right);$$

$$r < R: \varphi = k \frac{Q}{3R}.$$

**3.4.10.** Конденсатор  $C_3$  был предварительно заряжен посторонним источником до напряжения  $U_0$ , после чего его отключили от источника и подключили в разрыв цепи (рис. 3.17) в указанной полярности. Найти заряд  $q$ , прошедший через источник ЭДС цепи. ЭДС источника  $\mathcal{E}$ ,  $C_1 = C_2 = C_3 = C$ .

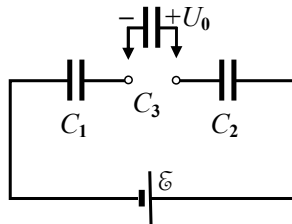


Рис.3.17. Схема подключения конденсатора  $C_3$  к цепи (задача 3.4.10)

**Ответ:**  $q = \frac{1}{3} C(\mathcal{E} - U_0)$ .

**3.4.11.** Плоский конденсатор находится во внешнем однородном электрическом поле напряжённости  $\mathbf{E}$ , перпендикулярном пластинам. Площадь каждой из пластин конденсатора  $S$ . Какой заряд окажется на каждой из обкладок, если их соединить друг с другом проводником?

**Ответ:**  $q = \pm \epsilon_0 ES$ .

**3.4.12.** Обкладки плоского конденсатора соединены проводником друг с другом и заземлены (рис.3.18). Между обкладками вставлена тонкая пластина с зарядом  $q$ , параллельная обкладкам конденсатора и имеющая ту же площадь. Какой заряд  $\Delta q$  протечёт по проводнику, соединяющему обкладки, если пластину передвинуть на расстояние  $x$ ? Расстояние между обкладками  $d$ .

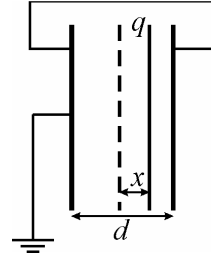


Рис.3.18. Конденсатор с металлической заряженной пластиной (задача 3.4.12)

**Ответ:**  $\Delta q = \frac{qx}{d}$ .

**3.4.13.** В схеме, показанной на рис.3.19, сначала замыкают ключ  $K_1$ , а затем (после его размыкания) замыкают ключ  $K_2$ . Определить напряжения  $U_1$  и  $U_2$  на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$ , если ЭДС батарей соответственно равны  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ .

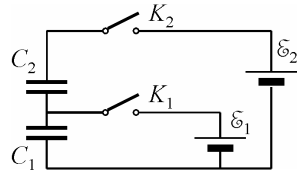


Рис.3.19. Схема включения конденсаторов задачи 3.4.13.

**Ответ:**  $U_1 = \frac{C_1 \mathcal{E}_1 + C_2 \mathcal{E}_2}{C_1 + C_2}$ ;  $U_2 = \frac{C_1 (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}{C_1 + C_2}$ .

### Литература к главе 3

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. –М.: Оникс 21 век, 2005, §16.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. –М.: Физматлит, 2006, §§11, 23, 26, 27.
3. Калашиников С.Г. Электричество. –М.: Физматлит, 2003. §§ 27, 31-36.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Физматлит 2003, §§ 5, 9.

## Глава 4

## ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

## § 4.1. Теоретический материал

**Диэлектрики** – это материальные тела, в которых нет свободных зарядов, способных под действием электрического поля перемещаться на большие, макроскопические расстояния (в отличие от проводников). Заряды в диэлектрике могут перемещаться под действием внешнего электрического поля на расстояния порядка атомных.

**Электрическое поле в диэлектрике.** При действии внешнего электрического поля положительные и отрицательные заряды в диэлектрике смещаются в пределах молекулы в противоположных направлениях. Такая система сама порождает электрическое поле. Поле в произвольной точке пространства становится суммой внешнего поля и поля, созданного системой разделенных зарядов диэлектрика.

**Дипольный момент.** В первом приближении электрические свойства нейтральной системы с неоднородным распределением плотности заряда характеризуются ее дипольным моментом:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} dq(\mathbf{r}).$$

Значение дипольного момента электрически нейтральной системы не зависит от выбора начала системы отсчета. Поэтому радиус-вектор  $\mathbf{r}$  можно отсчитывать от любой точки, выбранной за начало координат. На больших расстояниях от системы ее электрическое поле совпадает с полем точечного диполя (гл. 1, формула (1.4)).

**Поляризация.** Процесс образования (или упорядочения) дипольных моментов внутри диэлектрика называется поляризацией. Поляризация может происходить за счет смещения зарядов в атомах и молекулах диэлектрика при действии внешнего поля, за счет упорядочения ориентации дипольных моментов атомов с несимметричным распределением внутриатомного заряда и по ряду других причин. Разделенные в процессе поляризации заряды называются поляризационными (или связанными) зарядами. Связанные заряды могут быть как объемными, так и поверхностными.

Заряды в диэлектрике, не входящие в состав его атомов и молекул, называются сторонними зарядами (иногда их условно называют свободными зарядами, хотя в ряде случаев сторонние заряды могут быть и не свободными).

**Поляризованность (вектор поляризации)  $\mathbf{P}$**  диэлектрика – это вектор объемной плотности дипольного момента. Численно он равен дипольному моменту единицы объема диэлектрика:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \mathbf{p}_i = n \langle \mathbf{p} \rangle,$$

где  $\Delta V$  – физически бесконечно малый объем диэлектрика в окрестности точки с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}_i$  – дипольный момент  $i$ -той молекулы из этого объема,  $n$  – концентрация молекул в диэлектрике,  $\langle \mathbf{p} \rangle$  – среднее значение  $\mathbf{p}_i$  в объеме  $\Delta V$ .

**Плотность объемных связанных зарядов** в поляризованном диэлектрике равна

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (4.1)$$

Она отлична от нуля только в случае неоднородной поляризации.

Ниже все связанные (поляризационные) заряды будут обозначаться штрихом (в учебниках встречаются также обозначения индексами "пол" или "св").

**Плотность поверхностных связанных зарядов  $\sigma'$**  на границе раздела двух диэлектриков равна

$$\sigma' = -\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = P_{1n} - P_{2n}, \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{n}_{12}$  – единичный вектор нормали, направленный из первой среды во вторую. Нормальная компонента вектора  $\mathbf{P}$  испытывает на границе раздела диэлектриков скачок, равный плотности связанного заряда.

**Теорема Гаусса для вектора поляризации:**

$$\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = -q', \quad (4.3)$$

где  $q'$  – полный связанный заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности  $S$ .

**Напряженность электрического поля в диэлектрике** – это сумма напряженности  $\mathbf{E}_0$  поля сторонних зарядов в данной точке в отсутствие диэлектрика и напряженности  $\mathbf{E}'$  от всех связанных зарядов, возникших в результате поляризации диэлектрика:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'.$$

Если поляризация вызвана сторонними зарядами, то поле индуцированных связанных зарядов направлено так, что всегда уменьшает напряженность поля сторонних зарядов, т.е.  $E < E_0$ . Поэтому это поле часто называют деполаризирующим полем.

**Диэлектрическая восприимчивость.** Во многих случаях поляризованность  $\mathbf{P}$  диэлектрика пропорциональна напряженности поля в диэлектрике  $\mathbf{E}$ , а свойства диэлектрика по всем направлениям можно считать одинаковыми (такой диэлектрик называется линейным изотропным). Для такого диэлектрика

$$\mathbf{P} = \varkappa \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (4.4)$$

где коэффициент  $\varkappa$  называется диэлектрической восприимчивостью. Это соотношение неприменимо к диэлектрикам с постоянной поляризованностью (например, к электретам), когда вектор  $\mathbf{P}$  определяется не внешним полем, а внутренними структурными факторами. В общем случае, который мы рассматривать не будем, связь векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$  тензорная и при больших величинах  $\mathbf{E}$  – нелинейная.

**Если внутри однородного и изотропного диэлектрического тела отсутствуют сторонние заряды,** то при воздействии на него произвольного электростатического поля в нем возникают только поверхностные связанные заряды  $\sigma' \neq 0$ , а плотность объемных связанных зарядов в любой точке равна нулю  $\rho' = 0$ .

**Вектор электрического смещения** или **вектор электрической индукции** (оба названия эквивалентны) определяется соотношением

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (4.5)$$

Если выполняется (4.4), то векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  связаны линейно:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (4.6)$$

Величина

$$\varepsilon = (1 + \varkappa) \quad (4.7)$$

называется относительной диэлектрической проницаемостью (часто ее сокращенно называют проницаемостью диэлектрика).

Вектор  $\mathbf{D}$  не является чисто полевым вектором, так как он учитывает поляризованность среды. Он является суммой двух совершенно различных по физическому смыслу слагаемых и поэтому не имеет глубокого физического смысла. Однако в математическом отношении использование векторного поля  $\mathbf{D}$  в ряде случаев упро-



щает расчеты электростатических полей в диэлектриках. Это связано с тем обстоятельством, что в определении вектора  $\mathbf{D}$  учтен вклад в электрическое поле от связанных зарядов. В однородных изотропных диэлектриках с линейной восприимчивостью, т.е. подчиняющихся соотношению (4.6), источниками векторного поля  $\mathbf{D}$  являются только сторонние заряды, поэтому в этом случае при нахождении поля  $\mathbf{D}$  можно как бы "забыть" о существовании связанных зарядов.

Для вектора  $\mathbf{D}$  имеет место дифференциальное соотношение

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (4.8)$$

где  $\rho$  – плотность *сторонних* зарядов.

**Свойства вектора электрического смещения.** В диэлектриках, подчиняющихся (4.6), векторное поле  $\mathbf{D}(r)$  потенциально и аналогично по свойствам электростатическому полю напряженности  $\mathbf{E}(r)$ . Это означает, что  $\operatorname{rot} \mathbf{D} = 0$ , а линии поля  $\mathbf{D}$  начинаются и заканчиваются на сторонних зарядах (или в бесконечности), а в точках без сторонних зарядов они непрерывны (включая и точки, в которых находятся связанные заряды). Поэтому для нахождения поля  $\mathbf{D}$  можно использовать все формулы, относящиеся к расчету напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  в вакууме, только подставлять в них нужно уже не все заряды, а только сторонние заряды, и убрать из этих формул множитель  $\epsilon_0$ .

Если же соотношение (4.6) в диэлектрике не выполняется, поле  $\mathbf{D}$  может иметь вихревую компоненту, у которой линии  $\mathbf{D}$  замкнуты и для возникновения которой не требуются свободные заряды. Например, такова ситуация в электретах, т.е. диэлектриках с постоянной поляризованностью, рассмотренных ниже (задача 4.3.14).

**Интегральная электростатическая теорема Гаусса для вектора  $\mathbf{D}$ :**

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q, \quad (4.9)$$

где  $q$  – полный *сторонний* заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности  $S$ . Теорема справедлива при любом расположении произвольной поверхности  $S$  относительно диэлектрических тел.

Если однородным диэлектриком заполнить весь объем между любыми эквипотенциальными поверхностями поля, существовавшего в отсутствие диэлектрика, то напряженность поля в диэлектрике будет в  $\epsilon$  раз меньше, чем она была в соответствующей точке до введения диэлектрика. В частности, для точечного заряда в безгра-

ничной однородной диэлектрической среде с проницаемостью  $\epsilon$  электрическое смещение и напряженность электрического поля будут равны

$$D(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \quad \text{и} \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2}. \quad (4.10)$$

Если все пространство между обкладками плоского, цилиндрического или сферического конденсатора заполнить однородным изотропным диэлектриком, то напряженность поля в диэлектрике будет в  $\epsilon$  раз меньше, чем напряженность поля в точно таком же конденсаторе до заполнения его диэлектриком, а соответственно, емкости конденсаторов будут в  $\epsilon$  раз больше.

**Граничные условия.** На границе раздела двух диэлектриков 1 и 2:

$$E_{2t} = E_{1t}, \quad (4.11)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad (4.12)$$

где  $\sigma$  – плотность сторонних зарядов на границе раздела, а вектор нормали  $\mathbf{n}$  направлен из первой среды во вторую.

Если на границе раздела двух диэлектриков отсутствуют сторонние заряды, то нормальная компонента вектора  $\mathbf{D}$  непрерывна при переходе через границу

$$D_{2n} = D_{1n} \quad (4.13)$$

Для такого случая выражение для плотности связанных поверхностных зарядов на границе (4.2) можно записать как

$$\sigma' = \epsilon_0(E_{2n} - E_{1n}) \quad (4.14)$$

Если  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  и поле направлено из первой среды во вторую, то  $\sigma' < 0$ . Если  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  и поле направлено из второй среды в первую, то  $\sigma' > 0$ . В том и другом случае поле во второй среде (с большей  $\epsilon$ ) слабее, чем в первой (где  $\epsilon$  меньше). При  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  знаки связанных зарядов надо заменить на противоположные (см. [1] §17).

## § 4.2 Основные типы задач (классификация)

4.1. Определение плотности поверхностных  $\sigma'$  и объемных  $\rho'$  поляризационных зарядов в диэлектрике, а также вектора поляризации  $\mathbf{P}$ .

4.2. Определение напряженности  $\mathbf{E}$ , потенциала  $\phi$  и вектора индукции  $\mathbf{D}$  в системах с однородными диэлектриками.

4.3. Определение емкости конденсаторов, заполненных неоднородным диэлектриком. Нахождение электрического поля в системах с неоднородным диэлектриком.

4.4. Определение напряженности поля внутри и вне диэлектрических тел, имеющих заданное статическое состояние поляризации.

### § 4.3 Методы решения и примеры решения задач.

#### Задачи типа 4.1

*Определение плотности поверхностных  $\sigma'$  и объемных  $\rho'$  поляризационных зарядов в диэлектрике, а также вектора поляризации  $\mathbf{P}$*

**Методы решения.** Использование формул (4.1) – (4.7). Эффективный прием – приравнять выражения для напряженности поля в диэлектрике, записанные в «макроскопическом» представлении (через известную диэлектрическую проницаемость диэлектрика) и в «микроскопическом» представлении (как суперпозицию напряженностей полей от сторонних и связанных зарядов).

**Задача 4.3.1 (базовая задача).** Металлическая сфера радиуса  $R$ , несущая заряд  $q$ , расположена в безграничной однородной диэлектрической среде с проницаемостью  $\varepsilon$ . Определить вектор поляризации  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  в произвольной точке среды, а также плотности поверхностных  $\sigma'$  и объемных  $\rho'$  связанных зарядов в диэлектрике.

#### Решение:

Внутри сферы ( $r < R$ ) зарядов нет, поэтому по теореме Гаусса напряженность электрического поля там равна нулю.

В произвольной точке, находящейся на расстоянии  $r > R$  от центра сферы, напряженность поля в диэлектрике будет такой же, как от точечного заряда  $q$ , помещенного в центр сферы, и определяется формулой (4.10). Используя (4.4), (4.7), получаем

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

В нашем случае диэлектрик изотропный и сторонних зарядов внутри него нет, поэтому объемных связанных зарядов в нем не

возникает:  $\rho' = 0$ . Этот вывод легко проверить независимо, вычислив дивергенцию вектора  $\mathbf{P}$  в сферических координатах

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 P = 0.$$

Для вычисления поверхностной плотности связанных зарядов  $\sigma'$  запишем два эквивалентные выражения для напряженности поля  $E$  в диэлектрике. Согласно (4.10), поле точечного заряда, эквивалентное полю заряженной сферы, в безграничном диэлектрике в  $\varepsilon$  раз меньше, чем в той же точке в отсутствие диэлектрика, т.е.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2}.$$

С другой стороны, эта напряженность поля реально создается сторонним зарядом  $q$  и поляризационным зарядом  $q'$ , образовавшимся на сферической границе диэлектрика

$$E = E_q + E_{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q + q'}{r^2}.$$

Приравнивая эти выражения, получаем

$$\frac{q}{\varepsilon r^2} = \frac{q + q'}{r^2} \quad \text{и} \quad q' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q$$

или  $\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$ , где  $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$ .

**Ответ:** для  $r > R$ :  $\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{q}{4\pi R^2}$   $\rho' = 0$ ;  $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

*Замечание 1.* Другой способ решения данной задачи основан на использовании соотношения (4.2):  $\sigma' = P_{1n} - P_{2n}$ . Поляризация внутри металла  $P_1 = 0$ , а вектор поляризации диэлектрика можно найти

из соотношения  $\mathbf{P} = \left( \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right) \mathbf{D}$ , где в силу симметрии задачи вектор

электрической индукции вне сферы  $\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r}$ , а внутри сферы равен нулю.

*Замечание 2.* Результат справедлив для сферы любого радиуса  $R$ . Если устремить  $R$  к нулю, то сохранится выражение для вектора

$\mathbf{P}$ , а полный поверхностный связанный заряд будет оставаться постоянным:  $q' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}q$ .

Если диэлектрик не безграничный, а представляет собой шаровой слой, внешний радиус которого равен  $R_1 > R$ , то на внешней границе диэлектрика появляется связанный заряд  $-q'$ , равный по величине и противоположный по знаку связанному заряду  $q'$ , находящемуся на внутренней поверхности слоя. Равенство этих зарядов сразу следует из теоремы Гаусса для вектора  $\mathbf{P}$  (4.3): если в качестве поверхности  $S$  взять концентрическую сферу, радиус которой превышает  $R_1$ , то полный связанный заряд внутри этой сферы равен нулю. За пределами диэлектрического слоя поле выглядит как поле точечного заряда  $q$ , расположенного в центре всех сфер, так как в этой области  $\mathbf{P} = 0$ .

**Задача 4.3.2 (базовая задача).** В плоский конденсатор параллельно обкладкам вставлена диэлектрическая пластинка из материала с проницаемостью  $\varepsilon$  (рис. 4.1). Определить величину вектора поляризации  $\mathbf{P}$  и плотности поверхностных  $\sigma'$  и объемных  $\rho'$  связанных зарядов в пластинке. Заряд конденсатора  $q$ , площадь пластин  $S$ .

### Решение

В плоском конденсаторе (рис. 4.1) поле считаем однородным (краевыми эффектами, как обычно, пренебрегаем). Из симметрии системы следует, что векторы всех полей направлены перпендикулярно к пластинам (т.е. по оси  $X$  на рис. 4.1), поляризованность диэлектрика однородна и поэтому объемная плотность связанных зарядов равна нулю.

Напряженность поля внутри диэлектрика  $E$  можно выразить двумя способами аналогично задаче 4.3.1. С учетом выбранного направления оси  $X$  и указанных на рис. 4.1 знаков зарядов, имеем:

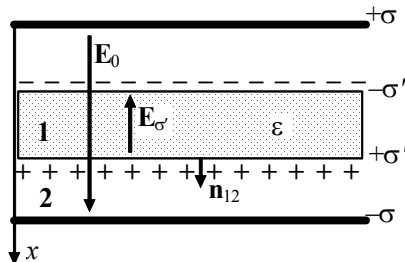


Рис. 4.1. Направления векторов электрического поля конденсатора  $\mathbf{E}_0$  и поляризованной диэлектрической пластины  $\mathbf{E}_\sigma$  (задача 4.3.2)

$$E = E_0 - E_{\sigma'} = \frac{E_0}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

где  $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$  напряженность в отсутствие диэлектрика.,  $\sigma = q/S$  – плотность свободного заряда на пластинах конденсатора.

Отсюда находим  $\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$ .

Вектор поляризации  $\mathbf{P}$  определим из (4.4):  $\mathbf{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$ , где  $\varepsilon = \varepsilon - 1$ , а  $\mathbf{E}$  – напряженность поля внутри диэлектрика:  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ .

Следовательно,  $P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$ , а направление вектора  $\mathbf{P}$  совпадает с направлением поля в конденсаторе. Этот же результат можно получить непосредственно из граничного условия (4.2). В нашем примере для нижней границы пластины можно записать (см. рис. 4.1)

$$\mathbf{P}_2 = 0, \quad \mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{P}_1 = \sigma' = \sigma \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} > 0.$$

Положительность результата означает совпадение направлений векторов нормали  $\mathbf{n}_{12}$  и  $\mathbf{P}_1$ .

Эти рассуждения не зависят от толщины диэлектрической пластинки. Поэтому полученные выводы применимы и в том случае, когда диэлектрик занимает все пространство между пластинами конденсатора.

**Ответ:**  $P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma, \quad \sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma, \quad \sigma = \frac{q}{S}$

*Замечание.* Поле вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  внутри конденсатора однородно и определяется только свободными зарядами пластин:  $D = \sigma$ . Отсюда можно найти поляризацию среды

$$P = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma.$$

**Задача 4.3.3.** Точечный заряд  $q$  находится в центре шара радиуса  $R$  из диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon_1$ . Шар окружен безграничным диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon_2$  (рис. 4.2). Найти поверхностную плотность связанных зарядов  $\sigma'$  на границе раздела этих диэлектриков.

**Решение**

Согласно (4.2)  $\sigma' = P_{1n} - P_{2n}$ , где  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$  – векторы поляризации обоих диэлектриков у границы  $r = R$ . Величины  $P_1$  и  $P_2$  совпадают с выражениями для поляризации, полученными в предыдущей задаче 4.3.1:

$$P_1(R) = \frac{q}{4\pi R^2} \left( \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} \right),$$

$$P_2(R) = \frac{q}{4\pi R^2} \left( \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \right).$$

Следовательно,

$$\sigma' = P_1(R) - P_2(R) = \frac{q}{4\pi R^2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

**Ответ:** 
$$\sigma' = \frac{q}{4\pi R^2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

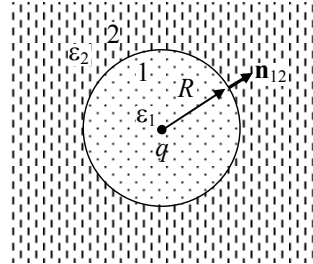


Рис. 4.2. Система, состоящая из точечного заряда  $q$ , диэлектрического шара и безграничного диэлектрика (задача 4.3.3)

*Замечание.* Величину поляризации сред можно сразу найти из соотношения  $\mathbf{P}_i = \left( \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i} \right) \mathbf{D}$ , где в данном случае для обеих областей

вектор электрической индукции  $\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r}$ .

**Задача 4.3.4.** Между обкладками плоского конденсатора находятся две прилегающие друг к другу диэлектрические пластинки, проницаемости которых равны  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . На пластинах конденсатора равномерно распределены заряды с поверхностной плотностью  $\sigma$  и  $-\sigma$ . Определить плотности  $\sigma'$  связанных зарядов на свободных поверхностях диэлектрических пластинок, а также на границе их раздела (рис. 4.3).

**Решение**

Для определения  $\sigma'$  используем граничное условие (4.2) для векторов поляризации  $P_1$  и  $P_2$ , а сами величины векторов  $P_1$  и  $P_2$  найдем из напряженностей соответствующих электрических полей (4.4).

Учитывая выбранное на *рис. 4.3* направление оси  $X$  и знаки зарядов, получаем, что вне диэлектрических пластин  $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ , а

$$\text{внутри пластинок 1 и 2 } E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}, \quad E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_2},$$

$$\text{откуда следует: } P_1 = \sigma \left( \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} \right), \quad P_2 = \sigma \left( \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \right).$$

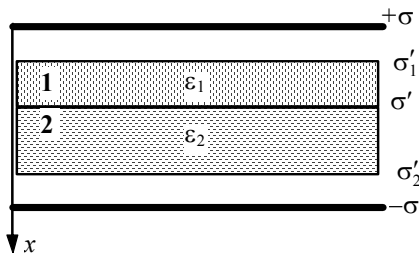
Используя (4.2), находим:

$$\sigma'_1 = -P_1 = -\sigma \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) < 0,$$

$$\sigma'_2 = P_2 = \sigma \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) > 0.$$

На границе раздела диэлектриков

$$\sigma'' = -\sigma'_1 - \sigma'_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sigma.$$



*Рис. 4.3.* Плоский конденсатор с двумя диэлектрическими прослойками (задача 4.3.4)

Это следует также из (4.3), если в качестве поверхности  $S$  взять поверхность внутри конденсатора, заключающую в себе оба диэлектрика (суммарный связанный заряд внутри такой поверхности должен быть равен нулю). Тот же результат легко получить из граничного условия (4.2), если использовать найденные выше значения  $P_1$  и  $P_2$ .

$$\text{Ответ: } \sigma'_1 = -\sigma \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_1} \right), \quad \sigma'_2 = \sigma \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_2} \right), \quad \sigma'' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sigma.$$

*Замечание.* Поле вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  внутри конденсатора однородно и определяется только свободными зарядами пластин:  $D = \sigma$ . Отсюда можно сразу найти поляризацию сред

$$P_i = \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i} D = \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i} \sigma.$$

**Задача 4.3.5.** Однородный изотропный диэлектрик с проницаемостью  $\varepsilon$  заполняет все нижнее полупространство. В вакууме на расстоянии  $h$  от его поверхности находится точечный заряд  $q$ . Определить поверхностную плотность поляризационных (связанных)



зарядов в произвольной точке границы, а также полный связанный заряд на поверхности диэлектрика.

**Решение**

Для ответа на первый вопрос используем непрерывность нормальной компоненты вектора индукции  $D_n$  (4.13) на границе раздела вакуум (среда 1) – диэлектрик (среда 2).

Рассмотрим напряженность поля в бесконечно малой окрестности произвольной точки  $A$ , лежащей на границе раздела (рис. 4.4). Ввиду цилиндрической симметрии системы достаточно задать лишь радиус  $x$ , на котором точка  $A$  находится от основания перпендикуляра  $O$ , опущенного из точки нахождения заряда на плоскую границу диэлектрика.

Пусть  $\sigma'(x)$  – плотность связанного заряда в точке  $A$ . Вблизи точки  $A$  напряженность поля будет суперпозицией поля  $E_q$  стороннего точечного заряда  $q$  и поля  $E'$  от всех связанных зарядов, появившихся на границе.

Напряженность  $E_q$  направлена по радиус-вектору, проведенному от заряда  $q$  в точку  $A$ , и равна

$$E_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

где  $r^2 = x^2 + h^2$ .

Связанные заряды, очевидно, будут распределены на плоскости неравно-

мерно. Нужная нам нормальная компонента поля (поле  $E'_{\perp}(x)$  на рис. 4.4) создается только поверхностными зарядами в непосредственной окрестности точки  $A$  и имеет величину  $E'(x) = \frac{\sigma'}{2\epsilon_0}$ . Поле от

всех остальных связанных зарядов плоскости в этой точке направлено горизонтально вдоль плоскости ( $E'_{\parallel}$  на рис. 4.4).

В первой среде (в вакууме) нормальная компонента вектора индукции, в соответствии с выбранным направлением нормали, равна согласно (4.6)

$$D_{1n} = \epsilon_0 E_{1n} = \epsilon_0 E_q \cos \alpha - \frac{\sigma'}{2} = \frac{1}{4\pi} \frac{qh}{r^3} - \frac{\sigma'}{2}.$$

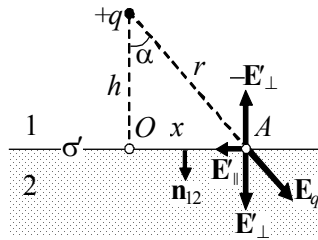


Рис.4.4. Напряженности полей, создаваемых в точке  $A$  сторонним зарядом  $q$  и поляризационными зарядами диэлектрика (задача 4.3.5)

Во второй среде (в диэлектрике)

$$D_{2n} = \varepsilon_0 \varepsilon E_{2n} = \varepsilon \left( \varepsilon_0 E_q \cos \alpha + \frac{\sigma'}{2} \right) = \varepsilon \left( \frac{1}{4\pi} \frac{qh}{r^3} + \frac{\sigma'}{2} \right).$$

Здесь учтено, что знак нормальных компонент поля  $\mathbf{E}'_{\perp}(x)$  по обе стороны границы противоположен. Из условия  $D_{1n} = D_{2n}$  находим:

$$\sigma'(x) = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{qh}{2\pi r^3} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{qh}{2\pi(x^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Для вычисления величины полного связанного заряда  $q'$  выделяем на плоскости кольцевую область с центром в точке  $O$ , расположенную между окружностями радиусов  $x$  и  $x + dx$ . Площадь этой области  $dS = 2\pi x dx$ , на ней находится заряд  $dq' = \sigma' dS$ . Полный заряд  $q'$  найдем, интегрируя это выражение по  $x$  от нуля до бесконечности:

$$q' = -qh \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = -q \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}$$

**Ответ:**  $\sigma'(x) = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{qh}{2\pi(x^2 + h^2)^{3/2}}, \quad q' = -q \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}.$

*Замечание.* Рассмотрим случай, когда заряд  $q$  находится на границе. При  $h \rightarrow 0$  из полученного результата видно, что  $\sigma' \rightarrow 0$  во всех точках, кроме  $x = 0$ . Действительно, при этом в произвольной точке  $A(x)$  нормальная компонента вектора напряженности  $\mathbf{E}_q$  обращается в нуль, ввиду чего условие непрерывности нормальной

компоненты вектора  $\mathbf{D}$  приводит к соотношению  $\frac{\sigma'}{2} = -\varepsilon \frac{\sigma'}{2}$ , кото-

рое может выполняться только при  $\sigma' = 0$ . Итак, если точечный заряд  $q$  находится на плоской границе раздела вакуума и безграничного диэлектрика, то  $\sigma' = 0$  везде, кроме точки  $x = 0$ .

Величина  $q'$  не зависит от  $h$ . Однако при  $h \rightarrow 0$  весь этот заряд собирается около точки  $x = 0$ . Поэтому напряженность поля можно вычислить как суперпозицию полей двух точечных зарядов  $q$  и  $q'$ , расположенных в одной точке  $x = 0$ . Поскольку других зарядов нет, создаваемое ими во всем пространстве поле изотропно, то есть в диэлектрике оно такое же, как в вакууме:

$$E(r) = E_1(r) = E_2(r) = \frac{q + q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{\varepsilon + 1} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Это означает, что силовые линии вектора  $\mathbf{E}$  расходятся из центра равномерно, а эквипотенциальные поверхности являются сферами.

Поле вектора  $\mathbf{D}$  легко получить из найденной формулы:

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad D_1 = \frac{1}{\varepsilon + 1} \frac{q}{2\pi r^2},$$

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad D_2 = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + 1)} \frac{q}{2\pi r^2}.$$

Картина линий вектора индукции  $\mathbf{D}$ , в отличие от картины поля  $\mathbf{E}$ , несимметрична. Поскольку  $D_2 > D_1$ , силовые линии индукции, расходясь радиально от центра, имеют большую плотность в диэлектрике, чем в вакууме.

### Задачи типа 4.2

*Определение напряженности поля  $\mathbf{E}$ , потенциала  $\varphi$  и вектора индукции  $\mathbf{D}$  в системах с однородными диэлектриками*

**Методы решения.** Использование известного или ранее рассчитанного распределения связанных зарядов и вектора поляризации. Использование граничных условий (4.11) – (4.14) и формул (4.6) – (4.9).

**Задача 4.3.6 (базовая задача).** Бесконечно большая пластина из однородного диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon$  заряжена равномерно сторонним зарядом с объемной плотностью  $\rho$ . Толщина пластины  $2d$ . Найти напряженность электрического поля и потенциал, создаваемые этой системой, а также объемную и поверхностную плотности связанного заряда.

#### Решение

Из симметрии системы следует, что напряженность и потенциал зависят только от одной координаты, выбранной в направлении нормали к слою. Пусть это будет ось  $x$  декартовой системы координат с началом в центре слоя. Напряженность поля такой системы при  $\varepsilon = 1$  была вычислена в задаче 1.3.11 (глава 1) на основе теоремы Гаусса:

$$E(|x| < d) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}, \quad E(|x| > d) = \pm \frac{\rho d}{\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля внутри диэлектрика в  $\varepsilon$  раз меньше:

$$E(|x| < d) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad E(|x| > d) = \pm \frac{\rho d}{\varepsilon_0}.$$

На границе раздела имеются связанные заряды, поэтому напряженность испытывает здесь скачок. Распределение потенциала найдем, применяя формулу (2.17) из гл. 2:

$$\varphi(x) = \varphi(0) - \int_0^x E dx.$$

Если принять, что  $\varphi(0) = 0$ , получим:

$$\varphi(|x| \leq d) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon},$$

$$\varphi(x \geq d) = -\left(\frac{\rho d^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} + \frac{\rho d}{\varepsilon_0}(x-d)\right) = -\frac{\rho d}{\varepsilon_0} \left(\frac{d}{2\varepsilon} + x - d\right).$$

Используя (4.4), находим  $P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E$  при  $x < d$  (и, конечно,  $P = 0$  при  $x > d$ ). Подставляя найденное значение  $E$ , получаем:

$$P(x) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho x.$$

С помощью (4.1) устанавливаем величину плотности объемного связанного заряда:

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{dP}{dx} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho,$$

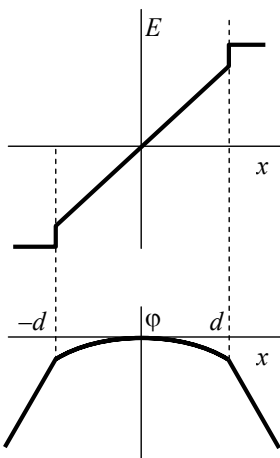
а с помощью (4.2) – плотность поверхностного связанного заряда:

$$\sigma' = -P_n(d) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho d.$$

Графики зависимостей  $E(x)$  и  $\varphi(x)$  представлены на *рис. 4.5*.

**Ответ:**

$$x < d: \quad E(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}, \quad \varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad \rho' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho = \text{const};$$



*Рис. 4.5.* Графики зависимостей  $E(x)$  и  $\varphi(x)$  (задача 4.3.6)

$$x > d: \quad E(x) = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}, \quad \varphi(x) = -\frac{\rho d}{\varepsilon_0} \left( \frac{d}{2\varepsilon} + x - d \right);$$

$$x = d: \quad \sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho d.$$

**Задача 4.3.7.** Однородный диэлектрик с проницаемостью  $\varepsilon$  имеет вид сферического слоя с радиусами  $a$  и  $b$ , причем  $a < b$ . Найти распределение напряженности поля и потенциала, если в объеме слоя равномерно размещен сторонний заряд с плотностью  $\rho$ .

### Решение

Из симметрии системы следует, что напряженность и потенциал будут функциями лишь одной переменной – расстояния  $r$  от центра симметрии. Вычислим напряженность поля по теореме Гаусса при  $\varepsilon = 1$ :

$$E_1 = 0 \quad \text{при } r < a,$$

$$E_2 = \rho \frac{r^3 - a^3}{3\varepsilon_0 r^2}, \quad \text{при } a < r < b,$$

$$E_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{при } r > b.$$

Здесь  $q = \frac{4\pi}{3} \rho (b^3 - a^3)$  – полный

заряд сферического слоя. При наличии диэлектрика напряженности  $E_1$  и  $E_3$  не изменятся, а  $E_2$  будет в  $\varepsilon$  раз меньше. График зависимости  $E(r)$  представлен на рис. 4.6а.

Примем значение потенциала в бесконечно удаленной точке равным нулю. Тогда

$$\text{при } r > b \quad \varphi_3(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \rho \frac{b^3 - a^3}{3\varepsilon_0 r},$$

$$\text{при } a < r < b \quad \varphi_2(r) = -\int_b^r E_2 dr + \varphi_3(b),$$

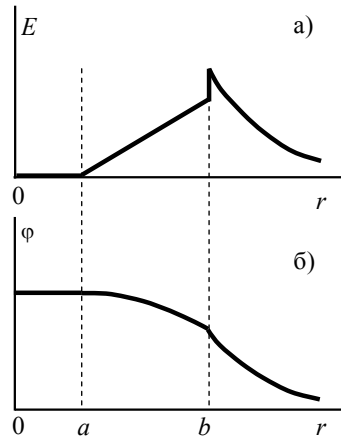


Рис. 4.6. Графики зависимостей  $E(r)$  и  $\varphi(r)$  (задача 4.3.7)

и, наконец,  $\varphi_1 = \text{const}$  при  $r < a$ . Из условия непрерывности потенциала следует, что  $\varphi_1 = \varphi_2(a)$ . Вычисляя интеграл для  $\varphi_2$ , находим

**Ответ:**

$$\varphi_2(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0} \left( \frac{b^2}{2} (2\varepsilon + 1) - \frac{a^3}{b} (\varepsilon - 1) - \frac{r^2}{2} - \frac{a^3}{r} \right),$$

$$\varphi_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0} \left( \frac{b^2}{2} (2\varepsilon + 1) - \frac{a^3}{b} (\varepsilon - 1) - \frac{3a^2}{2} \right).$$

График функции  $\varphi(r)$  представлен на *рис. 4.6 б*.

**Задача 4.3.8.** Две параллельные пластины ничтожно малой толщины заряжены одноименно, причем поверхностная плотность заряда на верхней пластине  $\sigma_1 = 3 \text{ мкКл/м}^2$ , а на нижней  $\sigma_2 = 6 \text{ мкКл/м}^2$ . Расстояние между пластинами  $h = 1 \text{ см}$  мало по сравнению с линейными размерами пластин. Между пластинами вставлена плоскопараллельная парафиновая пластинка толщиной  $d = 5 \text{ мм}$  (*рис.4.7*). Диэлектрическая проницаемость парафина  $\varepsilon = 2$ . Определить напряженность поля  $\mathbf{E}_1$  между пластинами вне диэлектрика, напряженность поля  $\mathbf{E}_2$  внутри диэлектрика и разность потенциалов между пластинами.

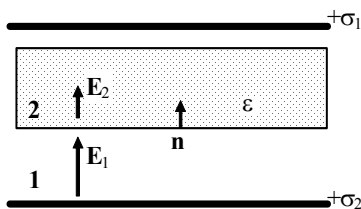
### Решение

Поскольку на пластинах размещены одноименные заряды, векторы напряженности от пластин направлены навстречу друг другу и суммарная напряженность поля вне диэлектрика направлена от нижней пластины (где величина заряда больше) к верхней и равна

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0} \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, направленный от пластины с большим зарядом к пластине с меньшим зарядом. Внутри диэлектрика величина напряженности в  $\varepsilon$  раз меньше:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon} \mathbf{n}.$$



*Рис. 4.7. Напряженности полей, вне диэлектрика  $\mathbf{E}_1$  и внутри него  $\mathbf{E}_2$  (задача 4.3.8).*

Поле в пространстве между пластинами однородное, поэтому искомая разность потенциалов равна

$$\Delta\varphi = E_1(h - d) + E_2d.$$

Подставляя численные значения всех величин, находим приближенно:  $E_1 = 170$  кВ/м,  $E_2 = 85$  кВ/м,  $\Delta\varphi = 1,3$  кВ. Величины напряженности существенно меньше диэлектрической прочности воздуха, которая приблизительно равна 30 кВ/см.

$$\text{Ответ: } E_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0} = 170 \text{ кВ/м, } E_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon} = 85 \text{ кВ/м,}$$

$$\Delta\varphi = E_1(h - d) + E_2d = 1,3 \text{ кВ.}$$

*Дополнение.* Определим силу, действующую на каждую пластину. Из определения напряженности следует, что силу можно рассчитать, если известен заряд, на который действует сила, и напряженность этого действующего поля. В нашем случае заряд первой пластины равен  $q_1 = \sigma_1 S$ , где  $S$  – площадь пластин. На этот заряд действует поле, создаваемое второй пластиной. Напряженность этого поля равна  $E = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$ . В итоге находим:

$$F = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{2\varepsilon_0} S.$$

Из численных данных можно найти лишь плотность действующей силы, т.е. силу, приходящуюся на единицу площади (электрическое давление). Она равна  $f = F/S = 0,5$  Па.

### Задачи типа 4.3

*Определение емкости конденсаторов, заполненных неоднородным диэлектриком*

#### **Методы решения:**

1) использование эквивалентных схем, которые представляют неоднородно заполненный диэлектриком конденсатор как систему соединенных между собой конденсаторов, заполненных диэлектриком однородно. После этого применяются формулы сложения емкостей конденсаторов при последовательном и параллельном их соединении (см. §3.1. главы 3).

2) Исходя из зарядов на проводниках ( $\pm q$  в случае конденсатора), найти поле  $\mathbf{D}$ , потом поле  $\mathbf{E}$  и из него разность потенциалов  $\Delta\varphi$ . Емкость конденсатора равна  $C = q/\Delta\varphi$ .

**Задача 4.3.9 (базовая задача).** Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектриков. Толщина слоя первого диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon_1$  равна  $h_1$ , толщина слоя второго диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon_2$  равна  $h_2$  (рис. 4.8). Площадь каждой обкладки равна  $S$ . Найти емкость  $C$  конденсатора.

### Решение

Пусть на пластины конденсатора помещены заряды  $+q$  и  $-q$ . Тогда напряженность поля в первом диэлектрике равна  $E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1 \varepsilon_0}$ , а во втором

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2 \varepsilon_0}.$$

Разность потенциалов между пластинами

$$\Delta\varphi = E_1 h_1 + E_2 h_2,$$

следовательно,

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{h_2 \varepsilon_1 + h_1 \varepsilon_2}.$$

Альтернативный подход к решению этой задачи состоит в следующем. Плоская граница между диэлектриками является эквипотенциальной поверхностью. Поэтому нашу систему можно рассматривать как два последовательно соединенных плоских конденсатора с емкостями

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{h_1} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{h_2}.$$

Применяя формулу сложения емкостей  $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$ , получаем такой же ответ.

**Ответ:** 
$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{h_2 \varepsilon_1 + h_1 \varepsilon_2}.$$

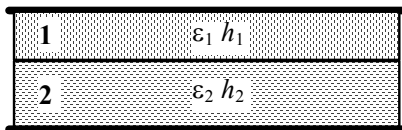


Рис. 4.8. Конденсатор, заполненный двумя слоями диэлектриков (задача 4.3.9)



**Задача 4.3.10.** Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, проницаемость которого меняется по линейному закону от значения  $\varepsilon_1$  у одной пластины до значения  $\varepsilon_2$  ( $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ ) у другой. Расстояние между пластинами  $d$ , площадь каждой пластины равна  $S$ . Найти емкость  $C$  конденсатора.

### Решение

*Способ 1.* Учитывая симметрию системы, направим ось  $x$  декартовой системы координат по нормали к плоскости пластин конденсатора, а начало отсчета  $0$  выберем в точке пересечения оси  $x$  с пластиной, около которой проницаемость диэлектрика наименьшая (см. рис. 4.9).

Идея решения задачи состоит в том, чтобы заданный конденсатор рассмотреть как систему последовательно соединенных плоских конденсаторов с бесконечно малыми расстояниями  $\Delta x$  между их обкладками. В таком объеме диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$  можно считать постоянной и для вычисления емкости применить обычную формулу емкости плоского конденсатора.

Выделим такой тонкий слой  $\Delta x$  на произвольном расстоянии  $x$  от начала координат. Обратная емкость такого тонкого конденсатора равна

$$\Delta\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{\Delta x}{\varepsilon_0 \varepsilon(x) S},$$

где  $\varepsilon(x) = \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x/d)$ . При последовательном соединении конденсаторов суммируются величины, обратные емкости, что для непрерывного распределения конденсаторов в пределе  $\Delta x \rightarrow dx$  сводится к интегрированию по всем  $x$  от нуля до  $d$ :

$$\frac{1}{C} = \int_0^d \frac{dx}{C(x)}$$

Учитывая, что  $dx = \frac{d}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} d\varepsilon$ , получаем

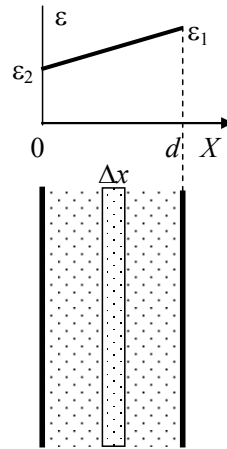


Рис. 4.9. Зависимость диэлектрической проницаемости от координаты в конденсаторе задачи 4.3.10

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)S} \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{d}{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)S} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

*Способ 2.* Пусть на обкладках конденсатора находятся заряды  $\pm q$  и поверхностная плотность заряда  $\sigma = \pm q/S$ . Тогда  $D = \sigma$ , и далее получаем

$$E(x) = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon(x)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{1}{\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x/d)},$$

$$\Delta\varphi = \int_0^d E(x) dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)S}{d \ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}.$$

**Ответ:**  $C = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)S}{d \ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}.$

**Задача 4.3.11 (базовая задача).** Первоначально в плоском воздушном конденсаторе, заряженном и отсоединенном от источника ЭДС, напряженность поля равна  $E_0$ . Затем половину пространства между пластинами конденсатора заполняют однородным диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$  так, что плоская граница диэлектрика параллельна пластинам конденсатора (рис. 4.10а).

- а) Найти модули векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  внутри и вне диэлектрика.  
 б) Ответить на те же вопросы, если диэлектрик занимает все расстояние между пластинами в половине объема конденсатора (рис. 4.10б).

### Решение

В случае а) из результатов задачи 4.3.2 следует, что напряженность поля в воздушном промежутке  $E_1 = E_0 = \sigma/\varepsilon_0$  не изменится, а в диэлектрике станет меньше в  $\varepsilon$  раз за счет поля появившихся связанных зарядов  $E_2 = E_0/\varepsilon$ .

Распределение сторонних зарядов на обкладках конденсатора не изменилось, поэтому не изменятся и силовые линии вектора индукции  $\mathbf{D}$ . Из условия непрерывности  $D_n$  на границе диэлектрика заключаем, что в любой точке внутри конденсатора  $D_1 = D_2 = \varepsilon_0 E_0$ .

Разность потенциалов между обкладками уменьшилась и стала равной

$$\Delta\varphi = \frac{d}{2} E_0 \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right)$$

вместо первоначальной  $\Delta\varphi_0 = E_0 d$ , где  $d$  – расстояние между пластинами конденсатора. Такой результат связан с тем, что электрическое поле втягивает диэлектрик внутрь конденсатора и совершает работу, что приводит к уменьшению потенциальной энергии системы, пропорциональной разности потенциалов. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующей главе.

В случае б) произойдет перераспределение сторонних зарядов на пластинах конденсатора так, чтобы напряженность поля в воздушном промежутке и в диэлектрике стала одинаковой:  $E_1 = E_2 = E$ . К этому выводу можно прийти, рассматривая разность потенциалов между пластинами, которая равна  $\Delta\varphi = Ed$  независимо от пути перехода от одной пластины к другой – через воздушный промежуток или через диэлектрик. В обозначениях рис. 4.10б.

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2 - \sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Отсюда получаем, что  $\varepsilon\sigma_1 = \sigma_2$ . По условию, диэлектрик заполняет половину объема конденсатора. Поэтому по закону сохранения заряда исходная плотность  $\sigma = \varepsilon_0 E_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ . Таким образом,

$$\sigma_1 = \frac{2\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon + 1}, \text{ а } E = \frac{2E_0}{\varepsilon + 1}.$$

$$D_1 = \frac{2}{\varepsilon + 1} \varepsilon_0 E_0 \text{ и } D_2 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} \varepsilon_0 E_0.$$

Разность потенциалов здесь равна  $\Delta\varphi = Ed = \frac{2}{\varepsilon + 1} E_0 d$ ; она меньше, чем была первоначально. Как и в предыдущем случае, в

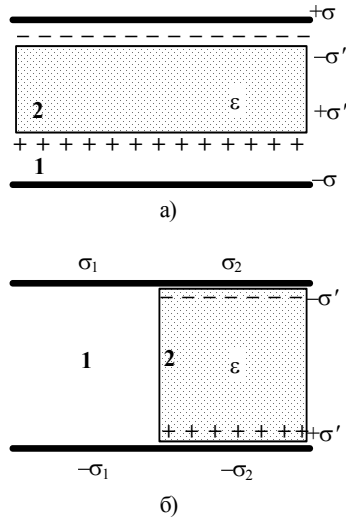


Рис. 4.10. Конденсаторы, частично заполненные диэлектриками (задача 4.3.11)

процессе заполнения конденсатора диэлектриком электрические силы совершают работу, и потенциальная энергия системы уменьшается.

**Ответ:** а)  $E_1 = E_0$ ,  $E_2 = \frac{E_0}{\varepsilon}$ ;  $D_1 = D_2 = \varepsilon_0 E_0$ ;

б)  $E_1 = E_2 = \frac{2E_0}{\varepsilon + 1}$ ;  $D_1 = \frac{2}{\varepsilon + 1} \varepsilon_0 E_0$ ,  $D_2 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} \varepsilon_0 E_0$ .

**Задача 4.3.12.** Решить предыдущую задачу, считая, что конденсатор с самого начала подключен к источнику ЭДС и разность потенциалов между обкладками не меняется.

### Решение

Разность потенциалов между обкладками вначале равна  $\Delta\varphi = E_0 d$  и в дальнейшем не меняется. В случае а) после внесения диэлектрика в конденсатор напряженность поля в диэлектрике  $E_2$  будет в  $\varepsilon$  раз меньше напряженности  $E_1$  поля в воздушном промежутке:  $E_2 = \frac{E_1}{\varepsilon}$ . Если выразить  $\Delta\varphi$  через  $E_1$  и  $E_2$ , то получим:

$$\Delta\varphi = \frac{d}{2}(E_1 + E_2) = E_1 \frac{d}{2} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Учитывая неизменность  $\Delta\varphi$ , находим отсюда

$$E_1 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} E_0, \quad E_2 = \frac{2}{\varepsilon + 1} E_0.$$

Из определения вектора  $\mathbf{D}$  получаем

$$D_1 = D_2 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} \varepsilon_0 E_0.$$

В случае б) напряженности  $E_1$  и  $E_2$  одинаковы (как и в предыдущей задаче). Из постоянства  $\Delta\varphi$  сразу следует вывод:  $E_1 = E_2 = E_0$ . Следовательно,  $D_1 = \varepsilon_0 E_0$  и  $D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon E_0$ .

**Ответ:** а)  $E_1 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} E_0$ ,  $E_2 = \frac{2}{\varepsilon + 1} E_0$ ,  $D_1 = D_2 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} \varepsilon_0 E_0$ .

б)  $E_1 = E_2 = E_0$ ,  $D_1 = \varepsilon_0 E_0$ ,  $D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon E_0$ .

**Задача 4.3.13.** Сферический конденсатор наполовину заполнен жидким диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon = 7$  (рис. 4.11). Радиусы

поверхностей: внутренней  $R_1 = 5$  см, внешней  $R_2 = 6$  см. Определить емкость конденсатора, пренебрегая искривлением линий поля на границе диэлектрика.

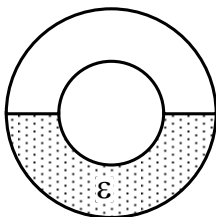


Рис. 4.11. Сферический конденсатор, частично заполненный жидким диэлектриком (задача 4.3.13)

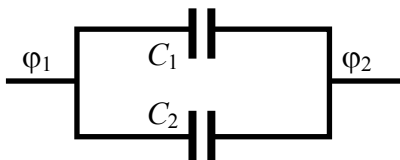


Рис. 4.12. Эквивалентная схема к задаче 4.3.13

### Решение

Обкладки конденсатора являются эквипотенциальными поверхностями, поэтому конденсатор можно рассматривать как систему двух параллельно включенных конденсаторов (рис. 4.12), у которых одна пара обкладок имеет потенциал  $\varphi_1$  внешней поверхности рассматриваемого сферического конденсатора, а вторая пара – потенциал внутренней поверхности  $\varphi_2$ . Так как диэлектрик заполняет сферический конденсатор наполовину, емкости  $C_1$  и  $C_2$  равны (гл. 3, (3.9))

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \quad C_2 = \epsilon C_1$$

соответственно. Отсюда получаем:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} (\epsilon + 1).$$

**Ответ:** 
$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} (\epsilon + 1).$$

### Задачи типа 4.4

*Определение напряженности поля внутри и вне диэлектрика с заданным статическим состоянием поляризации*

**Метод решения:** Использование формул (4.1) и (4.2) для определения плотности связанных зарядов и затем расчет как в задачах типа 4.2.2.

**Задача 4.3.14.** Пластинка из электрета толщины  $h$  помещена внутри плоского воздушного конденсатора, обкладки которого соединены между собой. Поляризованность пластинки  $\mathbf{P}$  направлена по нормали к ее плоскости. Определить напряженность и индукцию электрического поля внутри и вне пластинки. Расстояние между обкладками конденсатора равно  $d$ .

### Решение

На поверхностях пластинки существуют связанные заряды с плотностью  $\sigma' = \pm P$  (рис. 4.13). За счет электростатической индукции на обкладках конденсатора появляются заряды противоположных знаков с некоторой плотностью  $\sigma$ . Известно, что на поляризованность электрета внешнее поле влияет слабо, поэтому изменением  $P$  за счет поля индуцированных зарядов можно пренебречь. Идея решения задачи состоит в том, что потенциалы обкладок конденсатора равны. Это дает уравнение

$$E_1(d - h) + E_2h = 0.$$

где  $E_1$  – напряженность поля вне пластины ( $E_1 = \sigma/\epsilon_0$ ),  $E_2$  – внутри ( $E_2 = (\sigma - \sigma')/\epsilon_0$ ). С учетом направлений напряженностей и равенства  $\sigma' = P$  находим:

$$E_1(d - h) + \left(E_1 - \frac{P}{\epsilon_0}\right)h = 0.$$

откуда  $E_1 = \frac{P}{\epsilon_0} \frac{h}{d}$ . Следовательно,  $E_2 = -\frac{P}{\epsilon_0} \frac{d - h}{d}$ .

Теперь легко найти величину плотности индуцированных на обкладках конденсатора зарядов:  $\sigma = \pm P \frac{h}{d}$ , положительный заряд – на нижней обкладке, отрицательный – на верхней. Внутри конденсатора свободные заряды отсутствуют, поэтому линии вектора  $\mathbf{D}$  непрерывно проходят от нижней обкладки до верхней обкладки параллельно вектору  $\mathbf{P}$ . Вектор  $\mathbf{D}_1$  в воздушном промежутке нахо-

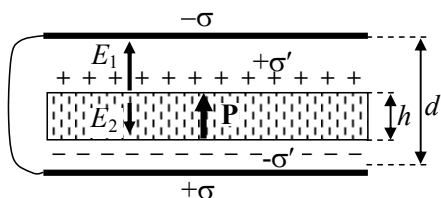


Рис. 4.13. Система, состоящая из конденсатора и пластинки из электрета (задача 4.3.14)

дим из (4.6)  $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 = \mathbf{P} \frac{h}{d}$ . Для вектора  $\mathbf{D}_2$  в электрете соотношение (4.6) неприменимо, поэтому нужно использовать общее определение (4.5)

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_2 + \mathbf{P} = \mathbf{P} \frac{h}{d}.$$

Разумеется,  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2$  из условия непрерывности нормальной компоненты вектора индукции на границе диэлектрика.

**Ответ:** вне пластинки:  $\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{P} h}{\varepsilon_0 d}$ ;

внутри:  $\mathbf{E}_2 = -\frac{\mathbf{P} d - h}{\varepsilon_0 d}$ ;  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{P} \frac{h}{d}$ .

**Задача 4.3.15 (базовая задача).** Найти напряженность электрического поля в центре прямого круглого цилиндра длиной  $h$  и радиусом  $R$ , поляризованность которого параллельна его оси, однородна и равна  $\mathbf{P}$  (рис. 4.14).

### Решение

Из условия однородной поляризованности следует, что плотность объемных связанных зарядов внутри цилиндра равна нулю. На торцах цилиндра находятся противоположные по знаку поверхностные связанные заряды, распределенные равномерно с плотностью  $\sigma' = \pm P$ . Таким образом, напряженность поля в центре цилиндра равна сумме напряженностей, создаваемых двумя противоположно заряженными дисками на их общей оси. Напряженность на оси диска вычислена в задаче 1.3.6 (глава 1) и равна

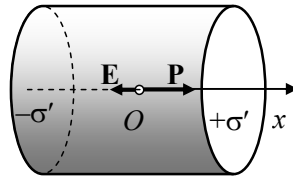


Рис. 4.14. Векторы напряженности поля  $\mathbf{E}$  и поляризованности  $\mathbf{P}$  на оси однородно поляризованного цилиндра (задача 4.3.15)

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right),$$

где  $R$  – радиус диска, а  $x$  – расстояние вдоль оси до плоскости диска. В нашем случае  $x = h/2$ , откуда получаем ответ:

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4R^2}} \right).$$

Поляризованный цилиндр можно представить себе как результат малого сдвига всех положительных зарядов относительно всех его отрицательных зарядов. Видим, что вектор напряженности поля  $\mathbf{E}$ , создаваемой поляризованностью  $\mathbf{P}$ , направлен противоположно вектору  $\mathbf{P}$ . Поэтому поле от связанных зарядов часто называют деполаризующим полем.

**Ответ:** 
$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4R^2}} \right).$$

**Задача 4.3.16.** Поляризованность  $\mathbf{P}$  в предыдущей задаче направлена перпендикулярно оси цилиндра. Найти напряженность поля в центре цилиндра.

### Решение

Из условия задачи следует, что связанные заряды возникнут только на боковой поверхности цилиндра. Плотность связанных зарядов определяется формулой (4.2) и равна  $\sigma' = (\mathbf{P}\mathbf{n}) = P \cos \varphi$ , где  $\varphi$  – азимутальный угол, а  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности цилиндра (рис. 4.15).

Для вычисления напряженности в центре цилиндра надо представить боковую поверхность цилиндра в виде последовательности бесконечно узких колец с зарядом, распределенным на них с линейной плотностью  $d\tau = \sigma' dx$ , и воспользоваться результатом решения задачи 1.3.21 (глава 1), где вычислена напряженность поля на оси такого кольца:

$$dE = \frac{d\tau}{4\varepsilon_0 R \left( 1 + \frac{x^2}{R^2} \right)^{3/2}},$$

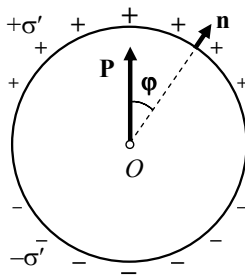


Рис. 4.15. Распределение связанных зарядов на боковой поверхности однородно поляризованного цилиндра (задача 4.3.16)



где  $x$  – расстояние от плоскости кольца до точки наблюдения  $O$  (в нашем случае это центр цилиндра (рис. 4.16)). Полную напряженность поля в центре цилиндра найдем, интегрируя это выражение по всем  $x$  от  $-h/2$  до  $+h/2$ . Как и в предыдущей задаче, направление вектора  $\mathbf{E}$  противоположно направлению вектора  $\mathbf{P}$ . С учетом этого обстоятельства получаем

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}h}{2\varepsilon_0\sqrt{h^2 + 4R^2}}.$$

Если цилиндр очень длинный ( $h \rightarrow \infty$ ), то напряженность поля внутри него будет однородной и равной  $\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{2\varepsilon_0}$ .

**Ответ:** 
$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}h}{2\varepsilon_0\sqrt{h^2 + 4R^2}}.$$

**Задача 4.3.17 (базовая задача).** Диэлектрический шар поляризован однородно с вектором поляризации  $\mathbf{P}$ . Найти напряженность электрического поля внутри шара.

### Решение

Из (4.2) следует, что на шаре имеются поверхностные заряды, плотность которых  $\sigma' = (\mathbf{P}\mathbf{n}) = P\cos\vartheta$ , где  $\vartheta$  – полярный угол относительно вектора  $\mathbf{P}$ , а  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности шара.

Данная задача легко сводится к ранее рассмотренной в главе 1 задаче 1.3.17. Указанную выше плотность поверхностных зарядов можно смоделировать следующим образом. Возьмем два шара, однородно заряженных одинаковой по величине объемной плотностью заряда  $\rho$ , но противоположного знака.

Сместим центр отрицательно заряженного шара  $O'$  относительно центра положительного шара  $O$  на малый вектор  $\mathbf{a}$  против направления  $\mathbf{P}$  (рис. 1.17). Тогда внутри области пересечения ша-

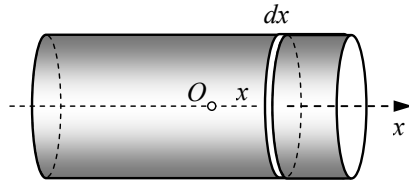


Рис. 4.16. К вычислению напряженности электрического поля в центре однородно поляризованного цилиндра (задача 4.3.16)

ров получится суммарная нулевая плотность заряда, а толщина поверхностного слоя некомпенсированного заряда в первом приближении будет равна  $h(\vartheta) = a \cos \vartheta$ , что эквивалентно поверхностной плотности заряда  $\sigma = \rho h(\vartheta) = \rho a \cos \vartheta$ . Очевидно, что для получения приведенной выше плотности поверхностного заряда нужно положить  $P = \rho a$ , или в векторном виде  $\mathbf{P} = -\rho \mathbf{a}$ . При  $a \rightarrow 0$  данная система по распределению поляризационных зарядов эквивалентна нашей задаче.

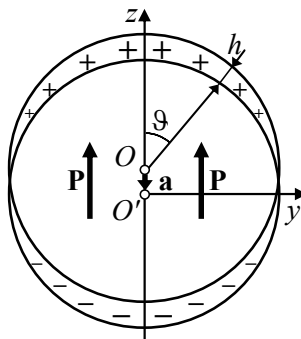


Рис. 1.17. К вычислению напряженности поля внутри однородно поляризованного шара (задача 4.3.17)

В задаче 1.3.17 было найдено электрическое поле в области пересечения двух шаров, равномерно заряженных равной по модулю, но противоположной по знаку плотностью зарядов  $\pm \rho$ , центры которых смещены относительно друг друга на вектор  $\mathbf{a}$ . Было получено, что силовые линии этого поля параллельны  $\mathbf{a}$ , его напряженность  $\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{a}$ . Используя это, можно сразу написать ответ для

данной задачи  $\mathbf{E} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$ .

**Ответ:**  $\mathbf{E} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$ .

*Замечание:* электрическое поле, порожденное поляризацией материала тела, называется деполяризующим. При однородной поляризации тела это поле будет однородным только для тел в форме эллипсоида или его частных случаев – шара или сфероида. Для эллипсоида  $\mathbf{E} = -\hat{N}\mathbf{P}$ , где  $\hat{N}$  – тензор деполяризации формы. В главных осях эллипсоида тензор  $\hat{N}$  диагонален и сумма диагональных элементов всегда равна 1. Поэтому в шаре все коэффициенты деполяризации равны  $1/3$ , что и было получено в данной задаче.

Аналогичным способом можно решить задачу для длинного цилиндра с поперечной поляризацией (без учета неоднородности

поля на торцах). В этом случае коэффициенты деполяризации в его поперечном сечении равны  $1/2$ , а продольный равен нулю (это используется далее в задаче 4.4.13).

**Задача 4.3.18.** В однородное электрическое поле напряженности  $\mathbf{E}_0$  поместили однородный диэлектрический шар, проницаемость которого равна  $\varepsilon$ . Найти напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля внутри шара и вектор поляризации  $\mathbf{P}$  диэлектрика.

### Решение

Шар представляет собой диэлектрик, для которого выполняются соотношения (4.4) и (4.7):  $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}$  – полное электрическое поле внутри шара,  $\mathbf{E}_1$  – поле, созданное поляризационными поверхностными зарядами и найденное в предыдущей задаче:  $\mathbf{E}_1 = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$ . Подставляя выражение для  $\mathbf{E}_1$  и выполняя алгебраические преобразования, находим:

$$\text{Ответ: } \mathbf{P} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0; \quad \mathbf{E} = 3 \frac{1}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0.$$

*Замечание:* Обратите внимание, что вектор  $\mathbf{P}$  определяется напряженностью *полного* поля  $\mathbf{E}$  внутри тела.

**Задача 4.3.19.** Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$ . Внутри диэлектрика имеется сферическая полость. На пластинах конденсатора равномерно распределены заряды с плотностями  $\sigma$  и  $-\sigma$ . Найти напряженность электрического поля в полости  $\mathbf{E}_0$ .

### Решение

Напряженность поля в полости  $\mathbf{E}_0$  можно представить как разность векторов напряженности однородного поля  $\mathbf{E}$  в конденсаторе с диэлектриком без полости и поля  $\mathbf{E}_1$ , созданного однородно поляризованным шаром из диэлектрика (рис. 4.18). Поле  $\mathbf{E}$  вычислено в задаче 4.3.2 и равно  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ .

Поле  $E_1$  было вычислено в задаче 4.3.17 и равно  $E_1 = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$ ,

где  $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E}$ . Отсюда следует:

$$E_0 = E - E_1 = \sigma \frac{\varepsilon + 2}{3\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

**Ответ:** Поле в полости однородно, сонаправлено с внешним полем и равно по величине  $E_0 = \frac{\varepsilon + 2}{3\varepsilon} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ .

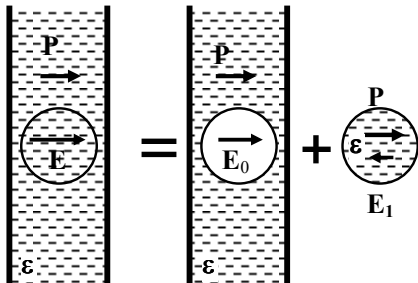


Рис. 4.18. Вычисление напряжённости поля в полости внутри диэлектрика (задача 4.3.19)

## § 4.4. Задачи для самостоятельного решения

**4.4.1.** Сторонние заряды равномерно распределены с объёмной плотностью  $\rho > 0$  по шару радиуса  $R$  из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon$ . Найти:

а) модуль вектора напряжённости электрического поля как функцию расстояния  $r$  от центра шара; изобразить примерные графики зависимостей  $E(r)$  и  $\varphi(r)$ ;

б) объёмную и поверхностную плотности связанных зарядов.

**Ответ:** а)  $E = \frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0} r$  при  $r < R$ ;

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \text{ при } r > R;$$

$$\text{б) } \rho' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho, \quad \sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{3\varepsilon} \rho R.$$

**4.4.2** Бесконечно большая пластина из однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  заряжена равномерно с объёмной плотностью  $\rho$ . Толщина пластины  $2d$ . Найти поверхностную и объёмную плотности связанного заряда.

**Ответ:**  $\rho' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho$ ;  $\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho d$ .

**4.4.3** Обкладкам плоского конденсатора сообщаются заряды  $+q$  и  $-q$ . Зазор между обкладками ширины  $d$  заполнен изотропным веществом, диэлектрическая проницаемость которого  $\varepsilon(x)$  изменяется в перпендикулярном к обкладкам направлении  $x$  по линейному закону. В непосредственной близости к положительно заряженной обкладке  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , в непосредственной близости к отрицательной обкладке  $\varepsilon = \varepsilon_2$ . Найти объёмную плотность связанных зарядов  $\rho'$  как функцию  $x$ . Определить суммарный связанный заряд  $q'$ , возникающий внутри диэлектрика. Площадь каждой обкладки равна  $S$ .

**Ответ:** 
$$\rho' = -\frac{q}{\varepsilon^2 S} \frac{d\varepsilon}{dx} = -\frac{q}{\varepsilon^2 S} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}, \quad q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} q.$$

**4.4.4** Пространство между обкладками цилиндрического конденсатора с радиусами  $R_1, R_3$  ( $R_1 < R_3$ ), заполнено средой с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , которая зависит от расстояния от центра следующим образом:  $\varepsilon = \varepsilon_1$  при  $R_1 < r < R_2$ , и  $\varepsilon = \varepsilon_2$  при  $R_2 < r < R_3$ . Определить плотность поверхностного поляризованного заряда  $\sigma_{12}$  на границе раздела этих сред, если разность потенциалов между обкладками этого конденсатора равна  $V_0$ .

**Ответ:** 
$$\sigma_{12} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) V_0}{R_2 [\varepsilon_2 \ln(R_2 / R_1) + \varepsilon_1 \ln(R_3 / R_2)]}.$$

**4.4.5.** Какова напряженность поля  $E$  в воздушном зазоре плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами  $V = 200$  В? Расстояние между пластинами равно  $d = 0,2$  см, и между ними находится лист стекла с  $\varepsilon = 7$  и толщиной  $h = 0,1$  см.

**Ответ:** 
$$E = \frac{\varepsilon V}{(d - h)\varepsilon + h} = 175 \text{ кВ/м.}$$

**4.4.6.** Первоначально пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено воздухом. Затем половину толщины зазора заполняют диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$ . Найти начальную напряжённость поля в конденсаторе  $E_0$ , если индукция электрического поля в диэлектрике по модулю равна  $D$ . Решить задачу в двух случаях:

- напряжение между обкладками не менялось;
- заряды на обкладках оставались неизменными.

**Ответ:** а)  $E_0 = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon\varepsilon_0} D$ ;      б)  $E_0 = \frac{D}{\varepsilon_0}$ .

**4.4.7.** Решить предыдущую задачу 4.4.6 с тем отличием, что диэлектрик, заполняющий всю толщину зазора, занимает половину площади пластин конденсатора.

**Ответ:** а)  $E_0 = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0}$ ;      б)  $E_0 = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon\varepsilon_0} D$ .

**4.4.8.** Сферически симметричная система состоит из внутреннего проводника радиуса  $r_1$ , диэлектрической прослойки с проницаемостью  $\varepsilon$ , ограниченной радиусами  $r_2$  (внутренний) и  $r_3$  (внешний), и внешней, тонкой проводящей сферы радиуса  $r_4$ . Внутренний проводник несёт заряд  $q_1$ , внешний – заряд  $q_2$ . Определить потенциал внутреннего проводника и поляризованность диэлектрической прослойки.

**Ответ:**  $\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{q_2}{r_4} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right) q_1 + \frac{q_1}{r_1} \right]$ ;  $P = \frac{(\varepsilon - 1)q_1}{4\pi\varepsilon r^2}$ .

**4.4.9.** Между пластинами плоского конденсатора, площадь которых  $S$ , помещен слоистый диэлектрик, состоящий из  $n$  слоёв вещества с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$  и из  $n$  слоёв с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2$ . Слои чередуются и каждый имеет толщину  $d$ . Найти ёмкость конденсатора  $C$ .

**Ответ:**  $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{nd(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$ .

**4.4.10.** Найти напряженность электрического поля между обкладками сферического конденсатора, пространство между которыми заполнено однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Диэлектрики граничат между собой вдоль поверхности конуса с вершиной в центре  $O$ . Телесный угол конуса, заполненного первым диэлектриком, равен  $\Omega_1$ , а заполненного вторым диэлектри-

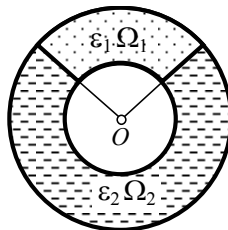


Рис. 4.19. Распределение диэлектриков в сферическом конденсаторе (задача 4.4.10)

ком  $-\Omega_2$  ( $\Omega_1 + \Omega_2 = 4\pi$ ) (рис.4.19). Заряд на внутренней обкладке равен  $Q$ .

Найти также ёмкость конденсатора, если радиусы шаровых обкладок равны  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ).

**Ответ:** 
$$E = \frac{Q}{\epsilon_0(\epsilon_1\Omega_1 + \epsilon_2\Omega_2)} \frac{1}{r^2}, \quad C = \epsilon_0(\epsilon_1\Omega_1 + \epsilon_2\Omega_2) \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

**4.4.11.** Тонкая большая диэлектрическая пластина имеет постоянную («замороженную»), не зависящую от электрического поля, поперечно направленную поляризацию, меняющуюся по её толщине по закону  $P = P_0(x^2/d^2)$ , где  $x$  – расстояние до одной из поверхностей (рис. 4.20). Толщина пластины равна  $d$ . Пренебрегая краевыми эффектами, найти разность потенциалов  $U$  между поверхностями пластины.

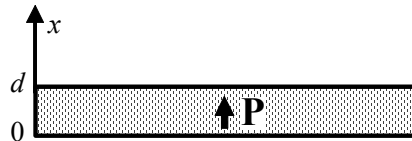


Рис. 4.20. Пластина с «замороженной» поляризацией (задача 4.4.11)

**Ответ:** 
$$U = \frac{P_0 d}{3\epsilon_0}.$$

**4.4.12.** В плоский конденсатор, подключенный к источнику с напряжением  $U$ , вставили пластину толщиной  $h$  с постоянным, не зависящим от электрического поля, вектором поляризации  $\mathbf{P}$ , направленным поперек пластинки. Площадь пластин конденсатора и вставленной пластины  $S$ , расстояние между пластинами  $d$ . Полярность источника и направление поляризации показаны на рис. 4.21. Найти заряд конденсатора.



Рис. 4.21. Конденсатор с поляризованной пластиной (задача 4.4.12)

**Ответ:** 
$$q = \left( \epsilon_0 \frac{U}{d} - \frac{h}{d} P \right) S.$$

**4.4.13** Бесконечно длинный цилиндр радиуса  $R$  из однородного диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$  поместили в однородное электрическое поле напряженностью  $\mathbf{E}_0$ , которое перпендикулярно оси цилиндра. Найти поляризованность диэлектрика.

**Ответ:**  $\mathbf{P} = -2 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ .

#### Литература к главе 4

1. *Матвеев А.Н.* Электричество и магнетизм. –М.: Оникс 21 век, 2005, §§17, § 20-24.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Электричество. –М., Физматлит, 2006, §§ 12-16, 24.
3. *Калашиников С.Г.* Электричество. –М.: Физматлит, 2003, §§ 38-52.
4. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. –М.: Физматлит 2003, §§ 20-29.



## Глава 5

## ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ

### § 5.1. Теоретический материал

**Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов**  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга, равна минимальной работе, которая совершается электрическими силами при увеличении расстояния между зарядами до бесконечности:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2}{2}, \quad (5.1)$$

где  $\varphi_1$  – потенциал, создаваемый зарядом  $q_2$  в точке нахождения заряда  $q_1$ , а  $\varphi_2$  – потенциал, создаваемый зарядом  $q_1$  в точке нахождения заряда  $q_2$ .

**Потенциальная энергия взаимодействия системы точечных зарядов** равна сумме энергий попарно взаимодействующих зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i, \quad (5.2)$$

где  $\varphi_i$  – потенциал, создаваемый в точке нахождения заряда  $q_i$  всеми остальными зарядами.

**Полная электростатическая энергия системы тел**, заряженных с объемной плотностью  $\rho$  и поверхностной плотностью  $\sigma$ , определяется формулой

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma dS, \quad (5.3)$$

где  $\varphi$  – потенциал в точке нахождения элемента заряда  $\rho dV$  или  $\sigma dS$ , созданный всеми зарядами системы, а интегрирование ведется по всем областям, где имеются заряды. Если система состоит из нескольких тел, то эта формула учитывает как взаимодействие зарядов, находящихся на разных телах, так и взаимодействие друг с другом зарядов, находящихся на каждом из тел системы.

Если заряженные тела расположены в конечной области пространства, то энергия электрического поля вычисляется по формуле

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \mathbf{D} dV, \quad (5.4)$$

где интегрирование производится по всему пространству, занятому полем.

**Плотность энергии электрического поля** в любой точке

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}. \quad (5.5)$$

**Собственной энергией заряженного тела** называется энергия взаимодействия всех зарядов этого заряженного тела. Она определяется формулой (5.3), где  $V$  – объем тела и  $S$  – его поверхность, а  $\varphi$  – потенциал, созданный зарядами самого тела. Собственная энергия всегда положительна, так как она равна взятой со знаком «минус» минимальной работе, выполненной против сил электрического поля в процессе зарядки тела, что приводит к росту потенциальной энергии взаимодействия зарядов этого тела.

**Потенциальная энергия взаимодействия системы из нескольких заряженных тел** определяется формулой (5.3) за вычетом собственной энергии всех тел системы. Она определяется работой по сближению заряженных тел и может быть как положительной, так и отрицательной.

**Пондеромоторная сила** – уходящий в прошлое термин, обозначающий механическую силу, действующую со стороны поля на весомые тела. Поскольку невесомых тел не существует, теперь слово «пондеромоторная» обычно опускается и говорят просто о силе, действующей на тело, или о плотности силы.

**Силы при постоянстве зарядов системы.** Если заряды на проводниках сохраняют постоянные значения (система отключена от источников ЭДС), то, записывая энергию системы как функцию от зарядов и пространственных переменных, можно вычислить проекции сил, действующих в системе, и моментов этих сил:

$$F_i = - \left( \frac{\partial W}{\partial x_i} \right)_q, \quad (5.6)$$

$$M_i = - \left( \frac{\partial W}{\partial \theta_i} \right)_q. \quad (5.7)$$

Здесь  $x_i$  – декартова координата,  $\theta_i$  – угол поворота относительно  $i$ -ой оси, а индекс  $q$  показывает, что вычисление производится при постоянных зарядах.

**Силы при постоянстве потенциалов системы проводников.** Если на проводниках поддерживаются постоянные потенциалы (за счет подключения к источникам ЭДС), то энергию системы удобно записать как функцию от потенциалов и пространственных переменных. В этом случае вычисления надо производить по формулам:

$$F_i = + \left( \frac{\partial W}{\partial x_i} \right)_{\varphi}, \quad (5.8)$$

$$M_i = + \left( \frac{\partial W}{\partial \theta_i} \right)_{\varphi}, \quad (5.9)$$

где индекс  $\varphi$  показывает, что вычисление производится при постоянных потенциалах.

**Поверхностная плотность силы.** Если на элемент поверхности тела  $dS$  действует сила  $d\mathbf{F}$ , то отношение  $\mathbf{f}_S = \frac{d\mathbf{F}}{dS}$  называют поверхностной плотностью силы.

**Объемная плотность силы** Если на элемент объема тела  $dV$  действует сила  $d\mathbf{F}$ , то отношение  $\mathbf{f}_V = \frac{d\mathbf{F}}{dV}$  называют объемной плотностью силы.

**Поверхностная плотность силы, действующей на заряженный проводник,** равна

$$\mathbf{f}_S = \frac{\sigma^2 \mathbf{n}}{2\epsilon\epsilon_0}, \quad (5.10)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности проводника,  $\sigma$  – плотность заряда в точке наблюдения,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды, с которой граничит проводник. Здесь и далее предполагается, что имеется полный контакт диэлектрика с проводником, что возможно только в случае жидкого или газообразного диэлектрика. В состоянии равновесия эти силы, стремящиеся увеличить объем проводника, скомпенсированы силами, возникающими в результате упругой деформации (см. [1], §19).

**Объемная плотность сил, действующих на диэлектрик** с проницаемостью  $\epsilon$  во внешнем поле напряженности  $\mathbf{E}$  для твердых тел, газов и большинства жидкостей равна

$$\mathbf{f}_V = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{2} \text{grad}(E^2). \quad (5.11)$$

Сила действует в направлении роста модуля напряженности электрического поля.

**Поверхностная плотность силы, действующей на незаряженную плоскую границу раздела двух диэлектриков  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .** Пусть  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  и  $\mathbf{n}_{12}$  – единичный вектор нормали к границе, проведенный из первой среды во вторую. Если внешнее поле направлено по нормали к границе раздела, то каждая среда своим электрическим полем как бы притягивает к себе поверхность раздела. Поверхностная плотность такой силы равна объемной плотности энергии, связанной с нормальной компонентой напряженности поля в своей среде. Эти силы называются максвелловскими натяжениями, а их результирующая определяет силу, действующую на границу раздела. Плотность такой силы равна

$$\mathbf{f}_S = \frac{1}{2\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) D_n^2 \mathbf{n}_{12}, \quad (5.12)$$

где  $D_n$  – нормальная компонента индукции внешнего поля

Если внешнее поле направлено тангенциально к границе раздела двух диэлектриков  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , то на границу раздела по нормали к ней действует сила, суммарная поверхностная плотность которой равна

$$\mathbf{f}_S = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2} E_\tau^2 \mathbf{n}_{12}, \quad (5.13)$$

где  $E_\tau$  – тангенциальная компонента напряженности внешнего поля. В этом случае силы взаимодействия являются силами давления диэлектриков друг на друга; они называются максвелловскими давлениями. Поверхностная плотность сил давления равна объемной плотности энергии, связанной с тангенциальной компонентой напряженности поля (см. [1], §19).

**Поверхностная плотность силы, действующей на поверхность раздела двух сред, всегда направлена в сторону среды с меньшей плотностью энергии и ее величина равна**

$$f = w_1 - w_2, \quad (5.14)$$

где  $w_1$  и  $w_2$  – объёмные плотности энергии электрического поля соответственно в первой и второй среде.

**Энергия точечного диполя** с моментом  $\mathbf{p}$  во внешнем поле с напряженностью  $\mathbf{E}$

$$W = -(\mathbf{p}\mathbf{E}). \quad (5.15)$$

**Сила, действующая на диполь** в электростатическом поле

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \operatorname{grad}) \mathbf{E} = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E} = p_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}. \quad (5.16)$$

## § 5.2. Основные типы задач (классификация)

5.1. Определение собственной энергии заданного распределения электрического заряда и определение энергии электростатического поля этого распределения заряда в заданном объеме.

5.2. Определение энергии взаимодействия системы, состоящей из точечных зарядов, диполей и нескольких заряженных тел.

5.3. Определение работы электрических сил при изменении конфигурации системы.

5.4. Определение сил, действующих на проводники и диэлектрики во внешнем поле, и моментов этих сил.

## § 5.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 5.1

*Определение собственной потенциальной энергии заданного распределения электрического заряда и определение энергии электростатического поля этого распределения заряда в заданном объеме.*

**Метод решения.** Прямое применение формул (5.3) или (5.4) – (5.5).

**Задача 5.3.1 (базовая задача).** Заряд  $q$  распределен равномерно по поверхности сферы радиуса  $R$ . Найти собственную электрическую энергию системы.

#### Решение

При решении данной задачи можно использовать два подхода:

1. Запишем формулу (5.3) в применении к нашей системе. Так как заряд находится только на поверхности сферы, то потенциал сферы  $\varphi$  и плотность заряда на ней  $\sigma$  – величины постоянные и равные  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$ ,  $\sigma = \frac{q}{S}$ , где  $S$  – площадь поверхности сферы.

Тогда имеем:

$$W = \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma dS = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{RS} \int_S dS = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}.$$

2. Другой подход состоит в вычислении энергии электрического поля, созданного зарядами сферы. Для этого следует использовать формулы (5.4) – (5.5).

Внутри сферы напряженность поля равна нулю и, значит, плотность энергии поля также равна нулю.

Вне сферы  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  и плотность энергии поля равна  $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ .

Вся энергия поля сосредоточена в пространстве вне сферы и величина ее равна

$$W = \int_R^\infty w 4\pi r^2 dr = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}.$$

**Ответ:**  $W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}.$

*Замечание:* Физическое содержание второго решения принципиально отличается от первого. В первом случае носителями энергии выступают заряды, а энергия системы представляется локализованной на зарядах. Носителем энергии во втором подходе выступает электрическое поле, а энергия системы локализована во всех областях пространства, где оно отлично от нуля.

Как уже отмечалось (см. главу 1), понятие поля соответствует признанной в физике концепции близкодействия и поэтому второй подход обычно бывает предпочтительнее. Однако в рамках электростатики сделать определенный выбор не представляется возможным. Ситуация проясняется только при изучении динамики, когда однозначно правильной оказывается полевая трактовка. Следует проявлять осторожность, применяя полевой подход в тех (модельных) задачах, где заряды находятся также и на бесконечности. Здесь часто для расчета предпочтительнее использовать первый способ решения.

Энергия поля концентрируется преимущественно вблизи зарядов. Так, для рассматриваемой задачи внутри сферы радиуса  $2R$

сосредоточена половина всей энергии поля, а внутри сферы радиуса  $3R$  уже  $2/3$  всей энергии.

**Задача 5.3.2.** Вычислить потенциальную энергию заряда  $q$ , равномерно распределенного по объему шара радиуса  $R$ . Диэлектрическая проницаемость вещества шара равна  $\varepsilon$ . Сравнить энергию поля внутри шара и вне его.

**Решение**

С помощью формулы (5.3) нельзя определить энергию электрического поля вне шара, поэтому сразу будем решать задачу, исследуя распределение энергии поля в пространстве.

Вне шара поле ничем не отличается от поля равномерно заряженной сферы, поэтому запасенная в нем энергия точно равна

энергии  $W_1 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{R}$ , вычисленной в предыдущей задаче.

Внутри шара согласно теореме Гаусса для вектора  $\mathbf{D}$  (глава 4, формула (4.9)) индукция электрического поля равна  $D = \frac{1}{4\pi} \frac{qr}{R^3}$ .

Применяя формулы (5.4) и (5.5) находим:

$$w = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \text{ и } W_2 = \frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0} \int_0^R \frac{1}{16\pi^2} \frac{q^2 r^2}{R^6} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{1}{40\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q^2}{R}.$$

Отношение этих энергий равно  $\frac{W_1}{W_2} = 5\varepsilon$ .

**Ответ:** отношение энергии электрического поля вне шара, к энергии электрического поля внутри него равно  $5\varepsilon$ .

*Замечание.* Полная потенциальная энергия шара  $W$  равна

$$W = W_1 + W_2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{5\varepsilon + 1}{5\varepsilon R}.$$

Это же значение полной энергии шара можно также получить, используя выражение (5.3)  $W = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi(r) dV$ .

Аналогично задаче 2.3.9 главы 2 получаем, что потенциал электрического поля внутри равномерно заряженного по объёму шара из вещества с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  определяется как

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{6\epsilon\epsilon_0} (R^2(2\epsilon + 1) - r^2),$$

где  $\rho = \frac{q}{V} = \frac{3q}{4\pi R^3}$  – объёмная плотность заряда,  $r$  – расстояние от центра шара. Отсюда следует:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^R \rho \frac{\rho}{6\epsilon\epsilon_0} (R^2(2\epsilon + 1) - r^2) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\epsilon\epsilon_0} \frac{5\epsilon + 1}{5} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{5\epsilon + 1}{5\epsilon R}.$$

**Задача 5.3.3.** Имеется проводящий шар радиуса  $r_1$  и концентричный с ним сферический проводящий слой, внутренняя поверхность которого имеет радиус  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ), а внешняя – радиус  $r_3$  ( $r_3 > r_2$ ). Заряды шара и слоя равны соответственно  $q_1$  и  $q_2$ . Найти энергию этой системы зарядов.

### Решение

Ввиду сферической симметрии системы, ее энергию легко подсчитать как энергию электрического поля.

Внутри шара и внутри проводящего слоя поля нет, т.е. при  $r < r_1$  и  $r_2 < r < r_3$   $E = 0$ . Напряженность поля в области  $r_1 < r < r_2$

равна  $E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2}$ , а в области  $r > r_3$   $E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r^2}$ . Записывая

плотность энергии поля согласно (5.5), находим энергию в каждой области, вычисляя соответствующие интегралы (5.4):

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \epsilon_0 E_1^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right);$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \int_{r_3}^{\infty} \epsilon_0 E_2^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{(q_1 + q_2)^2}{r_3}.$$

Полная энергия системы равна их сумме:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[ q_1^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{2q_1 q_2 + q_2^2}{r_3} \right].$$

**Ответ:**  $W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[ q_1^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{2q_1 q_2 + q_2^2}{r_3} \right].$



### Задачи типа 5.2

*Определение потенциальной энергии взаимодействия системы, состоящей из точечных зарядов, диполей и нескольких заряженных тел.*

**Метод решения.** Использование формул (5.1) – (5.2) и определения потенциальной энергии взаимодействия системы из нескольких заряженных тел.

**Задача 5.3.4 (базовая задача).** В вершинах квадрата со стороной  $a$  находятся точечные заряды  $q_1, q_2, q_3, q_4$ . Найти потенциальную энергию этой системы зарядов.

#### Решение

В формуле (5.2) содержится шесть слагаемых по числу пар взаимодействующих частиц. В четырех из этих слагаемых  $r_{ij} = a$ , и в двух  $r_{ij} = a\sqrt{2}$ . Отсюда получаем

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \left[ q_1q_2 + q_2q_3 + q_3q_4 + q_1q_4 + \frac{q_1q_3 + q_2q_4}{\sqrt{2}} \right].$$

**Ответ:** 
$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \left[ q_1q_2 + q_2q_3 + q_3q_4 + q_1q_4 + \frac{q_1q_3 + q_2q_4}{\sqrt{2}} \right].$$

**Задача 5.3.5.** Вычислить потенциальную энергию, приходящуюся на один заряд, расположенный в неограниченной линейной цепочке точечных зарядов, величина которых равна  $q$ , а знаки чередуются. Расстояние между соседними разноименными зарядами равно  $a$  (рис. 5.1).

#### Решение

Энергия взаимодействия какого-либо заряда  $+q$  с ближайшим соседом (зарядом  $-q$  слева) согласно (5.1) равна

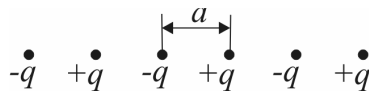


Рис. 5.1. Линейная цепочка зарядов (задача 5.3.5)

$$W_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a},$$

а со следующими зарядами

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2a}, \quad W_3 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{3a} \text{ и т. д.}$$

Полная энергия взаимодействия одного заряда со всеми остальными определяется суммой (5.2):

$$W = 2(W_1 + W_2 + \dots) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} \ln 2.$$

**Ответ:**  $W = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} \ln 2.$

**Задача 5.3.6.** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $h$  от безграничной проводящей плоскости. Найти:

- энергию взаимодействия этого заряда с зарядами, индуцированными на плоскости,
- собственную энергию зарядов, индуцированных на плоскости,
- полную электрическую энергию этой системы.

### Решение

а) Энергия взаимодействия  $W$  системы двух точечных зарядов определена формулой (5.1) теоретического материала. Для её применения следует выделить на плоскости участок очень малой площади  $dS$ , заряд которого  $dq = \sigma(r)dS$  можно считать точечным (см. рис. 5.2), записать энергию взаимодействия  $dW$  этого заряда с зарядом

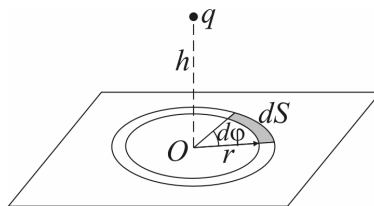


Рис. 5.2. К расчёту энергии взаимодействия заряда и безграничной проводящей плоскости (задача 5.3.6)

$q$  и просуммировать вклады в энергию всех зарядов плоскости, т.е. вычислить интеграл от  $dW$  по всем точкам плоскости.

Для расчета удобно использовать полярную систему координат  $(r, \phi)$  с началом координат в основании перпендикуляра, опущенного на плоскость из точки расположения заряда  $q$  (точка  $O$  на рисунке 5.2). В этой системе координат  $dS = r dr d\phi$ , и интегрирование по всей плоскости означает вычисление интеграла по  $\phi$  в пределах от нуля до  $2\pi$  и по  $r$  от нуля до бесконечности.

Плотность индуцированного на плоскости заряда  $\sigma$ , вычисленная в задаче **3.3.10** (глава 3), равна

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi} \frac{qh}{(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Итак, согласно (5.1) имеем:

$$dW = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qdq}{(h^2 + r^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\sigma r dr d\varphi}{(h^2 + r^2)^{1/2}},$$

и

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 h}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{r dr}{(h^2 + r^2)^2} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 h}.$$

**б)** для расчета собственной энергии индуцированных зарядов воспользуемся формулой (5.3), примененной к этим зарядам:

$$W = \frac{1}{2} \int_S \varphi_\sigma \sigma dS,$$

где плотность индуцированных зарядов  $\sigma = -\frac{1}{2\pi} \frac{qh}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$  (см.

пункт а). В данную формулу входит потенциал  $\varphi_\sigma$ , созданный *самими поверхностными зарядами*. Чтобы его найти, отметим, что потенциал бесконечной проводящей плоскости складывается из потенциала  $\varphi_\sigma$ , создаваемого самим поверхностным зарядом, и потен-

циала точечного заряда  $\varphi_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(h^2 + r^2)^{1/2}}$ . Примем потен-

циал на бесконечном расстоянии от заряда равным нулю. Тогда потенциал бесконечной проводящей плоскости тоже везде равен нулю ( $\varphi_\sigma + \varphi_q = 0$ ), получаем

$$\varphi_\sigma = -\varphi_q = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(h^2 + r^2)^{1/2}}.$$

Вычисляя интеграл с найденным потенциалом, находим:

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{q^2 h r dr}{2\pi(h^2 + r^2)^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h}.$$

**в)** Согласно методу изображений поле над плоскостью совпадает с полем, создаваемым зарядом  $q$  вместе с его зарядом-изображением  $-q$ . Так как в данном случае энергия сосредоточена лишь в полупространстве над плоскостью, то полная энергия сис-

темы равна половине энергии взаимодействия заряда  $q$  с его зарядом-изображением. Отсюда, используя (5.1) получим:

$$W = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2h} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h}.$$

**Ответ:** а)  $W = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 h}$ ; б)  $W = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h}$ ; в)  $W = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h}$ .

**Задача 5.3.7.** Два диполя с моментами  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ , которые лежат в одной плоскости на расстоянии  $r$  друг от друга, образуют с прямой, соединяющей диполи, углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  соответственно. Вычислить энергию взаимодействия диполей (рис. 5.3).

### Решение

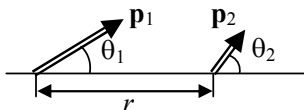


Рис. 5.3. Взаимная ориентация диполей в задаче 5.3.7

Энергию взаимодействия диполей рассчитаем с помощью формулы:

$$W = -\mathbf{p}\mathbf{E},$$

которая определяет энергию диполя  $\mathbf{p}$  во внешнем поле  $\mathbf{E}$ . В нашем случае внешнее поле, действующее на диполь  $\mathbf{p}_1$ , создается диполем  $\mathbf{p}_2$ . Поэтому энергия взаимодействия диполей равна

$$W = -\mathbf{p}_1\mathbf{E}_2,$$

где

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p}_2\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_2}{r^3} \right]$$

– напряженность поля, создаваемая вторым диполем в точке расположения диполя  $\mathbf{p}_1$ . Раскрывая скалярное произведение, находим

**Ответ:**  $W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_1 p_2}{r^3} (3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos(\theta_1 - \theta_2)).$

*Замечание:* Энергия взаимодействия:

– максимальна и равна  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_1 p_2}{r^3}$  в случае, когда  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ ;

– равна нулю при  $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2$ ;

– минимальна и равна  $W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_1 p_2}{r^3}$ , если  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ .

### Задачи типа 5.3

*Определение работы электрических сил при изменении конфигурации системы.*

**Метод решения.** Применяется закон изменения энергии: в электростатике работа сил электрического взаимодействия равна уменьшению потенциальной энергии системы.

**Задача 5.3.8 (базовая задача).** Сферическая оболочка радиуса  $R_1$ , равномерно заряженная зарядом  $q$ , расширилась до радиуса  $R_2$ . Найти работу, совершенную при этом электрическими силами.

#### Решение

Потенциальная энергия равномерно заряженной сферы определена в задаче 5.3.1 и равна  $W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$ . При расширении оболочки ее радиус увеличивается и потенциальная энергия уменьшается. Разность начальной и конечной энергии и равна работе электрических сил.

$$A = -\Delta W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

**Ответ:**  $A = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$

**Задача 5.3.9 (базовая задача).** Плоский воздушный конденсатор с пластинами площадью  $S$  и расстоянием между ними  $d$  заряжен до разности потенциалов  $U$  и отключен от батареи. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы увеличить расстояние между его пластинами на  $\Delta x$ ?

#### Решение

При увеличении расстояния между пластинами конденсатора его емкость  $C$  уменьшается и, следовательно, изменяется величина запасенной в нем энергии. Если конденсатор отключен от батареи, то заряд  $q$  на его обкладках не изменяется. Для определения энергии конденсатора в этом случае удобно использовать формулу

$W = \frac{q^2}{2C}$ , где  $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ . С ростом  $d$  энергия конденсатора увеличивается за счет работы внешних сил:

$$\Delta W = A = \frac{q^2(d + \Delta x)}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q^2 \Delta x}{2\varepsilon_0 S}.$$

Выражая заряд конденсатора через первоначальную разность потенциалов  $q = CU$  получаем

$$A = \frac{\varepsilon_0 S \Delta x U^2}{2d^2}.$$

**Ответ:**  $A = \frac{\varepsilon_0 S \Delta x U^2}{2d^2}.$

*Замечание.* Задачу можно также решать, используя понятие работы силы. Так как  $E = \frac{q}{\varepsilon_0 S} = \frac{U}{d} = \text{const}$ , то сила, действующая на

одну из пластин конденсатора со стороны электрического поля второй пластины, не зависит от расстояния между обкладками и равна

$$F = q \frac{E}{2} = \frac{qU}{2d} = \frac{CU^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}.$$

Тогда при перемещении пластины на расстояние  $\Delta x$  внешние силы совершат работу, равную, с точностью до знака, работе силы электрического поля

$$A = F \Delta x = \frac{\varepsilon_0 S \Delta x U^2}{2d^2}.$$

**Задача 5.3.10 (базовая задача).** Плоский воздушный конденсатор с пластинами площадью  $S$  заряжен до разности потенциалов  $U$ . Не отключая конденсатор от батареи, медленно увеличивают расстояние между пластинами от  $x_1$  до  $x_2$ . Какую работу выполняют при этом внешние силы?

### Решение

Если конденсатор остается подключенным к источнику ЭДС, то при квазистатическом изменении расстояния между пластинами напряжение на пластинах остается постоянным и для расчета энергии конденсатора следует использовать формулу  $W = CU^2/2$ , где  $C = \varepsilon_0 S/x$ ,  $x$  – расстояние между пластинами. При увеличении  $x$  емкость конденсатора уменьшается и, следовательно, его энергия

уменьшается. Электростатические силы, существующие в конденсаторе, не могут увеличить расстояние между пластинами, так как являются силами притяжения. Поэтому необходимы внешние силы, работа которых увеличит потенциальную энергию системы.

При раздвижении пластин уменьшается заряд на пластинах согласно соотношению  $q = CU$ . Этот заряд перетекает в источник ЭДС. Происходит квазистатический процесс: при малом увеличении  $x$  разность потенциалов между пластинами увеличивается и становится больше  $U$ . «Избыточный» заряд преодолевает встречное электрическое поле источника ЭДС и перетекает в источник. Тем самым восстанавливается равновесие в системе. Происходит увеличение потенциальной (например, химической) энергии источника на величину, равную работе против ЭДС источника

$$\Delta W_{\text{ист}} = -A = -U\Delta q = (C_1 - C_2)U^2$$

с одновременным уменьшением энергии, запасенной в конденсаторе. По завершении процесса энергия конденсатора изменится на величину

$$\Delta W = \frac{(C_2 - C_1)U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2} \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) < 0.$$

Согласно закону сохранения энергии механическая работа  $A_{\text{мех}}$ , совершаемая при удалении стеклянной пластины, равна

$$A_{\text{мех}} = A + \Delta W = \frac{(C_1 - C_2)U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2} \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right).$$

**Ответ:**  $A_{\text{мех}} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2} \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right).$

*Замечание 1.* При увеличении расстояния между пластинами на  $dx$  работа электростатических сил равна  $dA_1 = -Fdx$ , где  $F = qE_1$  – сила, действующая на одну из пластин. Здесь  $q$  – заряд пластины,  $E_1$  – напряженность поля, созданного зарядом второй пластины; она равна половине напряженности поля в конденсаторе  $E$ . Так как  $q = CU$ ,  $E = U/x$ , находим

$$F = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2x^2} \text{ и } A_1 = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2} \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = \Delta W = -A_{\text{мех}}.$$

*Замечание 2.* В обоих случаях  $q = \text{const}$  (задача 5.3.9) и  $U = \text{const}$  (данная задача) сила взаимодействия пластин получилась одинаковой. Действительно, силы определяются только зарядами на пластинах и не зависят от внешних цепей, куда подключен конденсатор.

**Задача 5.3.11.** Внутри плоского конденсатора находится параллельная обкладкам пластина, толщина которой составляет  $\eta = 0,6$  расстояния между обкладками. Конденсатор сначала подключили к источнику постоянного напряжения  $U = 200$  В, затем отключили и после этого медленно извлекли пластину из зазора. Емкость конденсатора в отсутствие пластины  $C = 20$  нФ. Найти работу, совершенную против электрических сил при извлечении пластины, если пластина: а) металлическая; б) стеклянная с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 5$ .

### Решение

Работа, совершенная внешними силами, целиком пойдет на увеличение потенциальной энергии электрической системы, в данном случае – энергии отключенного от источника напряжения конденсатора. Согласно закону сохранения энергии можно искомую работу рассчитать как изменение энергии, запасенной в конденсаторе. При отключенном источнике ЭДС, на обкладках конденсатора сохраняется заряд  $Q$  и энергию конденсатора следует рассчитывать по формуле  $W = \frac{Q^2}{2C}$ . При вытягивании пластины емкость конденсатора уменьшается, а запасенная в нем энергия увеличивается.

а) Пусть толщина металлической пластины равна  $h$ . Тогда начальная емкость конденсатора будет  $C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - h}$ , где  $S$  – площадь обкладки,  $d$  – расстояние между обкладками. После того как пластина будет удалена из конденсатора, его емкость станет равна  $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ . Изменение потенциальной энергии конденсатора

$$\Delta W = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = \frac{Q^2}{2} \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{C_1} \right) = \frac{Q^2 h}{2\varepsilon_0 S} > 0.$$

Выражая заряд конденсатора через начальную разность потенциалов  $Q = C_1 U$ , находим окончательный ответ:



$$A = \Delta W = \frac{CU^2hd}{2(d-h)^2} = \frac{\eta CU^2}{2(1-\eta)^2} = 1,5 \text{ мДж}.$$

б) Начальную емкость конденсатора можно найти из решения задачи 4.3.9, где найдена емкость плоского конденсатора, заполненного двумя слоями диэлектрика (слой толщиной  $d_1$  с проницаемостью  $\varepsilon_1$  и слой толщиной  $d_2 = d - d_1$  с проницаемостью  $\varepsilon_2$ ):

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\left( \frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)}.$$

В условиях нашей задачи, следует положить  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon$  и  $d_1 = (1 - \eta)d$ ,  $d_2 = \eta d$ . Тогда начальную емкость конденсатора можно записать как

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{\left( 1 - \eta + \frac{\eta}{\varepsilon} \right) d} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{(\varepsilon(1 - \eta) + \eta) d}.$$

Изменение энергии конденсатора при удалении диэлектрической пластины равно

$$\Delta W = \frac{Q^2}{2} \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{C_1} \right),$$

где  $Q = C_1 U$ . Подставляя найденное выражение для  $C_1$ , находим:

$$A = \Delta W = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)\eta CU^2}{2(\varepsilon(1 - \eta) + \eta)^2} = 0,8 \text{ мДж}.$$

Работа против электрических сил полностью пошла на увеличение энергии конденсатора.

**Ответ:** а)  $A = \frac{\eta CU^2}{2(1 - \eta)^2} = 1,5 \text{ мДж};$

б)  $A = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)\eta CU^2}{2(\varepsilon(1 - \eta) + \eta)^2} = 0,8 \text{ мДж}.$

**Задача 5.3.12.** Внутри плоского конденсатора с площадью пластин  $S = 200 \text{ см}^2$  и расстоянием между ними  $d = 0,1 \text{ см}$  находится пластина из стекла ( $\varepsilon = 5$ ), целиком заполняющая пространство между пластинами конденсатора. Какую механическую работу надо

затратить на удаление пластины, если конденсатор все время присоединен к батарее с ЭДС, равной  $U = 300$  В?

### Решение

Если в процессе удаления пластины источник ЭДС остается подключенным к конденсатору, то для расчета запасенной в конденсаторе энергии следует воспользоваться формулой  $W = \frac{CU^2}{2}$ . В условиях данной задачи емкость конденсатора уменьшается; следовательно, и его энергия будет уменьшаться. Изменение энергии конденсатора равно

$$\Delta W = \frac{(1-\varepsilon)CU^2}{2} < 0.$$

Заряд на обкладках конденсатора не остается постоянным – часть заряда перемещается через источник ЭДС, увеличивая его потенциальную энергию. Элементарная работа, совершаемая против ЭДС батареи, равна  $dA = Udq$ . Если изменения происходят квазистатически, то по окончании процесса полная работа будет равна

$$A = U\Delta q,$$

где  $\Delta q = (\varepsilon - 1)CU$  – полное изменение величины заряда на обкладках. Согласно закону сохранения энергии механическая работа, совершаемая при удалении стеклянной пластины, равна

$$A_1 = A + \Delta W = \frac{(\varepsilon - 1)CU^2}{2}.$$

Подставляя значения параметров, получаем численный ответ:

$$A_1 = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

**Ответ:**  $A_1 = \frac{(\varepsilon - 1)CU^2}{2} = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$

**Задача 5.3.13.** Конденсатор емкости  $C_1 = 1$  мкФ, предварительно заряженный до напряжения  $U = 300$  В и отсоединенный от источника ЭДС, подключили параллельно к незаряженному конденсатору емкости  $C_2 = 2$  мкФ. Найти изменение электрической энергии этой системы к моменту установления равновесия.

### Решение

При соединении конденсаторов первоначальный заряд  $q = C_1U$  перераспределится так, чтобы напряжение  $U_1$  на двух конденса-

рах стало одинаковым. Электрические силы совершат работу по перемещению зарядов и, следовательно, потенциальная энергия системы уменьшится.

Начальное значение энергии  $W = C_1 U^2 / 2$ , конечное –  $W_1 = (C_1 + C_2) U_1^2 / 2$ .

Изменение энергии системы  $\Delta W = W_1 - W$  найдем, если определим величину  $U_1$ . Это можно сделать, используя закон сохранения заряда

$$q = C_1 U = (C_1 + C_2) U_1,$$

откуда следует  $U_1 = \frac{C_1 U}{(C_1 + C_2)}$ .

В итоге получаем  $\Delta W = -\frac{C_1 C_2 U^2}{2(C_1 + C_2)} = -0,03 \text{ мДж}$ .

**Ответ:**  $\Delta W = -\frac{C_1 C_2 U^2}{2(C_1 + C_2)} = -0,03 \text{ мДж}$ .

*Замечание.* Вся потерянная системой энергия перешла главным образом в тепло за счет омического сопротивления схемы. При малом омическом сопротивлении и достаточно большой индуктивности системы будут наблюдаться затухающие колебания величины заряда на конденсаторах вплоть до достижения равновесного состояния, когда вся избыточная энергия перейдет в тепло и электромагнитное излучение.

**Задача 5.3.14.** Незаряженный металлический шар радиуса  $R$  помещен в однородное внешнее поле, напряженность которого равна  $E_0$ . Какую работу необходимо совершить, чтобы переместить этот шар в область, где поле практически отсутствует?

### Решение

Если проводящий шар находится во внешнем однородном электрическом поле  $E_0$ , то явление электростатической индукции приведет к тому, что на его поверхности появятся поверхностные заряды (рис. 5.4), которые обеспечивают равенство нулю напряженности поля внутри шара. Эти заряды можно представить себе как результат малого сдвига на вектор  $\mathbf{d}$  вдоль направления поля друг относительно друга двух равномерно заряженных по объему шаров того же радиуса  $R$ , несущих заряды противоположных зна-

ков  $q$  и  $-q$ . Поле каждого из этих шаров во внешней по отношению к ним области совпадает с полем точечного заряда, равного заряду шара и расположенного в центре шара. Таким образом, суммарное поле этих двух шаров будет полем точечного диполя, т.е. шар приобретет некоторый дипольный момент. Величину этого момента можно рассчитать, учитывая, что поле внутри этих шаров должно полностью компенсировать внешнее поле.

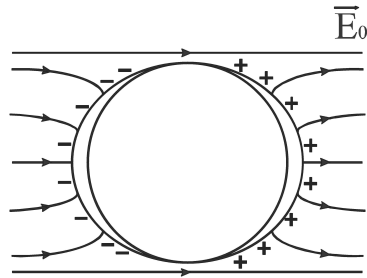


Рис. 5.4. Распределение поверхностных зарядов, возникающих на проводящем шаре во внешнем электрическом поле (задача 5.3.14)

Так как напряженность поля внутри однородно заряженного по объему с плотностью  $\rho$  шара  $\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}$ , находим для суммы полей двух шаров

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{d} = -\mathbf{E}_0,$$

где  $\rho = \frac{q}{V}$ ,  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  – объем шара. Отсюда находим дипольный момент металлического шара во внешнем однородном поле  $\mathbf{E}_0$ :

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0.$$

Этот шар обладает энергией  $W = -(\mathbf{p}\mathbf{E}_0)$ , и, чтобы удалить шар в область, где поле отсутствует, необходимо затратить работу

$$A = -W = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0^2.$$

**Ответ:**  $A = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0^2$

#### Задачи типа 5.4

*Определение сил, действующих на проводники и диэлектрики в электрическом поле и моментов этих сил.*

**Методы решения.** В разных условиях возможны разные подходы: применение формулы, выражающей действующую на заряд

силу через известную напряженность поля; вычисление энергии системы с последующим применением формул (5.6) – (5.9); рассмотрение максвелловских натяжений и давлений (5.10) – (5.14).

**Задача 5.3.15 (базовая задача).** Между обкладками плоского воздушного конденсатора помещена диэлектрическая пластина толщиной  $d_1$  с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (рис. 5.5). Между поверхностями пластины и обкладками конденсатора остались воздушные зазоры, суммарная толщина которых равна  $d_2$ . Определить силу притяжения  $F$  между обкладками, если разность потенциалов между ними равна  $V$ , а площадь пластин  $S$ .

### Решение

По определению сила  $F$ , действующая на пластину конденсатора, равна произведению заряда  $q$ , находящегося на этой пластине, на напряженность электрического поля  $E_1$ , создаваемую всеми остальными зарядами системы (напря-

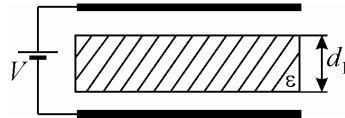


Рис. 5.5. К определению силы притяжения между обкладками плоского конденсатора (задача 5.3.15)

жённость поля одной пластины). Ясно, что  $E_1 = \frac{E}{2}$ , где  $E$  – напряженность поля в воздушном зазоре конденсатора. Заряд пластины можно найти, используя определение емкости:  $q = CV$ . Емкость  $C$  определяем по правилу сложения емкостей последовательно соединенных конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \frac{d_2}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_1}{\varepsilon \varepsilon_0 S},$$

откуда следует  $C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{\varepsilon d_2 + d_1}$ .

Напряженность поля в конденсаторе найдем, вычисляя разность потенциалов между обкладками:

$$V = E d_2 + \frac{E}{\varepsilon} d_1,$$

откуда  $E = \frac{\varepsilon V}{\varepsilon d_2 + d_1}$ . В итоге получаем

$$F = \frac{qE}{2} = \frac{\varepsilon_0 S}{2} \left( \frac{\varepsilon V}{\varepsilon d_2 + d_1} \right)^2.$$

**Ответ:** 
$$F = \frac{\varepsilon_0 S}{2} \left( \frac{\varepsilon V}{\varepsilon d_2 + d_1} \right)^2.$$

**Задача 5.3.16.** Обкладки плоского конденсатора имеют форму квадрата со стороной  $a$  и соединены с источником напряжения. Расстояние и разность потенциалов между обкладками соответственно равны  $d$  и  $U$ . В пространство между обкладками частично вдвинута пластина толщиной  $\Delta$  в форме квадрата со стороной  $a$ . Ее поверхности и стороны параллельны поверхностям и сторонам обкладок, а диэлектрическая проницаемость равна  $\varepsilon$ . Найти силу, с которой пластина втягивается в пространство между обкладками конденсатора.

### Решение

При постоянном напряжении на конденсаторе его потенциальная энергия  $W = CU^2/2$  изменяется только с изменением его емкости  $C$ , которая в свою очередь зависит от длины вдвинутой части диэлектрической пластины. Если координатную ось  $x$  направить вдоль пластины, а начало координат поместить у края обкладки конденсатора (рис. 5.6), то емкость будет функцией одной переменной – координаты  $x$  конца вдвинутой пластины и действующую на пластину силу можно рассчитать по формуле (5.8):

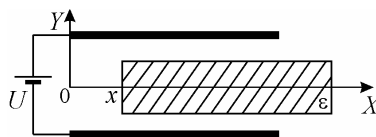


Рис. 5.6. К определению силы, с которой диэлектрическая пластина втягивается в конденсатор (задача 5.3.16)

$$F = F_x = \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_\varphi = \frac{U^2}{2} \frac{dC}{dx}.$$

Конденсатор с вдвинутой пластиной можно рассматривать как два соединенных параллельно конденсатора – воздушный, площади  $S_1 = ax$  и частично заполненный диэлектриком, площадь которого  $S_2 = a(a - x)$ . Его емкость согласно правилу сложения емкостей равна  $C = C_1 + C_2$ , где

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S_1}{d} = \frac{\varepsilon_0 ax}{d}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S_2}{\Delta + \varepsilon(d - \Delta)} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a(a - x)}{\Delta + \varepsilon(d - \Delta)}.$$

Вычисляя производную  $\frac{dC}{dx}$ , находим проекцию на ось  $x$  действующей на диэлектрическую пластину силы:

$$F = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)a\Delta}{d[\Delta + \varepsilon(d-\Delta)]} \frac{U^2}{2}.$$

Знак минус соответствует силе притяжения.

**Ответ:**  $F = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)a\Delta}{d[\Delta + \varepsilon(d-\Delta)]} \frac{U^2}{2}.$

**Задача 5.3.17 (базовая задача).** Плоский конденсатор расположен горизонтально так, что одна его пластина находится над поверхностью жидкости, другая – под ее поверхностью. Диэлектрическая проницаемость жидкости  $\varepsilon$ , ее плотность  $\rho$ . На какую высоту поднимется уровень жидкости в конденсаторе после сообщения его пластинам заряда с поверхностной плотностью  $\sigma$ ?

### Решение

На поверхность жидкости в конденсаторе будет действовать направленная вверх сила, поверхностная плотность которой определена формулой (5.12):

$$f = \frac{(\varepsilon-1)}{2\varepsilon\varepsilon_0} D_n^2.$$

При равновесии эта сила скомпенсирована гидростатическим давлением:

$$f = \rho gh.$$

Поскольку в нашем случае  $D = D_n = \sigma$ , находим ответ:

$$h = \frac{\sigma^2(\varepsilon-1)}{2\varepsilon\varepsilon_0\rho g}.$$

**Ответ:**  $h = \frac{\sigma^2(\varepsilon-1)}{2\varepsilon\varepsilon_0\rho g}.$

*Замечание.* Подъем жидкости реально связан с объемными силами, возникающими в области неоднородности поля у края конденсатора, хотя в приведенном энергетическом расчете краевые эффекты явно не фигурируют.

**Задача 5.3.18.** Коэффициент поверхностного натяжения сферического мыльного пузыря  $\lambda = 0,05$  Н/м, его радиус  $R = 1$  см, наружное атмосферное давление  $p = 10^5$  Па. Какой заряд  $q$  надо изотермически сообщить пузырю, чтобы его радиус увеличился вдвое?

### Решение

При равновесии незаряженного мыльного пузыря радиуса  $R$  давление в его внутренней области  $p_1$  уравнивает наружное атмосферное давление  $p$  и давление за счет поверхностного натяжения  $\frac{4\lambda}{R}$  (здесь учтено, что мыльная пленка имеет две поверхности – внутреннюю и внешнюю)

$$p_1 = p + \frac{4\lambda}{R}. \quad (5.17)$$

Давление газа внутри пузыря при постоянной температуре обратно пропорционально объему, т.е.  $p_1 = \frac{a}{R^3}$ , где  $a$  – коэффициент пропорциональности. Если пузырю сообщается заряд  $q$ , то к внутреннему давлению добавляется давление электростатических сил  $p_2$ . Тогда условие равновесия принимает вид:

$$p'_1 + p_2 = p + \frac{4\lambda}{r}, \quad (5.18)$$

где  $p'_1 = p_1 R^3 / r^3$  ( $r$  – увеличившийся радиус пузыря). Рассчитаем величину  $p_2$ . Для этого выделим на поверхности пузыря малую площадку  $dS$  и определим действующую на нее силу. Поверхностная плотность заряда на пузыре равна  $\sigma = \frac{q}{4\pi r^2}$ .

Известно (глава 1, задача 1.3.19), что напряженность поля, созданного у поверхности сферы всеми ее зарядами, кроме заряда  $dq = \sigma dS$ , находящегося на элементе  $dS$ , равна  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , поэтому на заряд  $dq$  будет действовать сила

$$dF = Edq = \sigma EdS,$$

и эта сила будет создавать давление

$$p_2 = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}.$$



Решая систему уравнений (5.17) – (5.18) с учетом условия  $r = 2R$ , находим ответ:

$$q^2 = (64\pi\epsilon_0 R^3)(12\lambda + 7pR).$$

Если  $R \gg \lambda/p = 5 \cdot 10^{-5}$  см (как и определено условиями задачи), то

$$q = 8\pi R^2 \sqrt{7\epsilon_0 p} = 6,2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

**Ответ:**  $q = 8\pi R^2 \sqrt{7\epsilon_0 p} = 6,2 \cdot 10^{-6}$  Кл.

**Задача 5.3.19.** Конденсатор переменной емкости состоит из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины, которая может поворачиваться и входит в зазор между металлическими пластинами (рис. 5.7). Все пластины имеют форму полукруга радиуса  $R$ , причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с  $d$ . Пренебрегая краевыми эффектами, найти момент сил  $M$ , действующих на диэлектрическую пластину, когда она выведена из положения равновесия. Конденсатор поддерживается при разности потенциалов  $V$ , диэлектрическая проницаемость подвижной пластины равна  $\epsilon$ .

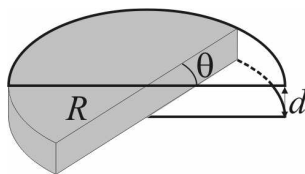


Рис. 5.7. Конденсатор переменной емкости (задача 5.3.19)

### Решение

Конденсатор с выведенной из положения равновесия на угол  $\theta$  диэлектрической пластиной можно заменить эквивалентной схемой двух включенных параллельно конденсаторов, у одного из которых площадь пластин  $S_1 = R^2\theta/2$  и между пластинами находится воздух, а у другого площадь пластин  $S_2 = R^2(\pi - \theta)/2$  и между пластинами находится диэлектрик  $\epsilon$ . Емкость такого конденсатора равна

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0(S_1 + \epsilon S_2)}{d}.$$

Для определения момента силы  $M$  применим формулу (5.9), записав энергию конденсатора в виде  $W = CV^2/2$ . Выполняя дифференцирование, получаем ответ:  $M = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)R^2V^2}{4d}$ .

**Ответ:** 
$$M = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)R^2V^2}{4d}.$$

### § 5.4. Задачи для самостоятельного решения

**5.4.1.** Насколько изменится полная энергия уединенного металлического шара  $R_1$  с зарядом  $q$ , если его окружить concentрическим сферическим слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и радиусами  $R_2$  и  $R_3$  ( $R_1 < R_2 < R_3$ ) (рис. 5.8)?

**Ответ:**

$$\Delta W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right).$$

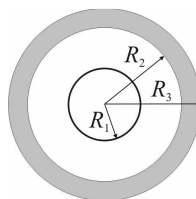


Рис. 5.8. Поперечное сечение шара, окруженного слоем диэлектрика (задача 5.4.1)

**5.4.2.** Между пластинами плоского конденсатора, расположенными на расстоянии  $D$  находятся плоский слой диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  толщиной  $d_1$  и металлический слой толщиной  $d_2$ . Разность потенциалов между обкладками конденсатора равна  $U$ . Определить плотность энергии в диэлектрике (рис. 5.9).

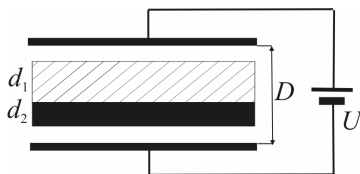


Рис. 5.9. Плоский конденсатор задачи 5.4.2

**Ответ:**

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left( \frac{U}{\varepsilon(D - d_1 - d_2) + d_1} \right)^2.$$

**5.4.3.** Проводящая сфера радиуса  $R$ , имеющая заряд  $q$ , расположена на плоской границе бесконечного диэлектрика, как показано на рисунке 5.10. Найти полную энергию электростатического поля.

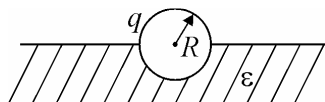


Рис. 5.10. Сфера на границе диэлектрика (задача 5.4.3)

**Ответ:** 
$$W = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon + 1)R}.$$

**5.4.4.** Внешняя обкладка воздушного сферического конденсатора может симметрично сжиматься. После сообщения обкладкам заряда  $\pm q$ , внешняя обкладка под действием сил притяжения сжалась так, что её радиус уменьшился от  $a$ , до  $b$ . Радиус внутренней обкладки остался неизменным. Найти работу, совершенную силами притяжения.

**Ответ:** 
$$A = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{(a-b)}{ab}.$$

**5.4.5.** Центр незаряженной проводящей сферы радиуса  $a$  расположен на плоской границе двух изотропных диэлектриков с проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , вплотную прилегающих к сфере и заполняющих всё пространство вне сферы. На расстоянии  $b < a$  от центра сферы находится точечный заряд  $q$ . Определить энергию поля вне сферы.

**Ответ:** 
$$W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(\epsilon_1 + \epsilon_2)a}.$$

**5.4.6.** Точечный заряд  $q$  расположен на оси симметрии плоского воздушного заряженного конденсатора (вне его) на расстоянии  $L$  от центра положительной обкладки, и на расстоянии  $L + d$  от центра отрицательной. Обкладки конденсатора – квадраты с ребром  $a$ . Напряжение на конденсаторе  $U$ .

Оценить силу, с которой конденсатор действует на заряд, если  $L \gg a$ .

**Ответ:** 
$$F = \frac{qa^2U}{4\pi d} \left( \frac{1}{L^2} - \frac{1}{(L+d)^2} \right).$$

**5.4.7.** Пространство внутри плоского конденсатора полностью занимает пластина из твердого диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$ . Найти минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами конденсатора вдвое, если он всё время подсоединен к источнику напряжения  $U$ , а пластина жестко скреплена с положительной обкладкой. Обкладки конденсатора и пластина – квадрат с ребром  $a$ , и начальное расстояние между обкладками  $d \ll a$ .

**Ответ:**  $A = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon^2 a^2 U^2}{(\varepsilon + 1)d} \cdot \frac{1}{2}$ .

**5.4.8.** Между обкладками плоского воздушного конденсатора расположена диэлектрическая пластина толщиной  $d_2$  с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , суммарная толщина оставшихся воздушных зазоров между пластиной и обкладками равна  $d_1$ . Разность потенциалов между обкладками равна  $V$ . Определить силу притяжения между обкладками. Площадь всех пластин равна  $S$ .

**Ответ:**  $F = \frac{\varepsilon_0 S}{2} \left( \frac{\varepsilon V}{\varepsilon d_1 + d_2} \right)^2$ .

**5.4.9.** Обкладки плоского воздушного конденсатора имеют площадь  $S$  и отделены друг от друга на расстояние  $d_1$ . Между ними находится металлическая пластина такой же площади и толщиной  $d_2$ , изолированная от земли. Конденсатор заряжен до напряжения  $V$  и отсоединен от источника. Какую работу необходимо совершить, чтобы удалить пластину из конденсатора?

**Ответ:**  $A = \frac{\varepsilon_0 S d_2 V^2}{2(d_1 - d_2)^2}$ .

**5.4.10.** Два одинаковых воздушных конденсатора ёмкостью  $C$  заряжены до разности потенциалов  $U$  и отсоединены от батареи. Один из них в заряженном состоянии погружают в диэлектрик с проницаемостью  $\varepsilon$ , после чего конденсаторы соединяют параллельно. Определить энергию происходящего при этом разряда.

**Ответ:**  $\Delta W = -\frac{(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon(\varepsilon + 1)} \frac{CU^2}{2}$ .

**5.4.11.** Определить высоту подъёма жидкости в расположенном вертикально плоском конденсаторе, если он подсоединен к батарее с напряжением  $U$ , расстояние между пластинами  $d$ , плотность жидкости  $\rho$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$ .

**Ответ:**  $h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2}{d^2 \rho g} \cdot \frac{1}{2}$ .

**5.4.12.** Две коаксиальные трубки радиуса  $a$  и  $b$  погружаются вертикально в масляную ванну. Плотность масла  $\rho$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$ . Разность потенциалов между трубками  $U$ . Найти высоту подъема масла в пространстве между трубками. Капиллярными силами пренебречь. Капиллярными явлениями и крайевыми эффектами пренебречь.

$$\text{Ответ: } h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2}{(b^2 - a^2)\rho g \ln \frac{b}{a}}.$$

**5.4.13.** Некая молекула (рис. 5.11) содержит три заряда  $+q$ ,  $+q$ ,  $-2q$ , которые расположены линейно на равных расстояниях  $a$  друг от друга, и находится на расстоянии  $r$  от бесконечной проводящей плоскости, много большем размеров самой молекулы ( $r \gg 2a$ ). В дипольном приближении найти силу, действующую на плоскость со стороны молекулы.

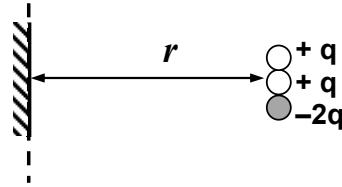


Рис. 5.11. Схема расположения молекулы и плоскости (задача 5.4.13)

$$\text{Ответ: } F = \frac{3}{64\pi\varepsilon_0} \frac{(3aq)^2}{r^4}.$$

**5.4.14.** Незаряженный проводящий шар, плотность которого  $\rho_1$ , плавает в жидкости, имеющей плотность  $\rho_2$  ( $\rho_2 > 2\rho_1$ ) и диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$ . Какой заряд следует сообщить шару, чтобы он погрузился в жидкость ровно на половину? Радиус шара равен  $R$ .

$$\text{Ответ: } q = 4\pi\varepsilon_0(\varepsilon + 1) \sqrt{\frac{(\rho_2 - 2\rho_1)gR^5}{3\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}}.$$

### Литература к главе 5

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. §18, 19. –М.: Высшая школа, 1983.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. §28-30, §32-34, М., Физматлит, 2006..
3. Калашиников С.Г. Электричество. §31-37, М.: Физматлит, 2003.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. §30-34, –М.: Наука, 2003.

## Глава 6

## ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

## §6.1. Теоретический материал

**Электрический ток** – упорядоченное движение заряженных частиц. Ток может существовать в проводящих средах и в вакууме.

**Проводники** – материальные тела, в которых при наличии внешнего электрического поля возникает электрический ток свободных зарядов. Если через проводник протекает электрический ток, то (в отличие от электростатики) он не является эквипотенциальной областью.

**Ток в проводящей среде**

**Объемная плотность тока** – вектор средней плотности потока зарядов, который численно равен заряду, проходящему за 1 секунду через единичную площадку, перпендикулярную скорости зарядов

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} .$$

Размерность плотности тока  $[j] = \text{А}/\text{м}^2$ . Вектор  $\mathbf{j}$  сонаправлен с вектором скорости  $\mathbf{v}$  упорядоченного движения положительно заряженных частиц. Здесь  $\rho$  – объемная плотность зарядов в данной точке проводника. Если в проводнике существуют свободные заряды разных знаков с объемной плотностью  $\rho^+$  и  $\rho^-$ , движущиеся со средними скоростями  $\mathbf{v}^+$  и  $\mathbf{v}^-$  соответственно, то

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^+ + \mathbf{j}^- = \rho^+ \mathbf{v}^+ + \rho^- \mathbf{v}^- .$$

**Уравнение непрерывности** (закон сохранения заряда)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0 , \quad (6.1)$$

где  $\rho$  – объемная плотность зарядов в проводнике,  $\mathbf{j}$  – плотность тока. Если ток постоянный, то величина заряда в любой части объема проводника неизменна и везде выполняется соотношение:

$$\text{div } \mathbf{j} = 0 . \quad (6.2)$$

**Поверхностная плотность тока** – вектор, определяемый соотношением

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{v} ,$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность зарядов,  $\mathbf{v}$  – вектор их средней скорости упорядоченного движения по поверхности. Размерность поверхностной плотности тока  $[i] = \text{А/м}$ .

**Закон Ома в дифференциальной форме:**

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}. \quad (6.3)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  – напряженность электростатического поля в проводнике,  $\lambda$  – удельная электрическая проводимость вещества. В системе СИ удельная электрическая проводимость измеряется в  $(\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$ .

Если, помимо электростатического поля, на носители заряда действуют иные (так называемые, сторонние) силы, то

$$\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*), \quad (6.3^*)$$

где  $\mathbf{E}^*$  – напряженность поля сторонних сил, численно равная сторонней силе, действующей на свободный носитель единичного положительного заряда. Сторонние силы могут быть обусловлены, например, вихревым электрическим полем, силой Лоренца, физической или химической неоднородностью проводников, их ускоренным движением.

В однородном проводнике ( $\lambda = \text{const}$ ) из (6.2, 6.3) следует  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  и, поскольку для стационарных полей  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ , поле  $\mathbf{E}$  потенциально и потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

**Сила тока  $I$**  – скалярная величина, численно равная заряду, проходящему через поперечное сечение проводника  $S$  за единицу времени

$$I = \frac{dq}{dt} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (6.4)$$

Единица измерения силы тока Ампер  $[A]$  в системе единиц СИ является основной электромагнитной единицей.

**Закон Ома для участка цепи.** Сила тока, протекающего по проводнику при отсутствии в нем сторонних сил, пропорциональна напряжению  $U$  между концами проводника:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (6.5)$$

Величина  $R$  называется электрическим сопротивлением проводника. Единица измерения в системе СИ –  $[\text{Ом}]$ .

Сопротивление однородного проводника постоянного сечения

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (6.6)$$

Здесь  $\rho$  – удельное сопротивление материала проводника  $\rho = 1/\lambda$  ( $\rho$  зависит от материала и температуры, единица измерения в СИ – [Ом·м]),  $l$  – длина проводника,  $S$  – площадь поперечного сечения проводника,  $\lambda$  – удельная электрическая проводимость материала.

**Связь емкости конденсатора и сопротивления между обкладками.** Сопротивление  $R$  однородной проводящей среды, заполняющей всё пространство, между двумя идеально проводящими телами произвольной формы и ёмкость  $C$  такой системы связаны с удельным сопротивлением вещества  $\rho$  и его диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  соотношением:

$$RC = \rho \epsilon_0 \epsilon. \quad (6.7)$$

**Закон Джоуля–Ленца.** Тепловая мощность, выделяемая в проводнике постоянным током  $I$ , равна

$$P = I^2 R. \quad (6.8)$$

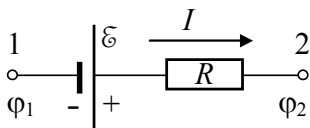
**Закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме.** Объемная плотность тепловой мощности  $P_V$ , выделяемая в проводнике

$$P_V = (\mathbf{jE}) = \lambda E^2 = \rho j^2. \quad (6.9)$$

### Ток в квазилинейных проводниках

**Квазилинейный ток** – электрический ток в тонком проводнике. Считается, что вектор плотности тока  $\mathbf{j}$  везде параллелен оси проводника и все физические величины (включая  $j$ ) одинаковы в его поперечном сечении.

**Закон Ома для участка квазилинейной цепи:**



$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}, \quad (6.10)$$

где  $I$  – сила тока,  $\varphi_1 - \varphi_2$  – разность потенциалов на участке,  $R$  – полное сопротивление участка (рис. 6.1),  $\mathcal{E}$  – электродвижущая сила (ЭДС), действующая на данном участке 1-2

Рис. 6.1. Участок квазилинейной цепи



$$\mathcal{E} = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E} * d\mathbf{l},$$

величина, численно равная работе сторонних сил по переносу единичного положительного заряда по данному участку. Величина  $IR$  называется напряжением (падением напряжения) на резисторе  $R$ .

Знак ЭДС:

Считается, что  $\mathcal{E} > 0$ , если сторонние силы направлены по направлению тока (например, на *рис. 6.1* – при прохождении локального источника ЭДС от контакта (–) к (+)).

$\mathcal{E} < 0$  в обратном случае (прохождение источника ЭДС от (+) к (–)).

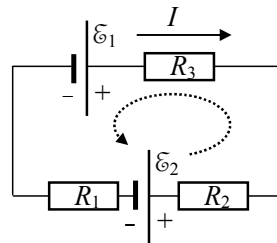
**Мощность источника ЭДС (мощность сторонних сил):**

$$P = \mathcal{E}I. \quad (6.11)$$

**Закон Ома для замкнутой неразветвленной цепи квазилинейных проводников:**

$$\pm IR = \sum_j (\pm \mathcal{E}_j), \quad (6.12)$$

где  $R$  – полное сопротивление цепи, включая внутреннее сопротивление источника ЭДС (*рис. 6.2*). При решении конкретной задачи нужно сначала выбрать направление тока (сплошная стрелка на *рис. 6.2*), которое можно задать произвольным образом (истинное направление тока определится потом знаком полученного решения). Выбор этого направления необходим для согласованного определения знака напряжений на элементах цепи. Далее производится обход контура.



*Рис. 6.2.* Замкнутая неразветвленная цепь

**Правила знаков в законе Ома для полной цепи:**

**Для тока:** ток считается положительным ( $+I$ ), если обход контура производится в направлении, совпадающем с выбранным направлением тока, и отрицательным ( $-I$ ) в обратном случае;

**Для ЭДС:** ЭДС положительна ( $+\mathcal{E}$ ), если при обходе контура источник ЭДС проходится в направлении действия сторонних сил, и отрицательна ( $-\mathcal{E}$ ) в обратном случае.

Полное сопротивление контура находится согласно правилу сложения сопротивлений при последовательном включении резисторов

$$R_{\Sigma} = \sum_i R_i .$$

Если отдельные участки цепи содержат параллельно соединенные резисторы, то их эквивалентное сопротивление определяется соотношением

$$\frac{1}{R_{\Sigma}} = \sum_i \frac{1}{R_i} .$$

Направление обхода контура можно взять любым: изменение направления обхода приведет лишь к одновременной смене знаков всех слагаемых, что не изменит уравнение по существу. Для приведенного на *рис. 6.2* примера, в соответствии с выбранным направлением тока (сплошная стрелка) и выбранным направлением обхода контура (пунктирная линия со стрелкой), уравнение закона Ома для полной цепи (6.12) имеет вид

$$-I(R_1 + R_2 + R_3) = -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2,$$

откуда 
$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2 + R_3} .$$

### Разветвленная цепь квазилинейных проводников

В разветвлённой цепи квазилинейных проводников существуют точки, называемые **узлами цепи**, в которых соединяются три или более проводника (*рис. 6.3*). Такую цепь можно условно разделить на несколько замкнутых неразветвлённых контуров.

### Правила Кирхгофа

**Правило I.** Для каждого узла цепи алгебраическая сумма сил токов равна нулю (следствие закона сохранения заряда)

$$\sum_i (\pm I_i) = 0 . \quad (6.13)$$

При суммировании знак входящего в узел тока (обычно "+") принимается противоположным знаком выходящего ("-").

**Правило II.** При обходе любого замкнутого контура, выбранного в разветвленной цепи, алгебраическая сумма напряжений на сопротивлениях цепи  $I_i R_i$  равна алгебраической сумме ЭДС, входя-

щих в данный контур (следствие потенциальности поля, создающего постоянный ток):

$$\sum_i (\pm I_i R_i) = \sum_j (\pm \mathcal{E}_j). \quad (6.14)$$

Для использования данных формул сначала нужно выбрать направления токов в каждой ветви цепи, что можно сделать произвольным образом (истинные направления токов определяются потом знаками полученных решений).

Направления обхода каждого контура также можно взять любыми: как указывалось выше, это не изменит уравнений по существу. Правила учета знаков в (6.14) аналогичны приведенным выше для закона Ома для полной цепи.

Пример разветвленной цепи показан на рис. 6.3. Произвольно выбранные направления токов показаны сплошными стрелками, направления обхода – пунктирными линиями со стрелками).

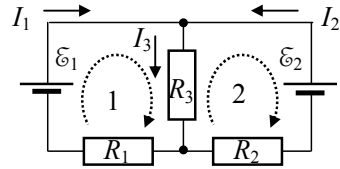


Рис. 6.3. Пример разветвленной цепи

Для данного случая уравнения Кирхгофа (6.13), (6.14) будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 & (\text{верхний узел}), \\ I_1 R_1 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1 & (\text{левый контур 1}), \\ -I_2 R_2 - I_3 R_3 = -\mathcal{E}_2 & (\text{правый контур 2}). \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим ответ:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1(R_2 + R_3) - \mathcal{E}_2 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2}, \quad I_2 = \frac{-\mathcal{E}_1 R_3 + \mathcal{E}_2(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2}.$$

При составлении уравнений Кирхгофа надо иметь в виду следующее.

Полное число **независимых** уравнений типа (6.13) и (6.14) равняется числу неизвестных токов  $N$ . Общее же число уравнений, которые можно составить, больше числа неизвестных, поскольку часть уравнений не являются независимыми.

1) При наличии в разветвленной цепи  $m$  узлов существует только  $m - 1$  независимых уравнений типа (6.13) для токов.

2) Новые независимые уравнения типа (6.14) можно получить только для тех контуров, которые не образуются наложением уже ранее рассмотренных. Общее число независимых уравнений типа (6.14) будет  $N - m + 1$ . Если схему можно представить на плоскости без пересечений проводников, то число таких независимых уравнений равно числу пространственных областей, на которые проводники разбивают схему. Например, на схеме *рис. 6.3* таких областей две и имеется два независимых уравнения для двух показанных контуров обхода. Третье уравнение, которое можно получить обходом большого контура по периметру схемы, будет суммой или разностью этих двух уравнений, т.е. не будет независимым.

**Метод контурных токов.** Удобным вариантом применения правил Кирхгофа является метод контурных токов. В нем каждому выделенному в схеме контуру сопоставляется один контурный ток, одинаковый по всему контуру. Уравнения Кирхгофа (6.14) сохраняют свой вид, но теперь напряжение на каждом участке  $R_i$ , входящем одновременно в несколько ( $m$ ) контуров, определяется полным током  $I_i$  через этот участок, который выражается через алгебраическую сумму контурных токов, проходящих через этот участок:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_j (\pm \mathcal{E}_j), \quad I_i = \sum_{k=1}^m (\pm I_{ik}). \quad (6.15)$$

С введением контурных токов уравнения для узлов (6.13) удовлетворяются автоматически, и они становятся не нужны, в чем и состоит удобство метода при расчете цепей с большим числом узлов. Правила знаков при этом остаются прежними.

Для схемы, показанной на *рис. 6.3*, метод контурных токов дает следующие два уравнения (в соответствии с выбранным направлением тока и направлением обхода контуров)

$$\begin{cases} I_1 R_1 + (I_1 + I_2) R_3 = \mathcal{E}_1 & (\text{левый контур } 1), \\ -I_2 R_2 - (I_1 + I_2) R_3 = -\mathcal{E}_2 & (\text{правый контур } 2). \end{cases}$$

Здесь учтено, что через участок  $R_3$  текут контурные токи обоих контуров. Разумеется, эта система уравнений эквивалентна системе, приведенной выше для этой же схемы.

## §6.2. Основные типы задач (классификация)

6.1. Определение сопротивления, электрических полей, напряжений и тока утечки в сплошной среде.

6.2. Определение теплоты, выделяющейся в проводнике (среде), при протекании тока.

6.3. Расчет цепей квазилинейных проводников.

6.4. Расчет разветвленных цепей, сводимых к неразветвленным благодаря элементам симметрии.

## §6.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 6.1

*Определение сопротивления, электрических полей, напряжений и тока утечки в сплошной проводящей среде*

**Метод решения.** При рассмотрении токов в проводящих средах и нахождении сопротивления среды между электродами целесообразно придерживаться следующей схемы решения задачи (электрод – эквипотенциальный проводник, электропроводность которого много больше электропроводности среды).

Для расчета сопротивления по закону Ома нужно найти отношение напряжения на электродах  $U$  и полного тока  $I$  через систему.

В качестве исходного параметра удобнее всего взять полный ток  $I$ , поскольку величины зарядов на электродах заранее могут быть не очевидны.

а) Начать решение целесообразно с нахождения плотности тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , поскольку при протекании постоянного тока для  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  *всегда* соблюдается соотношение (6.2)  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , независимо от особенностей диэлектрических и проводящих свойств среды. С другой стороны,  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  легко связать с полным током через электрод соотношением (6.4). В задачах с симметрией условие (6.2) обычно позволяет сразу определить характер зависимости плотности тока  $\mathbf{j}$  от координат.

б) Далее, пользуясь дифференциальным законом Ома (6.3), перейти к напряженности электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r})$ .

в) Зная  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , интегрированием можно найти разность потенциалов (напряжение) между электродами 1 и 2:

$$U = - \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Используя закон Ома (6.5), определить сопротивление среды между электродами

$$R = \frac{U}{I}.$$

Таким образом, задача решается в следующей последовательности:

$$I \rightarrow j \rightarrow E \rightarrow U. \quad (6.16)$$

Если проводящая среда однородна, то поле полностью определяется зарядами и потенциалами электродов, и можно исходным параметром взять напряжение на электродах и решать в обратной последовательности:

$$U \rightarrow E \rightarrow j \rightarrow I, \quad (6.17)$$

или же исходить из свободного заряда на электродах  $\pm q$  и решать по схеме:

$$q \rightarrow E \rightarrow j \rightarrow I. \quad (6.18)$$

Однако в случае неоднородной проводимости среды простой переход  $U \rightarrow E$  или  $q \rightarrow E$  невозможен. Поле  $\mathbf{E}$  будет определяться при этом не только геометрическими факторами и напряжением  $U$  или зарядом электродов  $q$ , но и характером зависимости  $\rho(\mathbf{r})$  из-за появления в проводящей среде ненулевой плотности свободных зарядов.

**Задача 6.3.1.** На плоский конденсатор ёмкостью  $C$  подано постоянное напряжение  $U$ . Найти ток утечки через конденсатор, если удельное сопротивление однородного вещества, которым заполнен зазор между обкладками конденсатора, равно  $\rho$ , а диэлектрическая проницаемость равна  $\varepsilon$ .

### Решение

Так как напряжение на обкладках конденсатора постоянно, а среда, заполняющая пространство между его обкладками, однородна, то для нахождения тока утечки, текущего через конденсатор можно воспользоваться схемой (6.17).

Электростатическое поле конденсатора однородно и напряженность его равна  $E = \frac{U}{d}$ , где  $d$  – расстояние между обкладками.

Согласно закону Ома в дифференциальной форме (6.3)  $j = \frac{U}{\rho d}$ .

Сила тока, текущего между обкладками равна

$$I = jS = \frac{US}{\rho d} = \frac{UC}{\rho \epsilon \epsilon_0},$$

где учтено, что емкость плоского конденсатора  $C = \epsilon \epsilon_0 S/d$  (см. (3.7), глава 3).

**Ответ:**  $I = \frac{UC}{\rho \epsilon \epsilon_0}$ .

*Замечание.* Возможен также более короткий способ решения данной задачи, основанный на использовании соотношении (6.7) теоретического материала. Так как среда, заполняющая пространство между обкладками конденсатора однородна, то согласно (6.7) её сопротивление равно  $R = \rho \epsilon \epsilon_0 / C$ . Используя закон Ома (6.5), сразу получаем ответ.

**Задача 6.3.2 (базовая задача).** Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено последовательно двумя диэлектрическими слоями толщиной  $d_1$  и  $d_2$ , диэлектрические проницаемости и удельные сопротивления которых соответственно равны  $\epsilon_1, \epsilon_2, \rho_1$  и  $\rho_2$ , площадь каждой из пластин равна  $S$  (рис. 6.4). Определить:

- 1) общее сопротивление конденсатора;
- 2) заряд пластин конденсатора, если он подключен к источнику постоянного напряжения  $U$ .

**Решение**

1) Виду неоднородности проводимости среды вдоль линий тока, воспользуемся схемой решения (6.16).

Так как ток однороден и постоянен, то

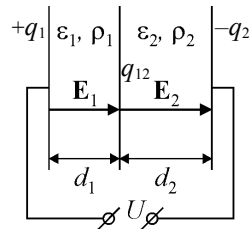


Рис. 6.4. Конденсатор с утечкой, заполненный двумя различными материалами (задача 6.3.2)

$$j_1 = j_2 = j = \frac{I}{S}.$$

Из закона Ома в дифференциальной форме (6.3) получаем напряженности полей в слоях 1 и 2:

$$E_1 = \rho_1 j, \quad E_2 = \rho_2 j.$$

Ввиду однородности полей для напряжения между обкладками конденсатора получим

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2 = j(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2),$$

откуда находим плотность тока и полную силу тока через конденсатор

$$j = \frac{U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}, \quad I = jS = \frac{U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} S.$$

Используя закон Ома (6.5), найдем сопротивление данного слоистого конденсатора

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}{S}.$$

2) Для нахождения заряда пластин можно воспользоваться граничным условием для нормальной компоненты вектора электрического смещения

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma,$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность свободных зарядов,  $\mathbf{n}$  – вектор нормали в направлении сред  $1 \rightarrow 2$ . Учитывая, что вне конденсатора  $D = 0$ , для левой пластины получим

$$\sigma_1 = D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1,$$

для правой пластины

$$\sigma_2 = -D_2 = -\varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2.$$

Напряженности полей  $E_1$  и  $E_2$  легко найти из найденной плотности тока:

$$E_1 = j\rho_1 = \frac{U\rho_1}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}; \quad E_2 = j\rho_2 = \frac{U\rho_2}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}.$$

Далее можно определить полный заряд каждой из пластин:

$$q_1 = \sigma_1 S = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 \rho_1}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} S U \quad \text{и} \quad q_2 = \sigma_2 S = -\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 \rho_2}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} S U.$$



**Ответ:** 1)  $R = \frac{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}{S}$ ;

2)  $q_1 = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 \rho_1}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} SU$ ;  $q_2 = -\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 \rho_2}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} SU$ .

*Замечание.* В отличие от случая конденсатора с непроводящей средой или средой проводящей, но имеющей однородную проводимость, здесь заряды обкладок не равны друг другу:  $|q_1| \neq |q_2|$ . Такая система эквивалентна двум последовательно включённым конденсаторам с утечкой. Причина в том, что при заряде такого конденсатора на границе раздела сред также накапливаются свободные заряды, поверхностная плотность которых равна

$$\sigma_{12} = D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 \rho_2 - \varepsilon_1 \rho_1}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} U,$$

а полный заряд на этой границе будет

$$q_{12} = \sigma_{12} S = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 \rho_2 - \varepsilon_1 \rho_1}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} SU.$$

Знак этого заряда определяется знаком выражения  $\varepsilon_2 \rho_2 - \varepsilon_1 \rho_1$ , т.е. зависит от параметров сред. Очевидно, что  $|q_{12}| = |q_1| - |q_2|$ .

Полный заряд  $q$ , получаемый конденсатором при зарядке, равен большему по модулю из зарядов пластин  $q = \max(|q_1|, |q_2|)$ . Заряд противоположного знака той же суммарной величины будет находиться на противоположной пластине и внутри конденсатора на поверхности раздела сред.

**Задача 6.3.3.** Между двумя концентрическими сферами (1) и (2) из идеального проводника, находится вещество с удельным сопротивлением  $\rho$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 1$ . Определить сопротивление  $R$  такого слоя, если его внешний радиус в два раза больше внутреннего, равного  $a$  (рис. 6.5).

### Решение

Так как среда однородна ( $\rho = \text{const}$ ), объёмная плотность заряда внутри вещества равна нулю. Считая внутреннюю и внешнюю сферы идеальными про-

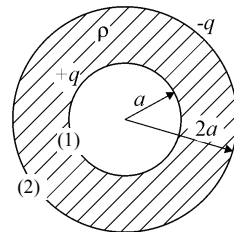


Рис. 6.5. Сферический проводящий слой (задача 6.3.3)

водниками, их можно рассматривать как электроды с равными по модулю зарядами  $+q$  и  $-q$  и решать задачу согласно схеме 6.18.

Согласно теореме Гаусса ((1.10), глава 1) напряженность электрического поля в пространстве между сферами ( $a < r < 2a$ ) равна

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Напряжение между сферами можно найти как

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_a^{2a} E dr = \left( -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Big|_a^{2a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} \right) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

Определим силу тока, текущего в такой системе. Так как заряды на электродах постоянны, то через любую поверхность (концентрическую сферу радиуса  $a \leq r \leq 2a$ ) сила тока одинакова и равна

$$I = \lambda ES = \frac{1}{\rho} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\rho\epsilon_0}.$$

Согласно закону Ома (6.5)  $R = \frac{U}{I} = \frac{\rho}{8\pi a}.$

**Ответ:**  $R = \frac{\rho}{8\pi a}.$

*Замечание 1.* Сопротивление безграничной среды с удельным сопротивлением  $\rho$ , окружающей уединенную проводящую сферу радиуса  $a$ , равно  $R_\infty = \frac{\rho}{4\pi a}$ , так как в этом случае  $r_2 \rightarrow \infty$ .

*Замечание 2.* Используя связь между сопротивлением однородной среды и её ёмкостью данную задачу можно решить короче. Так как ёмкость сферического конденсатора равна (см. (3.9) главы 3)

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 8\pi\epsilon_0 a, \text{ то воспользовавшись соотношением (6.7)}$$

будем иметь  $R = \frac{\rho\epsilon_0}{C} = \frac{\rho}{8\pi a}.$

**Задача 6.3.4.** Доказать справедливость соотношения (6.7), то есть показать, что сопротивление однородной проводящей среды, заполняющей всё пространство, между двумя идеально проводя-

щими телами произвольной формы, равно  $R = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\lambda C}$ . Здесь  $C$  – ёмкость системы,  $\lambda$  – удельная электропроводность вещества,  $\varepsilon$  – его диэлектрическая проницаемость.

### Решение

Ввиду однородности среды будем следовать схеме (6.18). Пусть проводники (электроды) заряжены одинаковыми по величине, но разными по знаку зарядами  $\pm q$ , а напряжение между ними  $U = q/C$ .

Вектор электрической индукции вблизи поверхности каждого проводника перпендикулярен поверхности и равен  $D = \sigma$  (где  $\sigma$  – поверхностная плотность свободного заряда на проводнике). Напряженность электростатического поля вблизи поверхности

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Согласно закону Ома в дифференциальной форме (6.3) вектор плотности тока параллелен вектору напряженности поля и поэтому вблизи поверхности проводников перпендикулярен поверхности и по модулю равен  $j = j_n = \lambda E = \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ .

Силу тока через электрод можно найти интегрированием плотности тока по поверхности электрода

$$I = \int_S j dS = \frac{\lambda}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_S \sigma dS = \frac{\lambda q}{\varepsilon\varepsilon_0} = \lambda \frac{CU}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Используя закон Ома (6.5), окончательно получаем

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\lambda C}.$$

*Замечание.* Поместим в однородную проводящую среду, заполняющую всё пространство, локализованный заряд объёмной плотности  $\rho_0$ . Электрическое поле, создаваемое этим зарядом, вызовет ток плотности  $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$ , который будет уменьшать объёмную плотность заряда. Из соотношений (4.6)  $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$  и (4.8)  $\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$  теоретического материала главы 4 следует, что  $\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$ . Подставив

полученное выражение в уравнение непрерывности (6.1)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \text{ имеем:}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\lambda \mathbf{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\lambda \rho}{\varepsilon \varepsilon_0} = 0.$$

$$\text{Или } \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\lambda}{\varepsilon \varepsilon_0} dt.$$

Учитывая начальное условие,  $\rho|_{t=0} = \rho_0$  получаем, что с течением времени плотность заряда будет уменьшаться по закону:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где  $\tau = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\lambda} = RC$  – время релаксации.

**Задача 6.3.5.** Определить сопротивление единицы длины провода круглого сечения радиусом  $b$ , сделанного из материала, удельная электропроводность которого зависит от расстояния  $r$  до оси провода по закону  $\lambda = \alpha r^2$ , где  $\alpha$  – постоянная величина. Считать, что длина проводника много больше его диаметра.

### Решение

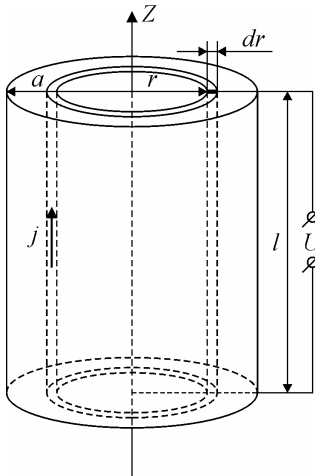


Рис. 6.6. К определению сопротивления единицы длины провода круглого сечения (задача 6.3.5)

Выберем цилиндрическую систему координат, ось  $Z$  которой совпадает с осью провода (см. рис. 6.6).

Данный проводник можно представить как совокупность тонких цилиндрических слоев, сопротивление каждого из которых (в расчете на единицу длины) одинаково по всей длине проводника. В пределах такого слоя плотность тока  $j$  также постоянна.

Пусть напряжение между точками на оси проводника, находящимися на расстоянии  $l$  друг от друга равно  $U$ . Используя закон Ома в дифференциальной форме, получим

$$j = \lambda E = \lambda \frac{U}{l}.$$

Таким образом, плотность тока в слое толщины  $dr$ , находящемся на расстоянии  $r$  от оси  $Z$ , будет равна

$$j = \lambda \frac{U}{l} = \alpha \frac{Ur^2}{l}.$$

Согласно (6.4) найдем полную силу тока

$$I = \int_S j dS = \int_0^b \alpha \frac{Ur^2}{l} 2\pi r dr = \alpha U \frac{\pi b^4}{2l}.$$

Тогда по закону Ома для участка цепи (6.5) сопротивление участка провода длиной  $l = 1$  м равно

$$R_l = \frac{U}{I} = \frac{2}{\alpha \pi b^4}.$$

**Ответ:**  $R_l = \frac{2}{\alpha \pi b^4}.$

**Задача 6.3.6 (базовая задача).** Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и с удельной проводимостью, меняющейся в направлении, перпендикулярном к обкладкам, по линейному закону от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ . Площадь пластин  $S$ , ширина зазора  $d$ . На конденсатор подано напряжение  $U$ .

Найти: 1) ток  $I$  через конденсатор; 2) заряды пластин  $q_1$  и  $q_2$ ; 3) заряд конденсатора  $q$ ; 4) плотность свободных зарядов  $\rho_{\text{своб}}(x)$  внутри зазора; 5) плотность связанных (поляризационных) зарядов  $\rho'(x)$  в среде; 6) полный свободный заряд в среде  $q_{\text{своб}}$ .

### Решение

Ввиду неоднородности среды в направлении протекания тока воспользуемся схемой (6.16).

Запишем линейный закон изменения удельной проводимости  $\lambda(x) = \lambda_1 + \alpha x$ . Для нахождения  $\alpha$  подставим граничное условие:

$$\lambda(d) = \lambda_1 + \alpha d = \lambda_2. \text{ Отсюда получаем, что } \alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d}, \text{ и}$$

$$\lambda(x) = \lambda_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d} x.$$

В плоском конденсаторе плотность тока везде однородна и постоянна  $j = I / S = \text{const}$ . Однако напряженность электрического поля уже будет зависеть от  $x$ :  $E(x) = \frac{j}{\lambda(x)}$ .

Для напряжения между пластинами получаем

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E(x) dx = j \int_0^d \frac{dx}{\lambda_1 + \alpha x} = \frac{j}{\alpha} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

Таким образом,  $j = \frac{\alpha U}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)}$  и

$$I = jS = \frac{\alpha SU}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)} SU.$$

Согласно закону Ома (6.5) сопротивление конденсатора равно

$$R = \frac{U}{I} = \frac{d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)}{S (\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Заряды пластин определим аналогично задаче **6.3.2** из граничных условий для вектора электрического смещения, величина которого в среде

$$D(x) = \varepsilon_0 \varepsilon \cdot E(x) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{j}{\lambda(x)}.$$

На левой пластине ( $x = 0$ ):

$$q_1 = S\sigma_1 = SD(0) = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 j S}{\lambda_1} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 I}{\lambda_1} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) SU}{\lambda_1 d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)},$$

на правой пластине ( $x = d$ ):

$$q_2 = S\sigma_2 = -SD(d) = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 j S}{\lambda_2} = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 I}{\lambda_2} = -\frac{(\lambda_2 - \lambda_1) SU}{\lambda_2 d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)}.$$

Полный заряд  $q$ , получаемый конденсатором при зарядке, равен большему по модулю из зарядов пластин:  $q = \max(|q_1|, |q_2|)$ .

Объемную плотность свободных зарядов в среде можно найти как

$$\begin{aligned}
 \rho(x) &= \operatorname{div} \mathbf{D} = \\
 &= \frac{dD}{dx} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{dE}{dx} = \varepsilon_0 \varepsilon j \frac{d}{dx} \frac{1}{\lambda(x)} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon j \alpha}{\lambda^2(x)} = -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\alpha^2 U}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)} \frac{1}{\lambda^2(x)} = \\
 &= -\varepsilon_0 \varepsilon \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d} \right)^2 \frac{U}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)} \frac{1}{\lambda^2(x)} = \\
 &= -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon (\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)} \frac{U}{(\lambda_1 d + (\lambda_2 - \lambda_1)x)^2}.
 \end{aligned}$$

Полный свободный заряд в объеме конденсатора равен

$$\begin{aligned}
 q &= \int_V \rho(x) dV = S \int_0^d \rho(x) dx = S \int_0^d \frac{dD}{dx} dx = \\
 &= S(D(d) - D(0)) = -q_2 - q_1 = \varepsilon_0 \varepsilon I \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 S U}{\lambda_1 \lambda_2 d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)}.
 \end{aligned}$$

Поскольку поле  $\mathbf{E}$  внутри неоднородно, в среде появится неоднородная поляризация  $P(x) = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E(x)$  и связанные поляризационные заряды, плотностью  $\rho'(x) = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\varepsilon_0(\varepsilon - 1) \frac{dE}{dx}$ . Учитывая,

что  $\rho(x) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{dE}{dx}$ , для объемной плотности поляризационных зарядов получаем

$$\rho'(x) = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho(x) = -\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)} \frac{U}{(\lambda_1 d + (\lambda_2 - \lambda_1)x)^2}.$$

**Ответ:** 1)  $I = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)} S U$ ;

2)  $q_1 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) S U}{\lambda_1 d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)}$ ,  $q_2 = -\frac{(\lambda_2 - \lambda_1) S U}{\lambda_2 d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)}$

3)  $q = \max(|q_1|, |q_2|)$ ; т.е.  $q = |q_1|$  при  $\lambda_1 < \lambda_2$  и  $q = |q_2|$  при  $\lambda_1 > \lambda_2$ ;

4)  $\rho(x) = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon (\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)} \frac{U}{(\lambda_1 d + (\lambda_2 - \lambda_1)x)^2}$ ;

5)  $\rho'(x) = -\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)} \frac{U}{(\lambda_1 d + (\lambda_2 - \lambda_1)x)^2}$ ;

$$6) q_{\text{своб}} = -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 SU}{\lambda_1 \lambda_2 d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)}.$$

### Задачи типа 6.2

*Нахождение теплоты, выделяющейся в проводнике (среде) при протекании тока*

**Метод решения.** Задачи этого типа решаются с помощью закона Джоуля–Ленца в интегральной или дифференциальной форме (6.8) и (6.9). Особое внимание во многих задачах следует уделить расчету сопротивления цепи.

**Задача 6.3.7 (базовая задача).** Пространство между обкладками цилиндрического конденсатора длиной  $L$  заполнено веществом с удельным сопротивлением  $\rho$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 1$ . Определить тепловую мощность тока, выделяемую в конденсаторе, если напряжение между его обкладками  $U_0$ , радиусы обкладок  $R_1$  и  $R_2$ . Краевыми эффектами пренебречь (рис. 6.7).

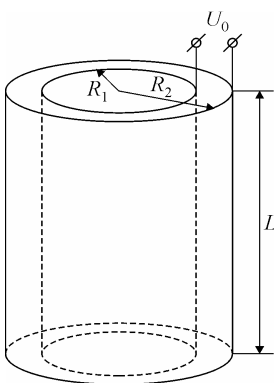


Рис. 6.7. Цилиндрический конденсатор задачи 6.3.7

### Решение

Сила тока, текущего в такой цепи, постоянна, однако плотность тока  $j$  зависит от расстояния до оси цилиндров.

По закону Джоуля–Ленца в дифференциальной форме (6.8) объёмная плотность тепловой мощности равна

$$P_V = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} E^2.$$

В слое  $dr$ , находящемся на расстоянии  $r$  от оси конденсатора, будет выделяться мощность

$$dP = P_V dV = \frac{1}{\rho} E^2 2\pi r L dr.$$

По теореме Гаусса (см. (1.10), глава 1) напряженность электрического поля на расстоянии  $r$  от оси конденсатора равна

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L r}$$

(где  $q$  – заряд на внутренней обкладке конденсатора). Тогда



$$P = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} E^2 \cdot 2\pi r L dr = \frac{q^2}{\rho \cdot 2\pi \varepsilon_0^2 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q^2}{\rho \cdot 2\pi \varepsilon_0^2 L} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Используя выражение для емкости цилиндрического конденсатора ((3.8) главы 3)  $C = \frac{2\pi \varepsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}$ , можно найти его заряд, как

$$q = CU = \frac{2\pi \varepsilon_0 L U_0}{\ln(R_2/R_1)}. \text{ Окончательно получим } P = \frac{2\pi L U_0^2}{\rho \ln(R_2/R_1)}.$$

**Ответ:**  $P = \frac{2\pi L U_0^2}{\rho \ln(R_2/R_1)}.$

*Замечание 1.* Можно решить данную задачу и другим способом – найти сопротивление конденсатора (согласно методу, предложенному в п. 6.2.1), а затем воспользоваться законами Ома и Джоуля–Ленца в интегральной форме (6.5) и (6.8).

*Замечание 2.* Еще проще получить результат, воспользовавшись формулой (6.7) теоретического материала  $RC = \rho \varepsilon_0 \varepsilon$ , справедливой для электродов любой формы. Действительно, (учитывая, что  $\varepsilon = 1$  и  $R = \frac{\rho \varepsilon_0}{C}$ ) сразу получаем

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{CU^2}{\rho \varepsilon_0} = \frac{2\pi L U^2}{\rho \ln(R_2/R_1)}.$$

**Задача 6.3.8.** Сферический конденсатор заполнен однородным веществом с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и удельным сопротивлением  $\rho$ . Первоначально конденсатор не заряжен. Найти количество теплоты, выделившееся в системе, после сообщения внутренней обкладке конденсатора заряда  $q_0$ . Радиусы обкладок конденсатора равны  $a$  и  $b = 3a$ .

### Решение

После сообщения внутренней обкладке конденсатора заряда между его обкладками возникнет электрический ток, который будет течь до тех пор, пока разность потенциалов между внутренней и внешней обкладками не станет равной нулю. То есть в конечном состоянии весь заряд окажется распределенным по внешней обкладке конденсатора.

*Способ 1.* Опираясь на решение задачи 6.3.3 можно рассматривать такой конденсатор как проводник сопротивлением  $R$ .

Обозначим через  $q_1 = q$  заряд на внутренней сфере в произвольный момент времени, тогда заряд внешней сферы  $q_2 = q_0 - q$ . Разность потенциалов между ними в процессе перетекания заряда

$$U(q) = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{b} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{b} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab} = \frac{q}{C},$$

где  $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$  – ёмкость сферического конденсатора (см. (3.9), глава 3). В соответствии с законом Джоуля–Ленца для тепла  $dQ$ , выделившегося в проводнике за время  $dt$ , получим:

$$dQ = I^2 R dt = IR Idt = \frac{U}{R} R Idt = -U dq = -\frac{q}{C} dq,$$

где  $dq = -Idt$  – убыль заряда внутренней обкладки за время  $dt$ .

Всё тепло, выделившееся в конденсаторе за время перетекания заряда, можно рассчитать как

$$Q = -\int_{q_0}^0 \frac{q}{C} dq = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab} = \frac{q_0^2}{12\pi a\epsilon_0\epsilon_0}.$$

*Способ 2.* Согласно замечанию к задаче 6.3.4, заряд на внутренней обкладке конденсатора будет убывать по закону  $q = q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ . Тогда сила тока, текущего между обкладками конденсатора будет зависеть от времени как

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Все тепло, выделившееся в конденсаторе, вычисляется как

$$Q = \int_0^{\infty} I^2 R dt = \int_0^{\infty} R \left( \frac{q_0}{RC} \right)^2 \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) dt = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}.$$

**Ответ:**  $Q = \frac{q_0^2}{12\pi a\epsilon_0\epsilon_0}.$

*Замечание 1.* Выделившееся тепло не зависит от сопротивления между обкладками конденсатора. Величина сопротивления влияет только на скорость процесса.

*Замечание 2.* Выделившееся тепло проще найти из закона сохранения энергии без расчета силы тока. Оно будет равно разности начальной и конечной электростатической энергии системы. Учитывая, что энергия заряженной сферы радиуса  $r$  равна  $\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ , сразу

$$\text{получаем } Q = W_1 - W_2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot 3a} = \frac{q^2}{12\pi a \epsilon \epsilon_0}.$$

### Задачи типа 6.3

#### Цепи квазилинейных проводников

**Метод решения.** Для неразветвленных (последовательных) цепей – применение закона Ома для полной цепи (6.12). Для разветвленных цепей – применение правил Кирхгофа в форме (6.13–6.14) или (6.15).

Два примера решения задач типа 6.2.3 были рассмотрены выше при анализе формул (6.12–6.14).

**Задача 6.3.9 (базовая задача).** Найти сопротивление между точками  $A$  и  $B$  в схеме, представленной на рис. 6.8а.

#### Решение

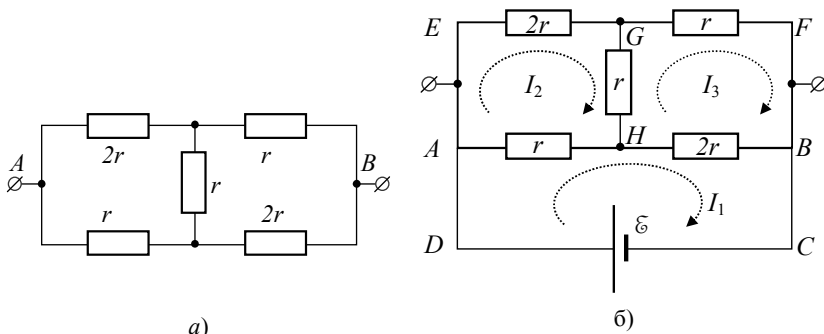


Рис. 6.8 а – схема соединения резисторов в задаче 6.3.9;  
б – схема цепи и контурные токи

Пусть к точкам  $A$  и  $B$ , между которыми нужно определить сопротивление, подключен источник с ЭДС  $\mathcal{E}$  (рис. 6.8б). Применим метод контурных токов. Проводники разбивают данную схему на 3 области. Каждой из них сопоставим соответствующие контурные

токи  $I_{1-3}$ , направление которых произвольно выберем, например, как показано на *рис. 6.8б*, пунктирными линиями со стрелкой. Запишем 3 независимых уравнений Кирхгофа, совершив обходы трех контуров.

$$\text{Контур } ABCD: \quad (I_1 - I_2)r + (I_1 - I_3)2r = \mathcal{E},$$

$$DEFC: \quad I_2 2r + I_3 r = \mathcal{E},$$

$$AEGH: \quad I_2 2r + (I_2 - I_3)r + (I_2 - I_1)r = 0.$$

Решая получившуюся систему уравнений, получаем  $I_1 = \frac{5\mathcal{E}}{7r}$ ,

откуда находим сопротивление цепи  $R_{AB} = \mathcal{E}/I_1 = (7/5)r$ .

**Ответ:**  $R_{AB} = (7/5)r$ .

### Задачи типа 6.4

*Разветвленные цепи, сводимые к неразветвленным благодаря элементам симметрии*

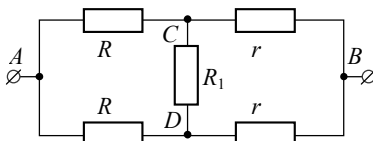
**Методы решения.** Задачи этого типа, в принципе, можно решить общим методом с помощью правил Кирхгофа. При этом, однако, решение зачастую получается громоздким или в ряде случаев приводит к бесконечной системе уравнений, анализ которой требует особых методов.

Возможны разные способы сведения к задаче с неразветвленной цепью: соединение точек равного потенциала, удаление проводников с нулевым током, соединяющих точки равного потенциала, добавление дополнительного звена к бесконечной повторяющейся цепочке и др.

**Задача 6.3.10.** Найти сопротивление  $R_{AB}$  между точками  $A$  и  $B$  в схеме, представленной на *рис. 6.9*. Даны величины сопротивлений  $R, r, R_1$ .

#### Решение

При подключении данной цепи к источнику ЭДС в силу симметрии схемы потенциалы точек  $C$  и  $D$  будут одинаковы и ток в  $R_1$  отсутствует.



*Рис. 6.9.* Схема к задаче 6.3.10

**Способ 1.** Ввиду равенства потенциалов точек  $C$  и  $D$  их можно соединить между собой. Схема сводится к последовательному соединению левого и правого участков с сопротивлениями  $R/2$  и  $r/2$  соответственно, что дает  $R_{AB} = \frac{1}{2}(R+r)$ .

**Способ 2.** Поскольку тока в участке  $CD$  нет, резистор  $R_1$  можно убрать. Схема сводится к параллельному соединению двух одинаковых участков с сопротивлением  $R+r$ , что дает тот же результат.

**Ответ:**  $R_{AB} = \frac{1}{2}(R+r)$ .

**Задача 6.3.11 (базовая задача).** Бесконечная цепь образована повторением звена  $R_1, R_2$ . Найти сопротивление  $R_{AB}$  между точками  $A$  и  $B$  (рис. 6.10).

**Решение**

Пусть вся цепочка эквивалентна сопротивлению  $R_{AB}$ . Ввиду ее бесконечности добавление еще одного звена  $R_1, R_2$  не изменит ее сопротивления (рис. 6.11), поэтому

$$R_{AB} = R_1 + \frac{R_2 R_{AB}}{R_2 + R_{AB}}.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$R_{AB} = \frac{R_1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{1 + 4R_2}{R_1}} \right).$$

**Ответ:**  $R_{AB} = \frac{R_1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{1 + 4R_2}{R_1}} \right)$ .

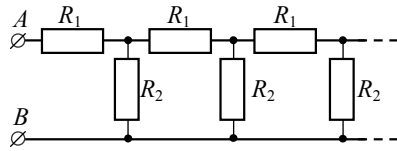


Рис. 6.10. Бесконечная цепь (задача 6.3.11)

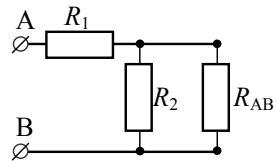


Рис. 6.11. Эквивалентная схема соединения элементов цепи в задаче 6.3.11

**Задача 6.3.12.** Имеется бесконечная сетка с квадратными ячейками. Сопротивление каждого проводника между узлами ячейки равно  $R$ . Найти сопротивление  $R_{AB}$  между соседними узлами (рис. 6.12).

## Решение

Данная задача не сводится к неразветвленной цепи, но позволяет ввиду симметрии эффективно применить принцип суперпозиции.

На бесконечности потенциал везде равен нулю, поэтому бесконечно удаленные узлы можно соединить между собой проводником, не меняя картины протекания токов. Подсоединим источник ЭДС плюсом к точке  $A$ , а минусом – к этому бесконечно удаленному проводнику. Тогда в силу симметрии ток  $I$ , входящий в  $A$ , разделится на четыре части величиной  $I/4$  на каждом из 4 проводников, выходящих из  $A$ . Подсоединим теперь такой же источник ЭДС минусом к точке  $B$ , а плюсом – к бесконечно удаленному проводнику. Поскольку относительно бесконечности точка  $B$  эквивалентна  $A$ , то в точку  $B$  по каждому из 4 проводников будут сходиться токи величиной  $-I/4$ , давая в сумме полный ток  $-I$ . Пусть будут теперь подключены оба источника ЭДС. Полный ток на бесконечно удаленный проводник обратится в нуль, т.е. ток будет течь только между точками  $A$  и  $B$ .

По проводу  $AB$  потечет ток  $I_{AB} = I/4 + I/4 = I/2$ , следовательно, напряжение на нем будет  $U_{AB} = (I/2)R$ . По закону Ома  $R_{AB} = U_{AB}/I_{AB} = R/2$ . Решение этой задачи по правилам Кирхгофа привело бы к бесконечной системе уравнений.

**Ответ:**  $R_{AB} = \frac{1}{2}R$ .

## §6.4. Задачи для самостоятельного решения

**6.4.1.** Два одинаковых металлических шара с радиусами  $a$  находятся в однородной среде с удельным сопротивлением  $\rho$ . Определить сопротивление  $R$  между шарами, считая, что расстояние между шарами много больше их радиуса.

**Ответ:**  $R = \frac{\rho}{2\pi a}$ .

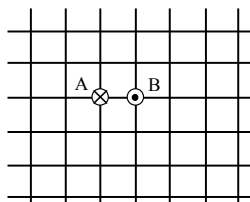


Рис. 6.12. Бесконечная проводящая сетка с квадратными ячейками (задача 6.3.12)

**6.4.2.** Найти сопротивление между внутренней и внешней поверхностями кольца толщиной  $d$ . Материал кольца имеет удельное сопротивление  $\rho$ . Радиусы внутренней и внешней частей кольца равны  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ).

**Ответ:** 
$$R = \frac{\rho}{2\pi d} \ln \frac{b}{a}.$$

**6.4.3.** Плоский конденсатор, заполненный веществом, диэлектрическая проницаемость которого равна  $\epsilon$ , за время  $\tau$  теряет треть сообщенного ему заряда. Считая, что утечка заряда происходит только через диэлектрическую прокладку, найти удельное сопротивление её материала.

**Ответ:** 
$$\rho = \frac{\tau}{\epsilon \epsilon_0 \ln(3/2)}.$$

**6.4.4.** Обкладкам конденсатора емкости  $C$  сообщили заряды, равные соответственно  $+q_0$  и  $-q_0$ . Затем обкладки замкнули через сопротивление  $R$ . Найти заряд, протекший в цепи за время  $\tau$ .

**Ответ:** 
$$q = q_0 (1 - e^{-\tau/RC}).$$

**6.4.5.** Зазор между обкладками плоского конденсатора толщиной  $d$  заполнен последовательно двумя диэлектрическими слоями одинаковой толщины. Удельные сопротивления слоев соответственно равны  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = 1$ . Площадь обкладок  $S$ . На конденсатор подано напряжение  $U$ . Найти тепловую мощность, выделяемую в каждом слое.

**Ответ:** 
$$P_1 = \frac{2U^2}{d} \frac{\rho_1}{(\rho_1 + \rho_2)^2} S, \quad P_2 = \frac{2U^2}{d} \frac{\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} S.$$

**6.4.6.** Металлический шар радиуса  $R$  находится в среде с удельной проводимостью  $\lambda$ . На шар в некоторый момент времени помещен заряд  $q$ . Определить количество теплоты, выделившееся во всей среде за время, пока весь заряд стечет с шара.

**Ответ:** 
$$Q = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

**6.4.7.** Пространство между обкладками цилиндрического конденсатора длины  $L$  заполнено двумя слоями веществ с удельными проводимостями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно. Определить мощность, выделяемую в первом слое, если напряжение между обкладками  $U$ . Радиусы цилиндров равны  $R_1, R_2, R_3$ .

**Ответ:** 
$$P = \frac{2\pi U^2 L \lambda_1 \lambda_2^2 \ln \frac{R_2}{R_1}}{\left( \lambda_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \lambda_1 \ln \frac{R_3}{R_2} \right)^2}.$$

**6.4.8.** Пространство между обкладками сферического конденсатора, радиусы обкладок которого равны  $R_1$  и  $R_2$ , заполнено веществом с удельным сопротивлением  $\rho$ . Какое количество теплоты будет выделяться в единицу времени в такой системе, если между электродами конденсатора поддерживается постоянная разность потенциалов  $U$ ?

**Ответ:** 
$$P = \frac{4\pi U^2 R_1 R_2}{\rho(R_2 - R_1)}.$$

**6.4.9.** В схеме, представленной на рис. 6.13, известны ЭДС и внутренние сопротивления источников  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, r_1, r_2, r_3$ .

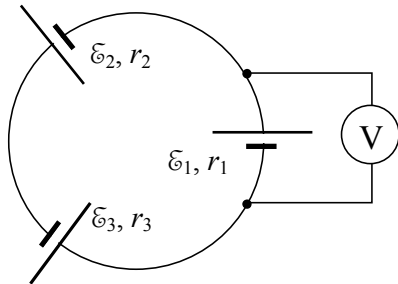


Рис. 6.13. Электрическая схема задачи 6.4.9

- 1) Найти напряжение  $U$ , показываемое идеальным вольтметром  $V$  (рис. 6.13).
- 2) Чему равно  $U$ , если  $\mathcal{E}_1/r_1 = \mathcal{E}_2/r_2 = \mathcal{E}_3/r_3$ ?

**Ответ:** 1)  $U = -r_1 \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3}{r_1 + r_2 + r_3} - \mathcal{E}_1$ ; 2)  $U = 0$ .

**6.4.10.** Аккумулятор с ЭДС  $\mathcal{E} = 2,6$  В, замкнутый на внешнюю цепь, дает ток  $I = 1$  А при напряжении на его клеммах  $U = 2$  В. Найти тепловую мощность  $P$ , выделяемую в аккумуляторе, и мощность  $P_{эл}$ , которую развивают в нем электрические силы.

**Ответ:**  $P = I(\mathcal{E} - U) = 0,6$  Вт,  $P_{эл} = -IU = -2$  Вт.



*Замечание:* мощность электрических сил в аккумуляторе противоположна по знаку мощности сторонних сил  $P^{\text{стор}} = IU$ , обуславливающих его ЭДС.

**6.4.11.** Электромотор постоянного тока подключили к напряжению  $U$ . Сопротивление его обмотки равно  $R$ . При каком токе  $I$  через обмотку полезная мощность мотора будет максимальна? Чему равна эта максимальная мощность  $P_{\text{макс}}$ ? Каков при этом к.п.д. мотора  $\eta$ ?

**Ответ:**  $I = \frac{\xi}{2R}$ ;  $P_{\text{макс}} = \frac{\xi^2}{4R}$ ;  $\eta = 0,5$ .

*Замечание:* тип мотора не имеет значения.

**6.4.12.** В схеме, представленной на рис. 6.14. дано:  $R, R_{1-3}, \xi, \xi_0$ . Найти силу тока через резистор  $R$ .

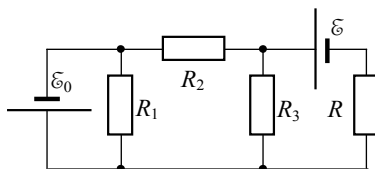


Рис. 6.14. Электрическая схема задачи 6.4.12

**Ответ:**  $I = \frac{\xi(R_2 + R_3) + \xi_0 R_3}{R(R_2 + R_3) + R_2 R_3}$ .

**6.4.13.** Между точками  $A$  и  $B$  в схеме, представленной на рис. 6.15. поддерживается напряжение  $U = 20$  В,  $R = 5$  Ом. Найти силу тока и его направление на участке  $CD$ .

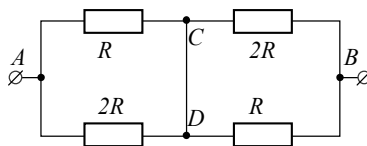


Рис. 6.15. Электрическая схема задачи 6.4.13

**Ответ:**  $I = \frac{U}{4R} = 1$  А.

Направление тока от  $C$  к  $D$ .

**6.4.14.** Найти сопротивление между точками  $A$  и  $B$  в схеме, представленной на рис. 6.16, если  $R = 100$  Ом,  $r = 50$  Ом.

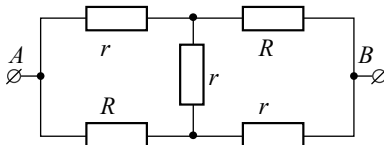


Рис. 6.16. Электрическая схема задачи 6.4.14

**Ответ:**  $R_{AB} = \frac{r(r + 3R)}{R + 3r} = 70$  Ом.

**6.4.15.** Цепь состоит из двух батарей с ЭДС  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  и резисторов  $R_{1-4} = R$  (рис. 6.17). Какая тепловая мощность рассеивается на каждом из этих резисторов?

**Ответ:**

$$P_1 = P_4 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)^2}{4R},$$

$$P_2 = P_3 = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2}{4R}.$$

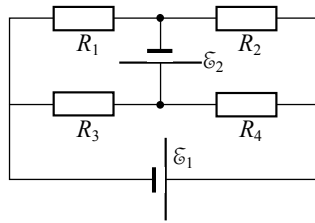


Рис. 6.17. Схема соединения элементов цепи задачи 6.4.15

**6.4.16.** Найти ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутреннее сопротивление  $r$  источника, эквивалентного двум параллельно соединенным элементам с ЭДС и внутренними сопротивлениями  $\mathcal{E}_1, r_1$  и  $\mathcal{E}_2, r_2$  соответственно.

**Ответ:**  $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}, \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$

**6.4.17.** В схеме, представленной на рис. 6.18, даны величины  $\mathcal{E}_{1,2}, R_{1,2}$ . При каком сопротивлении  $R$  выделяемая на нем тепловая мощность будет максимальна? Чему она равна?

**Ответ:**

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \quad P_{\text{макс}} = \frac{(\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1)^2}{4R_1 R_2 (R_1 + R_2)}.$$

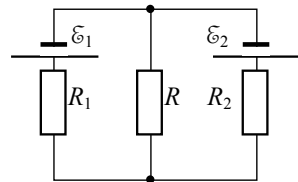


Рис. 6.18. Электрическая схема задачи 6.4.17.

**6.4.18.** В схеме, представленной на рис. 6.19, известны  $R_{1-5}$ , причем  $R_1/R_2 = R_3/R_4$ . Найти сопротивление  $R_{AB}$  между точками  $A$  и  $B$ .

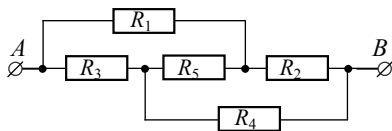
**Ответ:**  $R_{AB} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}.$

**6.4.19.** Сопротивление каждого ребра куба равно  $R$ . Найти сопротивление между точками  $A$  и  $B$ ,  $A$  и  $C$ ,  $A$  и  $D$  (рис. 6.20).

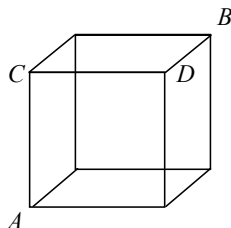
**Ответ:**  $R_{AB} = (5/6)R, \quad R_{AC} = (7/12)R, \quad R_{AD} = (3/4)R.$

**6.4.20.** Найти сопротивление  $R_{AB}$  между точками  $A$  и  $B$  бесконечной цепочки *рис. 6.21*.

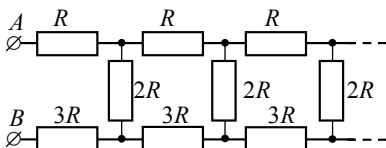
**Ответ:**  $R_{AB} = 2R(1 + \sqrt{3})$ .



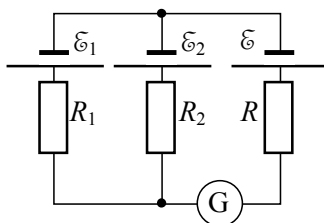
*Рис. 6.19.* Соединение сопротивлений на участке цепи (задача 6.4.18).



*Рис. 6.20.* Куб из проводящей проволоки (задача 6.4.19).



*Рис. 6.21* Бесконечная цепь (задача 6.4.20).



*Рис. 6.22.* Электрическая схема задачи 6.4.21.

**6.4.21.** Заданные сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  подобраны так, что ток через гальванометр  $G$  равен нулю. Считая известными ЭДС  $\epsilon_{1,2}$ , Найти ЭДС  $\epsilon$  (*рис. 6.22*).

**Ответ:**  $\epsilon = \frac{\epsilon_1 R_2 + \epsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}$ .

### Литература к главе 6

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм, –М.: Оникс 21 век, 2005, §§ 25-30.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. –М., Физматлит, 2006, §§ 40-48.
3. Калашиников С.Г. Электричество., –М.: Физматлит, 2003, §§ 53-74.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. –М.: Наука, 2003, §§ 35-41.

## Глава 7

## МАГНИТНОЕ ПОЛЕ СТАЦИОНАРНОГО ТОКА В ВАКУУМЕ

### § 7.1. Теоретический материал

**Магнитостатическое поле.** Всякий движущийся заряд порождает в окружающем пространстве помимо электрического, и магнитное поле. Магнитное поле, порождаемое постоянными (стационарными) токами или покоящимися магнитами, является магнитостатическим полем. Характеристики такого поля не изменяются с течением времени. С другой стороны, на любой движущийся заряд, помещённый во внешнее магнитное поле, действует со стороны этого поля некоторая сила.

**Элемент линейного тока** – если электрический ток силы  $I$  течет по бесконечно тонкому (в физическом смысле) проводнику, то он называется линейным током. В этом случае можно говорить об элементе тока на участке  $dl$  проводника. Величина  $I dl$  называется элементом линейного тока. Здесь вектор  $dl$  совпадает по направлению с током, текущим в проводнике. Каждый элемент линейного тока создаёт своё магнитостатическое поле.

**Магнитная постоянная** – в системе единиц СИ  $\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м (равенство точное),  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ , где  $c$  – скорость света в вакууме.

**Взаимодействие элементов линейного тока** описывается **законом Био–Савара–Лапласа–Ампера**: сила, действующая на элемент линейного тока  $I_2 dl_2$  со стороны элемента линейного тока  $I_1 dl_1$  равна

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 I_1 [dl_2 [dl_1 \mathbf{r}_{12}]]}{r_{12}^3}, \quad (7.1)$$

где  $\mathbf{r}_{12}$  – вектор, направленный от элемента  $I_1 dl_1$  к  $I_2 dl_2$ .

Взаимодействие элементов тока не удовлетворяет третьему закону Ньютона  $d\mathbf{F}_{12} \neq -d\mathbf{F}_{21}$ , однако для суммарных сил взаимодействия замкнутых контуров с током третий закон Ньютона выполняется  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ .

**Вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$ .** В соответствии с принципом близкодействия (аналогично электростатике) взаимодействие двух

элементов тока можно представить следующим образом: элемент тока  $I_1 dl_1$  создаёт в заданной точке магнитное поле, величина и направление которого характеризуется силовой характеристикой поля – вектором магнитной индукции  $\mathbf{B}$ .

Величина магнитной индукции пропорциональна максимальной силе, действующей на элемент тока (см. (7.2)), или максимальному вращающему моменту, действующему на замкнутый контур с током.

**Единицы измерения магнитной индукции** – в системе единиц СИ единицей измерения индукции магнитного поля является Тесла  $\left( \text{Тл} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} \right)$ . В системе единиц Гаусса индукция магнитного поля измеряется в Гауссах:  $1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$ .

**Линия магнитного поля** – линия, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  в данной точке. Линии магнитного поля – замкнутые линии в силу вихревого характера поля  $\mathbf{B}$ .

**Закон Ампера:** сила, действующая на элемент линейного тока, помещенный в магнитное поле индукции  $\mathbf{B}$ , равна

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l} \mathbf{B}] . \quad (7.2)$$

**Закон Био–Савара–Лапласа:** элемент линейного тока  $I dl$  создает магнитное поле, индукция которого в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , определяется соотношением

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\mathbf{l} \mathbf{r}]}{r^3} ; \quad (7.3)$$

тогда для замкнутого линейного тока  $I$ :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{[d\mathbf{l} \mathbf{r}]}{r^3} k ; \quad (7.4)$$

для объемных токов плотностью  $\mathbf{j}$ :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{j} \mathbf{r}]}{r^3} dV . \quad (7.5)$$

**Принцип суперпозиции** – вектор индукции магнитного поля, создаваемого несколькими источниками, равен сумме векторов магнитных индукций, создаваемых каждым из источников поля при отсутствии других:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots \quad (7.6)$$

**Сила Лоренца:** сила, действующая на точечный заряд, движущийся в электромагнитном поле со скоростью  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (7.7)$$

**Циркуляция вектора  $\mathbf{A}$**  по замкнутому контуру  $L$  – интеграл вида

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

**Ротор векторной функции  $\mathbf{A}$**  – вектор, проекция которого на положительное направление нормали  $\mathbf{n}$  (положительное направление вектора нормали  $\mathbf{n}$  и направление обхода контура связаны правилом правого винта) равна пределу отношения циркуляции вектора  $\mathbf{A}$  по физически бесконечно малому контуру  $L$  к площади  $\Delta S$ , ограниченной этим контуром

$$\text{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

В декартовой системе координат с ортами  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  ротор вектора  $\mathbf{A}$  определяется соотношением, которое удобно записать в виде символического детерминанта:

$$\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

**Теорема Стокса:** циркуляция вектора  $\mathbf{A}$  по произвольному контуру  $L$  равна потоку ротора вектора  $\mathbf{A}$  через любую поверхность, опирающуюся на контур  $L$  (позволяет преобразовать интеграл по контуру в поверхностный интеграл):

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} \quad (7.8)$$

(см. теоретический материал главы 2, (2.7) – (2.10)).

**Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля в интегральной форме (закон полного тока):**

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad (7.9)$$

где  $I$  – полный ток, охватываемый контуром  $L$ . Направление обхода контура и знак тока связаны правилом правого винта.

**Дифференциальные уравнения магнитного поля стационарного тока в вакууме:**

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (7.10)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (7.11)$$

Уравнение (7.11) является дифференциальной формулировкой закона полного тока (7.9).

Уравнения (7.10) и (7.11) составляют систему уравнений Максвелла для магнитного поля стационарного тока в вакууме.

**Вихревой характер магнитного поля:** интегральное уравнение, соответствующее уравнению (7.10), имеет вид

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (7.12)$$

Это означает, что не существует «магнитных зарядов», являющихся источниками этого поля. Математическим условием вихревого характера поля некоторого вектора  $\mathbf{A}$  является условие  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Силовые линии вихревого поля являются замкнутыми.

Так как  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , то магнитное поле является вихревым.

**Векторный магнитный потенциал:** поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , а  $\operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{A}) \equiv 0$ , то существует вектор  $\mathbf{A}$  такой, что

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \quad (7.13)$$

он называется векторным магнитным потенциалом. Векторный потенциал магнитного поля, создаваемого элементом тока  $I d\mathbf{l}$ , равен

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} d\mathbf{l}.$$

**Калибровка векторного магнитного потенциала.** Векторный магнитный потенциал  $\mathbf{A}$  (так же, как и скалярный электрический потенциал  $\varphi$ ) определен неоднозначно (с точностью до градиента произвольной функции, поскольку  $\operatorname{rot} (\operatorname{grad} f) \equiv 0$ ). Эту неоднозначность можно устранить, наложив на потенциал дополнительное условие, называемое условием калибровки:

1) Кулоновская калибровка (для магнитоэстатических задач):

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0; \quad (7.14)$$

в этом случае  $\mathbf{A}$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

2) Лоренцевская калибровка (для динамических задач):

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (7.15)$$

На границах раздела сред тангенциальная компонента векторного магнитного потенциала  $\mathbf{A}$  непрерывна.

**Магнитный момент плоского линейного контура** площади  $S$  с током  $I$  равен

$$\mathbf{p}_m = IS \mathbf{n} \quad (7.16)$$

где  $\mathbf{n}$  – положительная нормаль к контуру, обходимому по направлению тока (рис. 7.1).

**Магнитный момент электрического тока** – векторная величина, определяемая соотношением:

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r} \mathbf{j}] dV \quad \text{для объемного тока плотности } \mathbf{j}, \quad (7.17)$$

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} \int_S [\mathbf{r} \mathbf{i}] dS \quad \text{для поверхностного тока плотности } \mathbf{i}, \quad (7.18)$$

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} I \int_L [\mathbf{r} d\mathbf{l}] \quad \text{для линейного тока } I, \quad (7.19)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, проведенный из начала отсчета к элементу тока. Магнитный момент замкнутой системы токов не зависит от выбора начала отсчета.

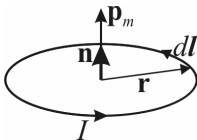


Рис. 7.1. Магнитный момент плоского кругового контура с током.

Пользуясь определением (7.19) легко получить выражение (7.16) для магнитного момента плоского линейного кругового контура радиуса  $R$  с током  $I$  (рис. 7.1):

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} I \int_L [\mathbf{r} d\mathbf{l}] = \frac{1}{2} I \int_{2\pi R} \mathbf{n} R d\mathbf{l} = I\pi R^2 \mathbf{n} = IS \mathbf{n},$$

или для произвольного плоского линейного контура:



$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} I \int_L [\mathbf{r} d\mathbf{l}] = I \mathbf{n} \int_S dS = IS \mathbf{n},$$

где учтено, что  $\frac{1}{2} [\mathbf{r} d\mathbf{l}] = \mathbf{n} \frac{1}{2} r dl \sin(\mathbf{r} \wedge d\mathbf{l}) = \mathbf{n} dS$  – площадь элементарного сектора, соответствующего дуге  $dl$ .

**Магнитный диполь:** если расстояние  $r$  от точки, где рассматривается магнитное поле, много больше линейных размеров  $l$  области, в которой существует электрический ток, то такой контур с током называют магнитным диполем. **Вектор индукции магнитного поля магнитного диполя**

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right). \quad (7.20)$$

Эта формула совпадает по форме с выражением для напряженности электрического поля точечного электрического диполя (1.4).

В пределе  $\frac{l}{r} \rightarrow 0$  приведенная формула становится асимптотически точной, а магнитный диполь называется точечным. Если вектор  $\mathbf{r}$  сонаправлен с вектором  $\mathbf{p}_m$ , то  $(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r} = \mathbf{p}_m r^2$  и **индукция магнитного поля на оси диполя** выражается соотношением:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{p}_m}{r^3}. \quad (7.21)$$

## § 7.2. Основные типы задач (классификация)

7.1. Определение индукции магнитного поля, создаваемого линейным током заданной конфигурации.

7.2. Определение индукции магнитостатического поля от безграничных распределений токов, обладающих плоской или осевой симметрией.

7.3. Определение индукции магнитостатического поля, созданного заданным распределением магнитных диполей.

7.4. Определение индукции магнитного поля с использованием векторного магнитного потенциала (эквивалентные плоские электростатические и магнитостатические задачи).

### § 7.3. Методы решения и примеры решения задач

В начале решения необходимо проанализировать условие и определить тип, к которому можно отнести данную задачу.

Особое внимание следует обратить на распределение токов или диполей – существуют ли пространственные ограничения рассматриваемой системы, имеется ли симметрия в распределении токов и т.п. Исходя из принципов симметрии и суперпозиции, определить направление силовых линий результирующего магнитного поля и сил, действующих на диполи и проводники с током, фигурирующие в данной задаче.

Среди всего многообразия задач, встречающихся в задачниках, можно выделить некоторые базовые задачи. Решение других задач основывается на результатах, полученных при решении базовых задач. В данной теме к таким основным задачам можно отнести следующие – определение магнитной индукции прямого тока (7.3.1), кругового витка (7.3.3), бесконечной плоскости, по которой течет ток с постоянной плотностью (7.3.6), бесконечной полый трубки (7.3.8) и сплошного цилиндрического провода (7.3.10). При анализе условия задачи следует попробовать провести аналогию между заданной системой и системами из одной или нескольких базовых задач.

#### Задачи типа 7.1

*Определение индукции магнитного поля линейного тока заданной конфигурации*

**Метод решения.** Если необходимо определить индукцию магнитостатического поля линейного тока, то универсальным методом решения является использование закона Био-Савара–Лапласа (7.3)–(7.5) и принципа суперпозиции (7.6).

**Задача 7.3.1. (базовая задача)** Определить индукцию магнитного поля, создаваемого отрезком прямого провода длиной  $2L$  в точке  $A$ , находящейся в плоскости, перпендикулярной отрезку и проходящей через его центр, на расстоянии  $a$  от провода. Сила тока, текущего в проводе, равна  $I$ .

#### Решение

В данной задаче ток, магнитное поле которого необходимо определить, ограничен в пространстве и расположен симметрично

относительно плоскости, указанной в условии.

Выберем правую декартову систему координат, у которой ось  $Z$  совпадает с проводом, начало – с центром провода, ось  $Y$  проходит через точку  $A$  (рис. 7.2).

Рассмотрим произвольный элемент тока длиной  $dl = dz$ , находящийся на расстоянии  $z$  от начала отсчета. Он создает в точке  $A$ , характеризуемой радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , магнитное поле с индукцией  $d\mathbf{B}$ .

Согласно (7.3) направление вектора  $d\mathbf{B}$  определяется направлением вектора  $[dl \mathbf{r}]$ , т.е. вектор  $d\mathbf{B}$  направлен на нас перпендикулярно плоскости рисунка (так как в рассматриваемом случае ток течет против направления оси  $Z$  и вектор  $dl$  направлен в ту же сторону). Силовые линии поля, создаваемого таким прямолинейным участком тока, лежат в плоскости, перпендикулярной проводу.

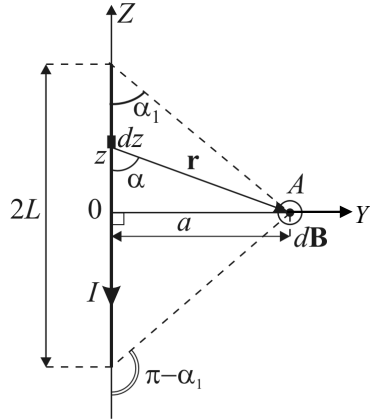


Рис. 7.2. Определение индукции магнитного поля, создаваемого отрезком прямого провода с током (задача 7.3.1)

Пусть угол, который составляет некоторый элемент тока с направлением на точку  $A$ , равен  $\alpha$ . Тогда

$$r = \frac{a}{\sin \alpha}; \quad z = a \operatorname{ctg} \alpha; \quad dz = -\frac{a \, d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

В соответствии с законом Био-Савара–Лапласа (7.3)

$$dB = dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \, dz}{r^2} \sin \alpha = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \sin \alpha \, d\alpha.$$

В силу симметрии задачи для нахождения  $\mathbf{B}$  можно проинтегрировать это выражение по половине провода и удвоить результат:

$$B = B_x = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \int_{\pi/2}^{\alpha_1} (-\sin \alpha) \, d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} \cos \alpha_1.$$

Здесь  $\alpha_1$  – угол, который составляет с направлением на точку  $A$  крайний элемент тока. Так как  $\cos \alpha_1 = \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}}$ , окончательно по-

лучаем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}}.$$

**Ответ:** Вектор магнитной индукции лежит в плоскости, перпендикулярной проводу, его модуль равен  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}}$ .

*Замечание 1.* Если плоскость, в которой лежит рассматриваемая точка, перпендикулярна проводу, но не проходит через его середину, то индукция магнитного поля может быть вычислена аналогично:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы, которые составляют с направлением на точку расчета крайние элементы тока.

*Замечание 2.* В предельном случае  $a \ll L$  (бесконечный прямой провод) получаем  $B = \mu_0 I / (2\pi a)$ . Это выражение проще получить из теоремы о циркуляции (7.9), что показано далее в задаче 7.3.9.

**Задача 7.3.2.** Найти величину и направление вектора магнитной индукции в центре плоского контура, имеющего вид прямоугольника, если длины его сторон равны соответственно  $b$  и  $c$ , а ток равен  $I$  (рис. 7.3).

### Решение

Так как система проводника с током, представленная в условии задачи ограничена в пространстве и представляет собой несколько отрезков линейного тока, то данная задача относится к типу 7.2.1.

Основываясь на решении базовой задачи 7.3.1 можно сказать, что векторы индукции магнитного поля, создаваемые всеми сторонами рассматриваемого прямоугольника, в центре контура (точка  $O$  на рис. 7.3) будут направлены на нас и перпендикулярны к плоскости рисунка. Их величины равны:

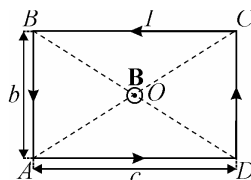


Рис. 7.3. Прямоугольный проводник с током и направление вектора магнитной индукции (задача 7.3.2)

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{c}{2}} \frac{b/2}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}}$$

(индукция поля, создаваемого отрезками  $AB$  или  $CD$ );

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b/2} \frac{c/2}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}}$$

(индукция поля, создаваемого отрезками  $BC$  или  $DA$ ).

По принципу суперпозиции (7.6) величина индукции магнитного поля в центре контура равна

$$B = 2(B_1 + B_2) = \frac{2\mu_0 I}{\pi bc} \sqrt{b^2 + c^2}.$$

**Ответ:** Вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости контура по правилу правого винта (см. рис. 7.3) и

равен по модулю  $B = \frac{2\mu_0 I}{\pi bc} \sqrt{b^2 + c^2}$ .

**Задача 7.3.3 (базовая задача).** Определить величину индукции магнитного поля на оси кругового витка радиуса  $R$  с током  $I$  в зависимости от расстояния до его плоскости.

### Решение

Область существования тока ограничена, а распределение тока имеет осевую симметрию.

В силу осевой симметрии задачи и принципа суперпозиции

(7.6) вектор индукции магнитного поля кругового витка на его оси будет направлен вдоль этой оси. Направим ось  $X$  декартовой системы координат вдоль оси витка, начало координат поместим в центр витка.

Вектор  $d\mathbf{B}$  индукции поля, создаваемого элементом тока  $I d\mathbf{l}$ , перпендикулярен к векторам  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{r}$  и лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости коль-

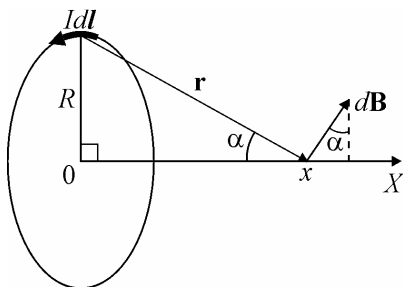


Рис. 7.4. К определению индукции магнитного поля на оси кругового витка с током (задача 7.3.3)

ца и проходящей через его диаметр, проведенный через  $dl$  (рис. 7.4). Проекция вектора  $d\mathbf{B}$  на ось  $X$  по закону Био–Савара–Лапласа (7.3) равна

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{r^2} dl.$$

Отсюда получим

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{r^2} 2\pi R = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$

*Замечание 1.* В центре кольца ( $x = 0$ ) поле равно  $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ .

*Замечание 2.* При  $x \gg R$  выражение для индукции магнитного поля на оси витка  $B \approx \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{x^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I \pi R^2}{x^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{x^3}$  совпадает с выражением (7.21) для индукции поля магнитного диполя на его оси. В этом случае виток с током можно рассматривать как магнитный диполь и определять магнитное поле такой системы в произвольной точке по формуле (7.20).

**Задача 7.3.4.** Два одинаковых круговых витка, ток в каждом из которых равен  $I$ , располагаются так, что их плоскости параллельны, а центры лежат на одной оси на расстоянии  $L$  друг от друга. Радиус витков  $R$ . Предполагая, что токи в витках текут в одном направлении, определить, при каком соотношении между  $R$  и  $L$  магнитное поле в центре системы на оси витков будет максимально однородным, а также величину индукции этого поля.

### Решение

Выберем систему координат так, чтобы её ось  $X$  совпадала с осью витков. Начало координат совместим с центром симметрии системы (см. рис. 7.5).

При решении данной задачи будем опираться на решение базовой задачи 7.3.3.

Используя принцип суперпозиции, получим, что величина индукции магнитного поля в произвольной точке (с координатой  $x$ ) на оси равна

$$B(x) = \frac{\mu_0 IR^2}{2} \left\{ \left( R^2 + \left( \frac{L}{2} + x \right)^2 \right)^{-3/2} + \left( R^2 + \left( \frac{L}{2} - x \right)^2 \right)^{-3/2} \right\}.$$

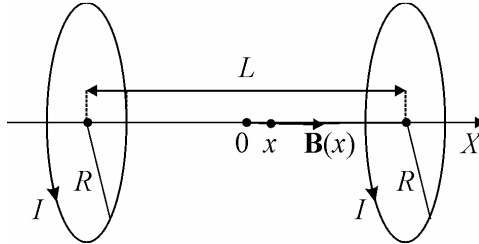


Рис. 7.5. Индукция магнитного поля на оси двух круговых витков с одинаковыми токами (задача 7.3.4)

Рассмотрим магнитное поле вблизи начала координат. При разложении функции  $B(x)$  в ряд в окрестности точки  $x = 0$  получим

$$B(x) = B(0) + xB'(0) + \frac{x^2}{2} B''(0) + \dots$$

Поле в окрестности точки  $x = 0$  будет тем однороднее, чем больше производных будут равны нулю. Определим, при каком расстоянии между витками  $B'(0) = 0$  и  $B''(0) = 0$ .

Введем обозначения:

$$F_1(x) \equiv \left( R^2 + \left( \frac{L}{2} + x \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}}; \quad F_2(x) = F_1(-x) = \left( R^2 + \left( \frac{L}{2} - x \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Тогда  $B'(0) = 0$ , если  $F_1'(0) = -F_2'(0)$ ;  $B''(0) = 0$ , если  $F_1''(0) = -F_2''(0)$ .

Дифференцируя полученные функции, получаем:

условие  $F_1'(0) = -F_2'(0)$  выполняется при любых  $L$ ;

условие  $F_1''(0) = -F_2''(0)$  выполняется при  $L = R$ .

Таким образом, поле между витками на их оси максимально однородно, если расстояние между витками равно их радиусу. Определим значение функции  $B(x)$  в точке  $x = 0$  при этом условии. Получим

$$B(0)|_{L=R} = \frac{\mu_0 IR^2}{2} 2 \left( R^2 + \frac{R^2}{4} \right)^{-3/2} = \mu_0 IR^2 \left( \frac{4}{5R^2} \right)^{3/2} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{R} \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \approx 0,715 \frac{\mu_0 I}{R}.$$

**Ответ:** Поле на оси витков в окрестности центра системы максимально однородно при  $L = R$  и равно

$$B = \frac{\mu_0 I}{R} \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \approx 0,715 \frac{\mu_0 I}{R}.$$

*Замечание 1.* Ввиду того, что  $F_2(x) = F_1(-x)$ , не только первая производная, но и все нечетные производные от  $F_1(x) + F_2(x)$  равны нулю при любых  $L$ . Таким образом, первой не равной нулю будет производная 4 порядка.

*Замечание 2.* В поперечном направлении (перпендикулярно оси  $X$ ) область однородности поля примерно такая же, как и в продольном, однако доказательство этого факта достаточно сложное.

*Замечание 3.* Если в качестве объектов, создающих магнитное поле, рассмотреть две одинаковые тонкие катушки из  $N$  витков, то можно считать их эквивалентными двум кольцам радиуса  $R$  с током  $NI$  в каждом. Если расположить такие катушки соосно друг другу на расстоянии, равном их среднему радиусу, то магнитное поле между ними можно считать однородным и равным по модулю

$$B = \frac{\mu_0 NI}{R} \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \approx 0,715 \frac{\mu_0 NI}{R}.$$

Такая система называется **катушками Гельмгольца**. Наряду с соленоидом они используются для создания однородного магнитного поля.

**Задача 7.3.5.** Найти величину индукции магнитного поля на оси соленоида в произвольной точке (из которой края соленоида видны под углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ). Радиус сечения соленоида  $R$ , плотность намотки  $n$  витков на единицу длины. Сила тока, текущего в соленоиде равна  $I$ .

### Решение

Учитывая симметрию рассматриваемой системы, выберем ось  $X$  системы координат совпадающей с осью соленоида (см. рис. 7.6). Точку, в которой требуется определить индукцию магнитного поля, примем за начало отсчета.

Магнитное поле, создаваемое соленоидом на его оси, можно представить как суперпозицию полей  $d\mathbf{B}$ , создаваемых круговыми



витками линейного тока, причем ширина витков равна  $dx$ , а сила тока в каждом из них равна  $nI dx$ . Тогда, аналогично решению базовой задачи 7.3.3, получим

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{(In dx)R \sin \alpha}{r^2};$$

здесь  $\alpha$  – угол, под которым видно рассматриваемое кольцо шириной  $dx$  из точки наблюдения. Из рисунка видно, что  $r = \frac{R}{\sin \alpha}$ ; следовательно,

$$dx = -\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha.$$

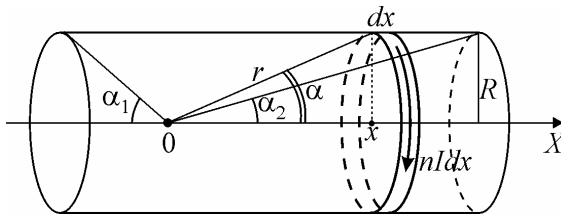


Рис. 7.6. К определению индукции магнитного поля на оси соленоида (задача 7.3.5)

Так как вклады от всех витков имеют одинаковый знак проекции на ось  $X$ , имеем:

$$B = \frac{\mu_0 In}{2} \int_{\pi-\alpha_1}^{\alpha_2} (-\sin \alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \mu_0 In (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1).$$

**Ответ:**  $B = \frac{1}{2} \mu_0 In (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1).$

*Замечание 1.* Если длина соленоида много больше его радиуса (бесконечный соленоид), то  $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = 1$ . В этом случае поле на оси такого соленоида не зависит от точки наблюдения и равно

$$B = \mu_0 In = B_{\max}.$$

*Замечание 2.* Для точки, находящейся в центре торца длинного соленоида,  $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\alpha_2 = 0$ , и индукция магнитного поля равна

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 In = \frac{1}{2} B_{\max}.$$

*Замечание 3.* Значения углов  $\alpha_1 > \pi/2$ , или  $\alpha_2 > \pi/2$  соответствуют точкам, лежащим снаружи от соленоида на его оси. Решение задачи не отличается от рассмотренного. При удалении от соленоида вдоль его оси  $\alpha_1 \rightarrow \pi$  и  $\alpha_2 \rightarrow 0$ , модуль индукции магнитного поля  $B \rightarrow 0$ .

**Задача 7.3.6.** Непроводящая сфера радиуса  $R$ , равномерно заряженная по поверхности с плотностью заряда  $\sigma$ , вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через её центр. Определить магнитную индукцию в центре сферы.

**Решение**

В силу симметрии задачи её удобно решать в сферической системе координат. Будем отсчитывать угол  $\theta$  этой системы координат от оси  $Z$ , направление которой совпадает с вектором угловой скорости сферы (см. *рис. 7.7*).

Рассмотрим произвольное тонкое кольцо шириной  $R d\theta$ , вырезанное из рассматриваемой сферы. Так как оно вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси, то такая система аналогична неподвижному кольцу, по которому течет ток силы

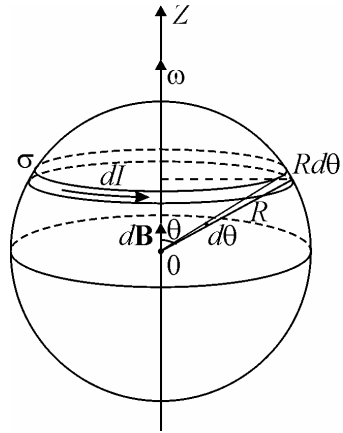
$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma dS}{T} = \frac{\sigma 2\pi R \sin\theta R d\theta}{T} = \sigma\omega R^2 \sin\theta d\theta,$$

где  $T$  – период обращения сферы вокруг своей оси.

Согласно решению базовой задачи **7.3.3**, магнитное поле, создаваемое таким витком в центре сферы, направлено вдоль оси  $Z$  и его индукция равна

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dI \sin\theta}{R^2} 2\pi R \sin\theta = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2} \sin^3\theta d\theta.$$

По принципу суперпозиции интегрированием получим индук-



*Рис. 7.7.* Определение индукции магнитного поля, создаваемого вращающейся заряженной сферой в ее центре (задача **7.3.6**).

цию магнитного поля в центре сферы:

$$B = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2} \sin^3 \theta d\theta = 2 \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \mu_0 \omega \sigma R.$$

**Ответ:**  $\mathbf{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \boldsymbol{\omega}.$

### Задачи типа 7.2

*Определение индукции магнитоэстатического поля безграничных распределений токов, обладающих плоской или осевой симметрией*

**Метод решения.** При решении модельных задач, в которых рассматриваются системы токов, формально не ограниченные в пространстве (бесконечные линейные, плоские или объёмные токи), обладающие плоской или осевой симметрией, удобно опираться на закон полного тока (7.9).

Аналогично применению электростатической теоремы Гаусса (глава 1), здесь при вычислении циркуляции вектора магнитной индукции по замкнутому контуру ключевым моментом является выбор этого контура. Очевидно, что он должен проходить через точку, в которой мы хотим определить величину  $B$ , и, кроме этого, вычисление интеграла  $\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l}$  должно быть максимально простым. На-

пример, величина  $B$  должна быть одинакова на всем протяжении контура  $L$ , или на одной из частей контура  $B = \text{const}$ , а на другой  $B = 0$ , и т.п.; угол  $\alpha$  между векторами  $\mathbf{B}$  и  $d\mathbf{l}$  не должен меняться при обходе контура, или на одной из частей контура  $\alpha = \text{const}$ , а на другой  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi/2$ . Поэтому при анализе условия задачи особое внимание следует обратить на картину распределения полей в контуре проводников с током.

**Задача 7.3.7 (базовая задача).** Безграничная проводящая плоскость расположена горизонтально. По ней течет ток, поверхностная плотность которого равна  $i$ , а направление одинаково во всех точках. Определить индукцию магнитного поля, создаваемого такой плоскостью.

#### Решение

Ввиду симметрии в распределении токов рассматриваемой сис-

темы и безграничности плоскости, величина вектора индукции магнитного поля этой системы не будет зависеть от расстояния до плоскости, а сам вектор будет направлен параллельно плоскости и перпендикулярно текущему по ней току.

В качестве контура  $L$  удобно выбрать прямоугольник  $ABCD$ , две стороны которого параллельны плоскости и перпендикулярны току, текущему в ней (см. рис. 7.8). Полный ток, охватываемый этим контуром, равен  $I = ia$ , где  $a$  – длина горизонтально расположенной стороны контура.

На горизонтальных участках контура вектор  $\mathbf{B}$  не изменяется по величине и сонаправлен с вектором  $d\mathbf{l}$  (участки  $AB$  и  $CD$  на рис. 7.8). На участках контура, перпендикулярных плоскости ( $BC$  и  $DA$ ), вектор  $\mathbf{B}$  перпендикулярен  $d\mathbf{l}$  в каждой точке. Тогда в соответствии с теоремой о циркуляции

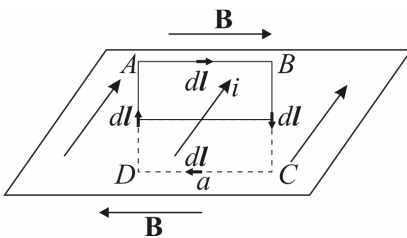


Рис. 7.8. Определение индукции магнитного поля, создаваемого безграничной проводящей плоскостью (задача 7.3.7)

имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = 2Ba \\ I = ia \end{array} \right\} \Rightarrow 2Ba = \mu_0 ia .$$

**Ответ:** Вектор магнитной индукции направлен параллельно плоскости и перпендикулярен направлению тока, а его модуль

$$\text{равен } B = \frac{\mu_0 i}{2} .$$

**Задача 7.3.8.** Система состоит из двух параллельных друг другу безграничных плоскостей с токами, величины которых одинаковы. Эти токи создают в пространстве между плоскостями однородное магнитное поле с индукцией  $B$ , а снаружи поле отсутствует. Найти поверхностную плотность тока, текущего по плоскостям.

### Решение

Система токов, представленная в данной задаче, эквивалентна двум системам базовой задачи 7.3.7. Используя результат этой задачи, можно утверждать, что токи по плоскостям параллельны и текут в противоположных направлениях – иначе согласно принципу суперпозиции магнитное поле снаружи от плоскостей должно быть отлично от нуля.

При такой ориентации токов в пространстве между плоскостями

ми индукция магнитного поля вдвое больше индукции магнитного поля одной плоскости, т.е. по модулю равна  $B = \mu_0 i$ . Отсюда находим

$$i = \frac{B}{\mu_0}.$$

**Ответ:** Направления токов, текущих по плоскостям взаимно противоположны, их поверхностные плотности одинаковы по модулю и равны  $i = B/\mu_0$ .

**Задача 7.3.9 (базовая задача).** Найти индукцию магнитного поля внутри бесконечного соленоида с плотностью намотки  $n$  витков на метр, по которому течет ток силой  $I$ .

### Решение

В случае плотной намотки магнитное поле внутри длинного соленоида близко к однородному, за исключением точек непосредственно вблизи витков обмотки. Поле снаружи длинного соленоида вдали от его торцов можно считать близким к нулю.

Проведем через точку, в которой надо найти индукцию магнитного поля прямоугольный контур так, чтобы его сторона длины  $l$  была параллельна линии  $\mathbf{B}$ , а противоположная сторона была вне соленоида. Запишем теорему о циркуляции вектора  $\mathbf{B}$  (7.9).

Пусть ток в витках направлен из плоскости чертежа к нам. Плоскость контура пересекают  $nl$  витков, полная величина тока через выбранный контур равна  $Inl$ . При расчете циркуляции выберем направление обхода против часовой стрелки, для которого этот ток будет положительным по правилу правого винта. Поскольку вне соленоида поле можно считать равным нулю, циркуляция по данному контуру равна  $Bl$ , откуда следует  $Bl = \mu_0 Inl$ , или  $B = \mu_0 In$ .

**Ответ:**  $B = \mu_0 In$ .

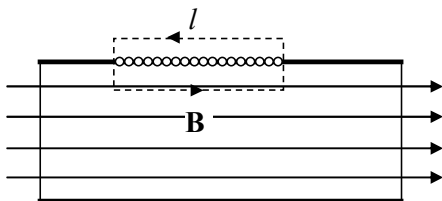


Рис. 7.9. К нахождению магнитного поля внутри длинного соленоида (задача 7.3.9)

**Задача 7.3.10 (базовая задача).** По стенке бесконечной тонкостенной цилиндрической трубы радиуса  $R$  параллельно её оси течет

ток  $I$ . Найти величину индукции магнитного поля внутри и вне трубы в зависимости от расстояния до её оси.

### Решение

В силу симметрии рассматриваемой системы силовые линии создаваемого ей магнитного поля являются окружностями, плоскости которых перпендикулярны оси трубы. Для вычисления  $B(r)$  удобно воспользоваться теоремой о циркуляции.

1) Найдем индукцию магнитного поля внутри трубы в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от ее оси ( $r < R$ ). Для этого выберем в качестве контура  $L$  окружность, центр которой лежит на оси трубы, а радиус равен  $r$  (рис. 7.10а). Тогда вектор  $\mathbf{B}$  в каждой точке этого контура направлен по касательной к нему, а величина индукции не изменяется вдоль всего контура. Однако выбранный нами контур не охватывает ток, т.е.

$$\left. \begin{array}{l} \oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r \\ I = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2\pi r B = 0,$$

т.е. магнитное поле внутри цилиндра в любой точке отсутствует.

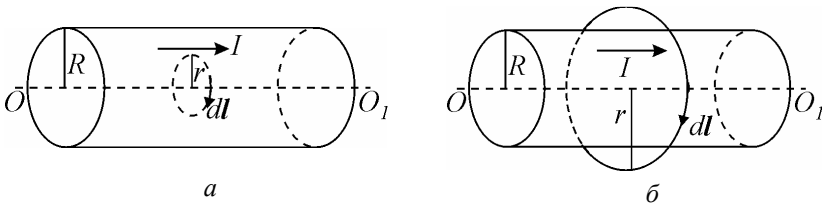


Рис. 7.10. К определению индукции магнитного поля внутри (а) и снаружи (б) тонкостенной трубы (задача 7.3.10)

2) Найдем теперь индукцию магнитного поля снаружи трубы в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от ее оси ( $r > R$ ). Проведя рассуждения аналогично пункту 1) получим, что выбранная нами в качестве контура окружность радиуса  $r$  охватывает весь ток  $I$ , текущий по трубе, независимо от своего радиуса (рис. 7.10б). Получим:

$$\left. \begin{array}{l} \oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r \\ I = I \end{array} \right\} \Rightarrow 2\pi r B = \mu_0 I.$$

$$\text{Отсюда } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} B = 0, & \text{при } r < R, \\ B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & \text{при } r > R, \end{cases}$$

*Замечание 1.* Этот ответ совпадает с ответом задачи 7.3.1, полученным для бесконечно длинного провода с током (замечание 2 к задаче 7.3.1), однако данное решение задачи гораздо проще, что делает этот способ решения предпочтительным.

*Замечание 2.* При  $r = R$  (поверхность трубы) индукция магнитного поля в такой системе испытывает скачок. Величина индукции на поверхности трубы не определена (в рамках рассматриваемой модели бесконечно тонких стенок трубы ток следует рассматривать как поверхностный).

**Задача 7.3.11.** По однородному сплошному бесконечному цилиндрическому проводнику радиуса  $R$  течет ток  $I$ , который равномерно распределен по сечению. Найти величину индукции магнитного поля внутри и вне проводника в зависимости от расстояния до оси. Магнитные свойства материала не учитывать.

### Решение

Данный проводник с током представляет собой бесконечную систему с аксиальной симметрией. Линии индукции магнитного поля такой системы являются окружностями с центром на оси проводника, лежащими в плоскостях, перпендикулярных оси проводника.

1) Найдем величину индукции магнитного поля внутри проводника с током в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от его оси ( $r < R$ , рис. 7.11а). Аналогично решению базовой задачи 7.3.10, из (7.9) получаем

$$\left. \begin{array}{l} \oint_L \mathbf{B} dl = B \cdot 2\pi r \\ I = \pi r^2 j \end{array} \right\} \Rightarrow 2\pi r B = \mu_0 \pi r^2 j,$$

где  $j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi R^2}$  – модуль объёмной плотности тока, текущего через проводник. Окончательно имеем:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r.$$

Таким образом, при  $r < R$  величина индукции магнитного поля сплошного проводника, плотность тока в котором постоянна, линейно зависит от расстояния от оси проводника.

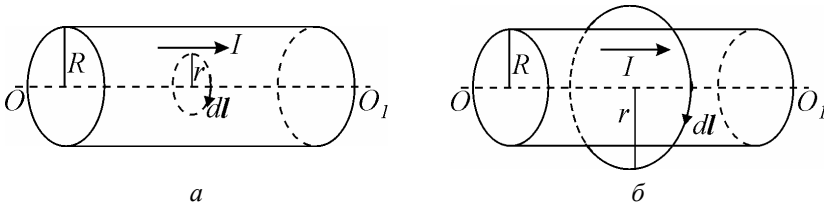


Рис. 7.11. К определению индукции магнитного поля внутри (а) и снаружи (б) сплошного цилиндрического проводника (задача 7.3.11)

2) Найдем величину индукции магнитного поля снаружи трубы в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от ее оси ( $r > R$ , рис. 7.11б).

Аналогично пункту 2) базовой задачи 7.3.10 получим  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ .

$$\text{Ответ: } \begin{cases} B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r, & r < R; \\ B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r \geq R. \end{cases}$$

*Замечание 1.* В точке  $r = R$  функция  $B(r)$  непрерывна, её значение максимально и равно  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ .

*Замечание 2.* Зависимость модуля индукции магнитного поля, создаваемого объемным током постоянной плотности в цилиндрическом бесконечном проводнике, от расстояния до оси проводника аналогична зависимости напряженности электрического поля, создаваемого равномерно заряженным по объёму бесконечным цилиндром.

**Задача 7.3.12.** Проводник из немагнитного материала имеет в сечении сложную конфигурацию и представляет собой суперпозицию двух бесконечно длинных прямолинейных цилиндрических проводников, в области пересечения которых имеется полость  $\Pi$



(см. рис. 7.12а).

В правой и левой части проводника текут в противоположных направлениях токи с одной и той же по модулю объёмной плотностью  $j$ . Найти величину и направление индукции магнитного поля в полости. Расстояние между осями цилиндрических составляющих проводника  $AC = d$ .

### Решение

Рассмотрим систему из двух сплошных цилиндров  $A$  и  $C$ , в которых токи текут равномерно во всем объёме. Тогда в области перекрытия цилиндров (полость  $\Pi$  на рис. 7.12а) тока не будет – таким образом, сконструированная нами система в отношении пространственного распределения тока идентична системе, представленной в условии задачи.

Рассмотрим произвольную точку  $M$ , находящуюся внутри области перекрытия токов (см. рис. 7.12б). Согласно решению базовой задачи 7.3.11, величина индукции магнитного поля, созданного в этой точке цилиндром  $A$ , определяется соотношением  $B_1 = \frac{\mu_0 j}{2} r_{AM}$  и на-

правлена перпендикулярно вектору  $\mathbf{r}_{AM}$ . Аналогично, величина индукции магнитного поля, созданного в этой точке цилиндром  $C$ , определяется соотношением  $B_2 = \frac{\mu_0 j}{2} r_{CM}$  и направлена перпендикулярно вектору  $\mathbf{r}_{CM}$ . В векторном виде индукции магнитных полей цилиндров в точке  $M$  можно записать в виде

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 j}{2} [l_1 \mathbf{r}_{AM}], \quad \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 j}{2} [l_2 \mathbf{r}_{BM}],$$

где векторы  $l_1$  и  $l_2$  – единичные векторы, сонаправленные с токами в

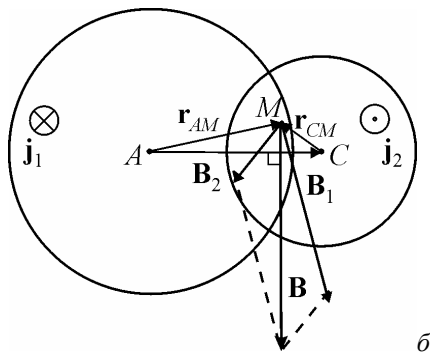
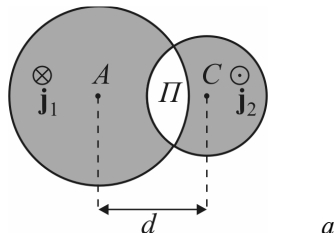


Рис. 7.12. Проводник сложной конфигурации с полостью  $\Pi$  и распределение в нём объёмных токов (а) и определение индукции магнитного поля в полости (б) (к задаче 7.3.12)

проводниках  $A$  и  $C$  соответственно, т. е.  $I_1 = -I_2$ .

Используя принцип суперпозиции, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_M &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 J}{2} ([I_1 \mathbf{r}_{AM}] + [I_2 \mathbf{r}_{BM}]) = \frac{\mu_0 J}{2} [I_1 (\mathbf{r}_{AM} - \mathbf{r}_{BM})] = \\ &= \frac{\mu_0 J}{2} [I_1 \mathbf{AC}]. \end{aligned}$$

Таким образом, магнитное поле в полости  $\Pi$  однородно. Индукция этого поля равна  $B = \frac{\mu_0 J}{2} d$  и направлена в плоскости рисунка перпендикулярно линии, соединяющей оси проводников  $A$  и  $C$ .

**Ответ:** вектор  $\mathbf{B} \perp \mathbf{AC}$  и равен по модулю  $B = \frac{\mu_0 J}{2} d$ .

### Задачи типа 7.3

*Определение индукции магнитостатического поля, созданного заданным распределением магнитных диполей.*

**Метод решения.** Определение индукции магнитного поля, созданного заданной системой магнитных диполей, является одной из важнейших задач магнитостатики. Особое значение эта задача приобретает в разделе «Магнитостатика магнетиков», так как магнитный момент является основной величиной, характеризующей магнитные свойства вещества. Для замкнутых линейных токов на большом расстоянии от них поле аналогично полю диполя, поэтому решение задачи значительно упрощается при использовании дипольного описания.

**Задача 7.3.13 (базовая задача).** Точечный магнитный диполь с моментом  $\mathbf{p}_m$ , направленным вдоль оси  $OY$ , расположен в начале декартовой системы координат (рис. 7.13). Определить величину индукции магнитного поля в точке  $M$  с координатами  $(x, y)$ .

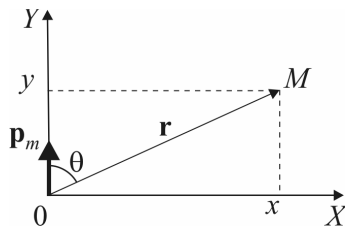


Рис. 7.13. Ориентация магнитного диполя  $\mathbf{p}_m$  относительно декартовой системы координат (задача 7.3.13)

**Решение**

Согласно соотношению (7.20) вектор индукции магнитного поля в точке, определяемой радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , равен

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right).$$

Определим проекцию вектора  $\mathbf{B}$  на ось  $X$ . Так как магнитный момент диполя перпендикулярен этой оси, то

$$\left( \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right)_x = 0, \quad B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} \right)_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3p_m r \cos \vartheta r \sin \vartheta}{r^5} \right).$$

Здесь  $\vartheta$  – угол между векторами  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{r}$ , поэтому

$$\cos \vartheta = \frac{y}{r}; \quad \sin \vartheta = \frac{x}{r}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отсюда получаем  $B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3p_m xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$ .

Аналогично имеем для компоненты магнитного поля, параллельной оси  $Y$ :

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right)_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3p_m r^2 \cos^2 \vartheta}{r^5} - \frac{p_m}{r^3} \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m (2y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} p_m \frac{(2y^2 + x^2)^2 + x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}.$$

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0}{4\pi} p_m \frac{(2y^2 + x^2)^2 + x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}.$

*Замечание.* Эту задачу удобно решать в сферической системе координат аналогично задаче 1.3.23 главы 1 (определение напряжённости поля точечного электрического диполя). В этом случае положение точки  $M$  определяется длиной радиус-вектора  $r$  и полярным углом  $\vartheta$ , а величина магнитной индукции поля диполя в

этой точке может быть представлена как  $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \vartheta + 1}.$

**Задача 7.3.14.** Два точечных магнитных диполя с равными по величине моментами  $|\mathbf{p}_{m_1}| = |\mathbf{p}_{m_2}| = p_m$  находятся на некотором расстоянии друг от друга. Их магнитные моменты лежат в одной плоскости и ориентированы взаимно перпендикулярно. При какой ориентации магнитных моментов относительно соединяющей их прямой индукция магнитного поля в точке  $O$ , расположенной посередине между диполями, будет минимальной и максимальной?

### Решение

Пусть расстояние между диполями равно  $2a$ . В выбранной системе отсчета (см. рис. 7.14) компоненты индукции магнитного поля, созданного левым и правым магнитными моментами в точке  $O$  согласно соотношению (7.20) соответственно равны:

Левый диполь  $\mathbf{p}_{m_1}$ :

$$B_{1x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3p_m a^2 \cos \theta}{a^5} - \frac{p_m \cos \theta}{a^3} \right) = \frac{\mu_0 p_m \cos \theta}{2\pi a^3};$$

$$B_{1y} = \frac{\mu_0 p_m \sin \theta}{4\pi a^3};$$

Правый диполь  $\mathbf{p}_{m_2}$ :

$$B_{2x} = \frac{\mu_0 p_m \cos(\theta + \pi/2)}{2\pi a^3} = -\frac{\mu_0 p_m \sin \theta}{2\pi a^3}; \quad B_{2y} = -\frac{\mu_0 p_m \cos \theta}{4\pi a^3}.$$

Согласно принципу суперпозиции для величины индукции магнитного поля получим:

$$B(\theta) = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi a^3} \sqrt{(B_{1x} + B_{2x})^2 + (B_{1y} + B_{2y})^2} =$$

$$= \frac{\mu_0 p_m}{4\pi a^3} \sqrt{4(\cos \theta - \sin \theta)^2 + (\cos \theta + \sin \theta)^2} = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi a^3} \sqrt{5 - 3 \sin 2\theta}.$$

Исследование этой функции на экстремум дает:

$$\text{Минимум: при } \theta_{\min} = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \quad B_{\min} = \frac{\mu_0 p_m \sqrt{2}}{4\pi a^3},$$

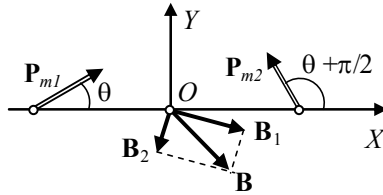


Рис. 7.14. Определение индукции магнитного поля от двух взаимно перпендикулярных магнитных диполей (задача 7.3.14)

Максимум: при  $\theta_{\max} = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$   $B = B_{\max} = \frac{\mu_0 p_m 2\sqrt{2}}{4\pi a^3}$ .

**Ответ:**  $B(0) = B_{\min}$  при  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ ;  $B(0) = B_{\max}$  при  $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ .

*Замечание.* В сферической системе координат аналогичная задача для электрического диполя решена в главе 1 (задача 1.3.24).

**Задача 7.3.15.** Непроводящая сфера радиуса  $R$ , равномерно заряженная по поверхности с плотностью заряда  $\sigma$ , вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через её центр. Определить магнитный момент такой системы.

**Решение**

Согласно определению (7.18) магнитный момент поверхностного тока можно рассчитать по формуле

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} \int_S [\mathbf{r} \mathbf{i}] dS.$$

Так как сфера вращается с постоянной угловой скоростью, то поверхностная плотность тока определяется соотношением (§6.1 глава 6)

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{v} = \sigma [\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}]$$

(см. рис. 7.15). Таким образом, вектор плотности тока направлен по касательной к поверхности сферы в каждой точке, а его величина определяется как  $i = \sigma \omega R \sin \theta$ . Учитывая, что в данной задаче  $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ , получим

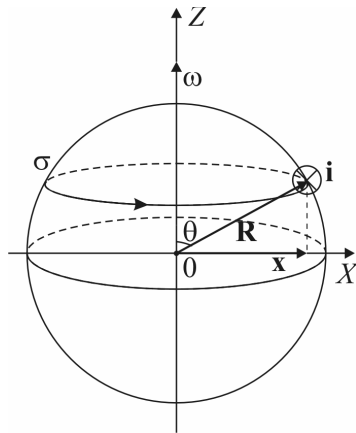


Рис. 7.15. К определению магнитного момента вращающейся заряженной сферы (задача 7.3.15)

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_m &= \frac{\sigma}{2} \int_S [\mathbf{R} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}]] dS = \frac{\sigma}{2} \int_S (\boldsymbol{\omega} (\mathbf{R} \mathbf{x}) - \mathbf{x} (\mathbf{R} \boldsymbol{\omega})) dS = \\ &= \frac{\sigma}{2} \int_S \boldsymbol{\omega} (\mathbf{R} \mathbf{x}) dS - \frac{\sigma}{2} \int_S \mathbf{x} (\mathbf{R} \boldsymbol{\omega}) dS. \end{aligned}$$

В силу симметрии задачи второй интеграл в этом выражении

равен 0. Угол между векторами  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{x}$  в любой точке сферы равен  $\alpha = 90^\circ - \theta$ . Учитывая, что  $dS = 2\pi x R d\theta$ ,  $x = R \sin \theta$ , получим

$$(\mathbf{p}_m)_z = \frac{\sigma}{2} \int_0^\pi \omega (R \sin \theta) \sin \theta 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \sigma R^4 \omega \pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi \sigma R^4 \omega,$$

или в векторной форме

$$\mathbf{p}_m = \frac{(4\pi R^2 \sigma) R^2}{3} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{3} Q R^2 \boldsymbol{\omega},$$

где  $Q = 4\pi R^2 \sigma$  – заряд сферы.

**Ответ:**  $\mathbf{p}_m = \frac{4}{3} \pi R^4 \sigma \boldsymbol{\omega}.$

*Замечание.* Если рассмотреть вращающуюся заряженную сферу как суперпозицию плоских витков с током, каждый из которых имеет магнитный момент  $d\mathbf{p}_m$ , то магнитное поле сферы можно вычислить, как суперпозицию магнитных полей, создаваемых всеми магнитными моментами. В соответствии с формулой (7.21) магнитное поле диполя на его оси равно  $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{r^3}$ , тогда индукцию магнитного поля в центре сферы можно вычислить как

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{2dp_m}{R^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{p_m}{R^3} = \frac{\mu_0}{2\pi R^3} \frac{4}{3} \pi R^4 \sigma \boldsymbol{\omega} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \boldsymbol{\omega},$$

что соответствует ответу задачи 7.3.6.

### Задачи типа 7.4

*Определение индукции магнитного поля с использованием векторного магнитного потенциала (эквивалентные плоские электростатические и магнитостатические задачи).*

**Метод решения.** Если записать дифференциальное уравнение магнитного поля стационарного тока в вакууме (7.10)  $\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  и учесть, что векторный магнитный потенциал связан с индукцией магнитного поля соотношением  $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ , то с учетом условия калибровки векторного потенциала (7.14) получим

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

Это уравнение эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z,$$

каждое из которых аналогично уравнению для скалярного потенциала  $\varphi$  электрического поля в пустоте от зарядов с объёмной плотностью  $\rho$  (уравнение Пуассона (2.18), глава 2):

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

решение которого известно из электростатики, и для заряда объёмной плотности  $\rho$ , сосредоточенного в ограниченной области пространства  $V$ , имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}.$$

Удобнее всего сопоставлять уравнения для скалярного  $\varphi$  и векторного  $\mathbf{A}$  потенциалов для однонаправленного (однокомпонентного) тока, когда, например,  $j_x = j_y = 0$ , а  $j_z = j_z(x, y)$  и не зависит от  $z$  (плоские задачи). Тогда, если распределение плотности электрического заряда  $\rho = \rho(x, y)$  аналогично распределению тока  $j_z(x, y)$ , то решения уравнений

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y) \quad \text{и} \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z(x, y)$$

дают функции  $\varphi(x, y)$  и  $A_z(x, y)$ , имеющие одинаковые пространственные распределения. Значит, они равны с точностью до постоянных множителей. Чтобы перейти от решения электростатической задачи к магнитостатической, нужно сделать замены

$$\varphi \rightarrow A_z, \quad \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0 j_z, \quad E_x \rightarrow B_y, \quad E_y \rightarrow -B_x, \quad E_r \rightarrow B_\varphi, \quad E_\varphi \rightarrow -B_r. \quad (7.22)$$

Однако следует учесть, что в этом случае, как следует из приведенных соотношений, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  взаимно перпендикулярны.

Таким образом, ответ многих магнитостатических задач можно записать сразу без решения задачи, используя известное решение эквивалентной задачи электростатики.

При решении обратной задачи – нахождения потенциала  $\mathbf{A}$  по известному полю индукции  $\mathbf{B}$  – в случае задач с элементами симметрии может быть полезно интегральное соотношение, следующее из теоремы Стокса (7.8):

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (7.23)$$

**Задача 7.3.16.** Найти векторный потенциал (в кулоновской калибровке) для однородного магнитного поля с индукцией  $\mathbf{B}$ .

**Решение**

Направим ось  $Z$  декартовой системы координат вдоль вектора  $\mathbf{B}$ . Учитывая, что  $\mathbf{B}$  имеет только одну ненулевую компоненту  $B_z$ , запишем в декартовых координатах соотношение (7.13):

$$B_z = (\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B.$$

$$B_x = (\text{rot } \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0,$$

$$B_y = (\text{rot } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0.$$

Очевидно, что с точностью до константы решениями являются следующие векторы:  $\mathbf{A} = B\{-y; 0; 0\}$ ,  $\mathbf{A} = B\{0; x; 0\}$  и любая их суперпозиция, например, сумма, которая наиболее компактно записывается в векторном виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}B\{-y; x; 0\} = \frac{1}{2}[\mathbf{B} \mathbf{r}];$$

Кулоновской калибровке  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  удовлетворяют все три решения.

**Ответ:**  $\mathbf{A}(x,y) = \frac{1}{2}B\{-y; x; 0\} = \frac{1}{2}[\mathbf{B} \mathbf{r}];$

$$\mathbf{A}(x,y) = B\{-y; 0; 0\}, \mathbf{A}(x,y) = B\{0; x; 0\}.$$

**Задача 7.3.17 (базовая задача).** Найти векторный магнитный потенциал  $\mathbf{A}$  и индукцию магнитного поля  $\mathbf{B}$  на расстоянии  $r$  от прямолинейного бесконечного тонкого проводника, по которому течёт постоянный ток  $I$ .

**Решение**

**Эквивалентная задача электростатики:** найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $\mathbf{E}$  электростатического поля, созданного прямолинейным безграничным тонким проводником, на котором равномерно распределён электрический заряд с линейной плотностью  $\gamma$ . Решение данной задачи было рассмотрено выше (задача 1.3.13 главы 1 и задача 2.3.11 главы 2) и имеет следующий вид



$$\varphi = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \gamma \ln \frac{r}{C}; \quad E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{r},$$

где  $r$  – расстояние от провода,  $C$  – произвольная константа, имеющая размерность длины. Вектор напряженности электрического поля здесь направлен перпендикулярно проводнику.

Выберем цилиндрическую систему координат, полярная ось  $Z$  которой совпадает с проводником, а её направление – с направлением тока  $I$ .

Используя эквивалентность электростатической и магнитостатической задач и производя замены (7.22), получим

$$A = A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \frac{r}{C}; \quad B = B_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}.$$

Вектор индукции магнитного поля прямого безграничного тока лежит в плоскости ( $XY$ ) и касателен к окружности радиуса  $r$ , центр которой лежит на проводнике. Векторный магнитный потенциал этого поля имеет одну компоненту вдоль оси  $Z$ .

**Ответ:**  $A = A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \frac{r}{C}; \quad B = B_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}.$

*Замечание:* Тот же ответ для величины магнитной индукции  $B$  был получен ранее из уравнения Био-Савара–Лапласа (задача 7.3.1, Замечание 2) и из теоремы о циркуляции вектора  $\mathbf{B}$  (задача 7.3.9).

**Задача 7.3.18.** По поверхности длинного кругового цилиндра радиуса  $R$  вдоль его оси течет поверхностный ток с постоянной плотностью  $\mathbf{i}$ . Определить магнитный потенциал  $A$  и индукцию магнитного поля  $\mathbf{B}$  этого тока.

### Решение

Выберем цилиндрическую систему координат, ось  $Z$  которой совпадает с осью цилиндра, а направление – с вектором плотности тока.

**Эквивалентная задача электростатики:** длинный круговой цилиндр радиуса  $R$  заряжен по поверхности с постоянной поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Определить  $\varphi$  и  $E$  для этой системы зарядов.

Данная магнитостатическая задача была решена выше (глава 1, задача 1.3.12). Используя решение этой задачи и условия (7.22), можно записать для областей внутри и снаружи цилиндра

## для задачи электростатики:

для $r < R$ :	$\varphi^{in} = C_1,$	$E^{in} = 0;$
для $r > R$ :	$\varphi^{ex} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} R \ln \frac{r}{C_2}$	$E_r^{ex} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r};$
граничные условия: ( $r = R$ )	$\varphi^{ex} = \varphi^{in},$	$E_r^{ex} - E_r^{in} = \frac{\sigma}{\epsilon_0};$

## для задачи магнитостатики:

для $r < R$ :	$A = C_1,$	$B = 0;$
для $r > R$ :	$A_z^{ex} = -\mu_0 i R \ln \frac{r}{C_2},$	$B_\phi^{ex} = \mu_0 i \frac{R}{r};$
граничные условия: ( $r = R$ )	$A_z^{ex} = A_z^{in},$	$B_\phi^{ex} - B_\phi^{in} = \mu_0 i.$

## § 7.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 7.4.1.** Определить величину индукции магнитного поля в центре равностороннего треугольника со стороной  $a$ , если:

- его обтекает ток  $I$ ;
- источник ЭДС подключен к двум вершинам треугольника.

Поле подводящих проводов не учитывать, сопротивление всех сторон треугольника одинаково.

**Ответ:** а)  $B = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a}$ ; б)  $B = 0$ .

**Задача 7.4.2.** Найти величину индукции магнитного поля в центре плоской спирали, по которой течет ток силы  $I$ . Спираль заключена между окружностями радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 > R_2$ , рис. 7.16). Общее число витков спирали  $N$ . Поле подводящих проводов не учитывать.

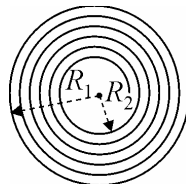


Рис. 7.16. Проводник в виде плоской спирали (задача 7.4.2)

**Ответ:** 
$$B = \frac{\mu_0 N I \ln(R_2 / R_1)}{2(R_2 - R_1)}.$$

**Задача 7.4.3.** Ток  $I$  течет по тонкому замкнутому проводнику, показанному на рис. 7.17. Радиус изогнутой части проводника равен  $R$ , угол  $2\varphi=90^\circ$ . Найти величину индукции магнитного поля в точке  $O$ .

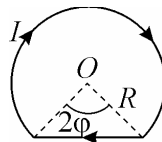


Рис. 7.17. Замкнутый проводник с током  $I$  (задача 7.4.3)

**Ответ:** 
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left( \frac{3\pi}{4} + 1 \right).$$

**Задача 7.4.4.** Найти величину индукции магнитного поля в точке  $O$  для контура с током  $I$ , который показан на рис. 7.18. Радиусы  $a$ ,  $b$  и угол  $\varphi$  известны.

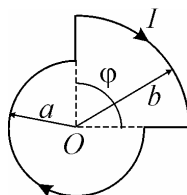


Рис. 7.18. Замкнутый проводник с током  $I$  (задача 7.4.4)

**Ответ:** 
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{2\pi - \varphi}{a} + \frac{\varphi}{b} \right).$$

**Задача 7.4.5.** Найти величину индукции магнитного поля в точке  $O$  для проводника с током  $I$ , который показан на рис. 7.19. Горизонтальные части провода можно считать бесконечно длинными, радиус полукольца равен  $R$ .

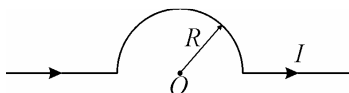


Рис. 7.19. Проводник с током (задача 7.4.5)

**Ответ:** 
$$B = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

**Задача 7.4.6.** Найти индукцию магнитного поля в точке  $O$ , если проводник с током  $I$  имеет вид, показанный на рис. 7.20. Горизонтальные части провода можно считать бесконечно длинными, радиус полукольца равен  $R$ .

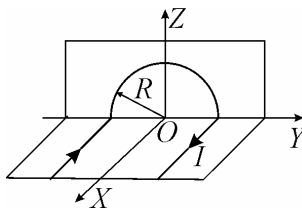


Рис. 7.20. Проводник с током  $I$  (задача 7.4.6)

**Ответ:** 
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sqrt{4 + \pi^2},$$
 вектор  $\mathbf{B}$

лежит в плоскости  $XZ$  под углом  $\alpha$  к оси  $OX$ , где  $\operatorname{tg} \alpha \approx 0,63$ .

**Задача 7.4.7.** Однородный ток плотности  $j$  течет внутри неограниченной пластины толщины  $2d$  параллельно ее поверхности. Пренебрегая влиянием вещества пластины, найти зависимость величины индукции магнитного поля этого тока от расстояния  $x$ , отсчитываемого от средней плоскости пластины.

**Ответ:** 
$$\begin{cases} B = \mu_0 jx, & x \leq d; \\ B = \mu_0 jd, & x \geq d. \end{cases}$$

**Задача 7.4.8.** Из куска изолированной проволоки сделан круглый виток и подключен к источнику тока с постоянной ЭДС. Как изменится индукция магнитного поля в центре круга, если из того же куска проволоки сделать два прилегающих друг к другу соосных витка?

**Ответ:** увеличится в 4 раза.

**Задача 7.4.9.** Бесконечно длинный цилиндрический провод состоит из двух коаксиальных цилиндров. Внутренний сплошной цилиндр, изготовленный из немагнитного материала, имеет радиус  $R_1$ . Радиус внешнего пустотелого цилиндра равен  $R_2$ . Вдоль цилиндров текут постоянные токи одинаковой величины  $I$ , но направленные противоположно. Определить зависимость величины индукции магнитного поля от расстояния до оси провода  $B(r)$ .

**Ответ:** 
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r, \quad r < R_1;$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad R_1 \leq r \leq R_2;$$

$$B = 0, \quad r \geq R_2.$$

**Задача 7.4.10.** Внутри длинного прямого провода круглого сечения имеется длинная круглая цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода и смещена относительно неё на расстояние  $d$ . По проводу течет постоянный ток плотности  $j$ , равномерно распределенный по его сечению. Пренебрегая влиянием вещества провода, определить величину индукции магнитного поля внутри полости.

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0}{2} jd$ .

**7.4.11.** Вдоль длинной тонкостенной цилиндрической трубки радиуса  $R$  течет постоянный ток  $I$ . В стенке трубки имеется тонкая щель ширины  $d$ , параллельная оси трубки. Определить величину индукции магнитного поля  $B$  в точке, лежащей внутри трубки на её радиусе, если расстояние от середины щели до рассматриваемой точки равно  $r$  ( $r, R \gg d$ ).

**Ответ:**  $B \approx \frac{\mu_0 Id}{4\pi^2 rR}$ .

**Задача 7.4.12.** Непроводящий тонкий диск радиуса  $R$ , равномерно заряженный с одной стороны с поверхностной плотностью  $\sigma$ , вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Найти:

- а) величину индукции магнитного поля в центре диска;  
б) модуль магнитного момента диска.

**Ответ:** а)  $B = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$ ; б)  $p_m = \frac{\pi \sigma \omega R^4}{4}$ .

**Задача 7.4.13.** Заряд  $Q$  равномерно распределен по объёму однородного шара радиуса  $R$ , который вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью  $\omega$ . Найти магнитный момент такой системы.

**Ответ:**  $p_m = \frac{QR^2}{5} \omega$ .

**Задача 7.4.14.** В каких точках на расстоянии  $R$  от точечного магнитного момента  $p_m$  величина индукции магнитного поля будет иметь максимальное и минимальное значения?

**Ответ:**  $B = B_{\max} = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi R^3}$  в точках, радиус-вектор которых составляет с горизонталью углы  $\theta = 0, \pi$ ;

$B = B_{\min} = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi R^3}$  в точках, радиус-вектор которых

составляет с горизонталью углы  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ .

**Задача 7.4.15.** Вдоль оси длинного кругового цилиндра радиуса  $R$  течет ток с постоянной плотностью  $\mathbf{j}$ . Найти векторный магнитный потенциал  $\mathbf{A}$  магнитного поля в зависимости от расстояния  $r$  до оси цилиндра.

**Ответ:** Если принять  $\mathbf{A}(0) = 0$ , то

$$\text{для } r \leq R: \quad \mathbf{A}^{in} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \pi r^2 \mathbf{j};$$

$$\text{для } r \geq R: \quad \mathbf{A}^{ex} = -\frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi R^2 \left( \ln \frac{r}{R} + \frac{1}{2} \right) \mathbf{j};$$

**Задача 7.4.16.** Найти векторный магнитный потенциал  $\mathbf{A}$  внутри и вне длинного (бесконечного) соленоида радиуса  $a$ , внутри которого протекающим током создается однородное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$ . Положить  $\mathbf{A} = 0$  на оси соленоида.

**Ответ** (в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$ ):

$$\text{При любом } z \text{ внутри соленоида } A_\varphi = \frac{1}{2} Br; \text{ снаружи } A_\varphi = \frac{a^2 B}{2r}.$$

Линии векторного поля  $\mathbf{A}$  образуют окружности с центром на оси соленоида, лежащие в плоскости, перпендикулярной этой оси.

*Указание:* можно воспользоваться теоремой о циркуляции вектора  $\mathbf{A}$  (7.23).

### Литература к главе 7

1. *Матвеев А.Н.* Электричество и магнетизм. – М.: Оникс 21 век, 2005, §§ 8-10, 35-37.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. т.III Электричество. – М.: Физматлит, 2006, глава III.
3. *Калашиников С.Г.* Электричество. – М.: Физматлит, 2003, §§ 75-88.
4. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Физматлит, 2003, глава IV.

## Глава 8

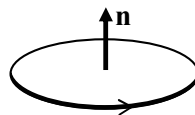
## ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. КОЭФФИЦИЕНТЫ САМОИНДУКЦИИ И ВЗАИМОИНДУКЦИИ

### § 8.1. Теоретический материал

**Потоком вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$**  через поверхность  $S$  называется поверхностный интеграл

$$\Phi = \int_S B_n dS = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (8.1)$$

Вектор  $d\mathbf{S}$  направлен по нормали  $\mathbf{n}$  к элементарной площадке  $dS$  и имеет модуль, равный ее площади. Для согласования знаков принято, что направление вектора нормали  $\mathbf{n}$  и направление обхода контура связаны правилом правого винта, как показано на *рис. 8.1.*



*Рис. 8.1.* К определению направления вектора нормали к плоскому контуру

Единицей магнитного потока в системе СИ является *вебер* ( $\text{Вб} = \text{Т} \cdot \text{м}^2$ ).

**Закон электромагнитной индукции Фарадея** устанавливает динамическую связь магнитных явлений с электрическими.

#### Интегральная форма закона электромагнитной индукции:

ЭДС электромагнитной индукции  $\mathcal{E}$  в произвольном контуре  $L$  пропорциональна скорости изменения магнитного потока  $\Phi$  через произвольную поверхность  $S$ , опирающуюся на этот контур:

$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (8.2)$$

Знак минус в (8.2) означает, что индукционный ток, вызываемый ЭДС индукции в проводниках, своим магнитным полем противодействует изменению магнитного потока, его породившего (**правило Ленца**).

Появление ЭДС электромагнитной индукции объясняется работой силы Лоренца, действующей на заряд в электромагнитном поле (7.7)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость движения заряда. В разных физических ситуациях и разных системах отсчета эта сила может иметь только электрическую компоненту (первое слагаемое), или только магнитную (второе слагаемое) или быть суммой этих компонент.

Изменение потока  $\Phi(t)$  может быть вызвано двумя разными причинами, которые могут действовать и совместно. Им соответствуют две следующие ситуации:

1) Вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  постоянен, а  $\Phi(t)$  меняется за счет движения проводников, например, из-за деформации проводящего контура или изменения его ориентации относительно направления вектора  $\mathbf{B}$ .

2) Проводящий контур неподвижен, а  $\Phi(t)$  меняется за счет изменения величины и направления  $\mathbf{B}(t)$ .

В случае 1) ЭДС индукции возникает из-за магнитной составляющей силы Лоренца, которая в данной ситуации действует на заряды, которые движутся вместе с проводником:

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

В замкнутой цепи эта сторонняя сила порождает ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint_L \mathbf{F} d\mathbf{l} = \oint_L [\mathbf{v}\mathbf{B}] d\mathbf{l}. \quad (8.3)$$

Данный интеграл преобразуется к виду (8.2) [1, §44].

Если взять систему отсчета, движущуюся вместе с данным участком проводника, то магнитная составляющая силы Лоренца не возникнет, поскольку в такой системе заряды будут неподвижны. Появление же ЭДС индукции в этом участке можно объяснить релятивистским эффектом – появлением электрического поля, возникающим в движущейся системе отсчета. Это поле для скоростей, много меньших скорости света, определяется следующей формулой [1, §11]:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad (8.4)$$

В этом случае ЭДС возникает за счет работы электрической составляющей силы Лоренца, и ее величина приводит к тому же самому значению ЭДС (8.3).

В случае 2) ЭДС индукции обусловлена работой вихревого электрического поля  $\mathbf{E}_{\text{вихр}}$ , возникающим в пространстве при изме-



нении магнитного поля  $\mathbf{V}(t)$ . В отличие от электростатического поля, поле  $\mathbf{E}_{\text{вихр}}$  не потенциально и возникает в отсутствие электрических зарядов. Локальная взаимная связь  $\mathbf{E}_{\text{вихр}}$  и  $\mathbf{V}(t)$  определяется следующим уравнением (8.5), которое входит в систему четырех фундаментальных уравнений электродинамики Максвелла.

**Дифференциальная форма закона электромагнитной индукции**

$$\text{rot } \mathbf{E}_{\text{вихр}} = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}. \quad (8.5)$$

Пользуясь теоремой Стокса ((7.8) главы 7) величину ЭДС индукции в замкнутом контуре  $L$ , вызванной вихревым электрическим полем, можно представить в виде (8.2):

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}_{\text{вихр}} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Таким образом, интегральное соотношение (8.2) является универсальным, так как описывает оба варианта возникновения ЭДС, в том числе и при их совместном действии.

**Индуктивность линейного проводящего контура (коэффициент самоиндукции)** – коэффициент пропорциональности  $L$  между силой тока в контуре  $I$  и магнитным потоком  $\Phi(I)$ , который этот ток создает через произвольную поверхность, опирающуюся на этот контур

$$\Phi(I) = LI. \quad (8.6)$$

Индуктивность положительна, ее величина в вакууме определяется только формой и размером контура.

Единица индуктивности в системе СИ называется *генри* (Гн).

**Энергия магнитного поля линейного контура с током**

$$W = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{1}{2} LI^2. \quad (8.7)$$

**Индуктивность произвольного проводящего контура** определяется из соотношения  $W = \frac{1}{2} LI^2$ .

**Коэффициентом взаимной индукции линейных контуров  $L_{ji}$**  называется коэффициент пропорциональности между магнитным

потоком  $\Phi_j$ , создаваемым в  $j$ -м контуре магнитным полем от тока  $I_i$ , протекающего по  $i$ -му контуру:

$$\Phi_j(I_i) = L_{ji}I_i. \quad (8.8)$$

Величина  $L_{ji}$  определяется формой, размерами и взаимным расположением контуров. Знак  $L_{ji}$  может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от взаимной ориентации контуров и направлений токов в них, которые приняты за положительные. В вакууме или в средах с линейной магнитной восприимчивостью (диа- и парамагнетики) коэффициенты взаимной индукции симметричны по индексам (теорема взаимности [1, §47])

$$L_{ij} = L_{ji}. \quad (8.9)$$

### Энергия магнитного поля системы контуров с током

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j,i} L_{ji} I_j I_i. \quad (8.10)$$

Эту энергию можно разбить на две части

$$W = \frac{1}{2} \sum_i L_{ii} I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,i \\ j \neq i}} L_{ji} I_j I_i.$$

Первое слагаемое – сумма собственных энергий контуров, второе – сумма энергий их взаимодействия  $W_{ij}$ , которая может быть как положительной, так и отрицательной. Полная энергия всегда положительна.

**Коэффициент взаимной индукции произвольных контуров** определяется по энергии их взаимодействия

$$W_{ij \text{ взаим}} = L_{ij} I_i I_j.$$

## § 8.2. Основные типы задач (классификация)

8.1. Нахождение ЭДС индукции в линейных проводниках, движущихся в постоянном магнитном поле.

8.2. Нахождение ЭДС индукции в проводящих телах, движущихся в постоянном магнитном поле.

8.3. Нахождение ЭДС индукции в изменяющемся магнитном поле.

8.3. Нахождение вихревого электрического поля.

8.4. Расчет индуктивности контуров, состоящих из линейных проводников.

8.5. Расчет индуктивности проводников с пространственно распределенными токами.

8.6. Определение коэффициента взаимной индукции контуров

### § 8.3. Методы решения и примеры решения задач

#### Задачи типа 8.1

*Нахождение ЭДС индукции в линейных проводниках, движущихся в постоянном магнитном поле*

**Метод решения** – применение общего интегрального соотношения (8.2) либо расчет на основании силы Лоренца (8.3).

В обоих случаях требуется выбрать контур, который проводит-ся по линейным проводникам цепи.

Использование (8.3) требует расчета контурного интеграла для расчета работы силы Лоренца, и поэтому удобно при простой форме контура, например прямоугольной.

Применение (8.2) для нахождения ЭДС индукции требует определения потока через площадь контура, то есть интегрирования по поверхности, ограниченной контуром. Этот вариант будет проще, если все проводники лежат в одной плоскости, а величина нормальной компоненты индукции  $B_n$  на поверхности контура постоянна или задана легко интегрируемой функцией координат.

Использование релятивистского соотношения (8.4) для решения типовых задач курса общей физики в большинстве случаев не оправдано, поскольку приводит к ненужному усложнению. Это особенно проявляется в случае непоступательного движения проводников, например, при их вращении, поскольку закон преобразования полей (8.4) относится к инерциальным системам отсчета.

**Задача 8.3.1 (базовая задача).** Длинный прямой провод, по которому течет ток  $I_0$ , и П-образный проводник  $ABCD$  с подвижной перемычкой  $AB$  длины  $l$  расположены в одной плоскости. Сторона  $CD$  контура расположена на расстоянии  $a$  от проводника. Перемычку перемещают с заданной постоянной скоростью  $v$  (рис. 8.2). Найти:

1) ЭДС индукции в контуре как функцию расстояния от перемычки до провода;

2) силу тока в контуре, если сопротивление единицы длины всех составляющих его проводников равно  $r'$ , а индуктивностью контура можно пренебречь.

### Решение

#### Нахождение ЭДС индукции (3 способа).

Зададим для определенности направление тока  $I_0$  (рис. 8.2). Выберем в качестве положительного направления обхода контура обход против часовой стрелки. Тогда вектор  $\mathbf{n}$  нормали к контуру будет перпендикулярен плоскости чертежа и направлен из чертежа к нам. Обозначим расстояние от провода до ближайшего проводника контура  $a$ , тогда расстояние от провода до перемычки  $b(t) = a + vt$ .

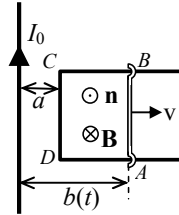


Рис. 8.2. К расчету ЭДС индукции в контуре с движущейся перемычкой (задача 8.3.1)

**Способ 1.** Решение с использованием закона электромагнитной индукции в интегральной форме (8.2).

Силовые линии магнитной индукции поля, создаваемого бесконечным прямолинейным проводом, являются окружностями и пересекают плоскость рамки под прямым углом. В соответствии с выбранным направлением тока  $I_0$ , вектор  $\mathbf{B}$  в плоскости рамки будет направлен от нас в плоскость чертежа (рис. 8.2). На расстоянии  $r$  от бесконечного провода модуль вектора индукции определяется следующим соотношением (глава 7, задача 7.2.1):

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}.$$

В каждый момент времени магнитный поток  $\Phi(t)$  через контур определяется интегралом от  $B(r)$  по площади контура

$$\Phi(t) = \int_{S(t)} \mathbf{B} d\mathbf{S} = - \int_a^{b(t)} B(r) l dr = - \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \int_a^{b(t)} \frac{dr}{r} = - \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \ln \frac{b(t)}{a}.$$

Здесь учтено, что  $dS = l dr$ , а знак минус возникает из-за противоположной направленности вектора  $d\mathbf{S}$  (который параллелен нормали  $\mathbf{n}$ ), и вектора  $\mathbf{B}$ .

ЭДС находим по соотношению (8.2)

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \frac{1}{b} \frac{db}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi b} v.$$

ЭДС получилась положительной, то есть при переносе положительного заряда по выбранному *положительному направлению* обхода контура ее работа больше нуля.

Данный способ нахождения ЭДС индукции здесь не оптимален, так как в процессе решения после интегрирования выполняется дифференцирование полученного выражения, то есть, фактически, обратная операция.

**Способ 2.** Расчет ЭДС исходя из силы Лоренца (8.3).

Магнитная компонента силы Лоренца  $\mathbf{F}$  действует только на подвижные заряды, находящиеся в движущейся перемычке, и при указанных направлениях векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  направлена вверх; согласно (8.3)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint_{\Gamma} \mathbf{F}_L d\mathbf{l} = \int_{AB} [\mathbf{v}\mathbf{B}] d\mathbf{l} = \int_{AB} Bv d\mathbf{l} = Bv \int_{AB} d\mathbf{l} = Bv l = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi b(t)} v.$$

Интегрирование здесь происходит только по длине перемычки  $AB$ , поскольку остальные проводники неподвижны. Интеграл свелся к умножению, поскольку вектор индукции  $\mathbf{B}$  одинаков во всех точках перемычки.

Этот способ, отражающий физическую причину появления ЭДС, в данном случае наиболее удобен.

**Способ 3.** Расчет с использованием релятивистского преобразования полей (8.4).

Рассмотрим задачу в системе отсчета, движущейся со скоростью перемычки  $\mathbf{v}$ . В данной системе отсчета перемычка  $AB$  неподвижна, а участок  $CD$  движется со скоростью  $-\mathbf{v}$ . Согласно (8.4) в перемычке  $AB$  возникает вихревое электрическое поле  $\mathbf{E}_{AB} = [\mathbf{v}\mathbf{B}(b)]$ , а на участке  $CD$  – поле  $\mathbf{E}_{CD} = [\mathbf{v}\mathbf{B}(a)]$ , векторы напряженности которых на всех участках контура направлены вверх. На заряды, находящиеся в участке  $CD$ , действует также магнитная составляющая силы Лоренца  $\mathbf{F} = q \cdot [(-\mathbf{v})\mathbf{B}(a)]$ , которая компенсирует действие электрического поля  $\mathbf{E}_{CD}$ . Таким образом, сила Лоренца в контуре действуют на заряды в направлении вдоль проводников только на участке  $AB$  и обусловлена электрическим полем, модуль напряженности которого  $E = vB(b)$ . Это поле и вызывает появление ЭДС

$$\mathcal{E} = El = Bvl = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi b(t)} v.$$

Легко убедиться, что в данном случае  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} [\mathbf{v} \mathbf{B}(t)] = 0$ , то есть поле  $\mathbf{E}$  является вихревым.

### Нахождение силы тока

Сопротивление контура пропорционально его периметру и равно  $R(t) = r' 2[l + (b(t) - a)]$ . Поскольку индуктивность контура по условию мала, можно пренебречь ЭДС самоиндукции, и сила тока в каждый момент времени определяется по закону Ома из найденной выше ЭДС индукции

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R(t)} = \frac{\mu_0 I_0 l v}{4\pi r' b(l + b - a)}, \text{ где } b(t) = a + vt.$$

Сила тока получилась положительной, то есть его направление совпадает с выбранным положительным направлением обхода контура против часовой стрелки. Создаваемый этим током магнитный поток, очевидно, противоположен по знаку потоку, порождаемому током  $I_0$ , что соответствует правилу Ленца.

**Ответ:** 1)  $\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi b(t)} v,$

2)  $I = \frac{\mu_0 I_0 l v}{4\pi r' b(l + b - a)}, \text{ где } b(t) = a + vt.$

**Задача 8.3.2.** Круглая проволочная петля радиуса  $a$  и сопротивлением  $R$ , находящаяся в однородном постоянном магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , равномерно вращается вокруг своего диаметра, перпендикулярного к  $\mathbf{B}$ , с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 8.3). Пренебрегая индуктивностью петли, найти среднюю механическую мощность, необходимую для поддержания вращения.

### Решение

Пусть  $\varphi(t) = \omega t$  – угол между вектором  $\mathbf{B}$  и вектором  $\mathbf{n}$  нормали к плоскости петли. Тогда магнитный поток через контур

$$\Phi(t) = \pi a^2 B \cos \omega t,$$

а ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = \pi a^2 B \omega \sin \omega t.$$

Механическую мощность, необходимую для поддержания вращения, можно найти из того, что по закону сохранения энергии она должна равняться тепловой мощности  $P_m$ , выделяющейся в этом контуре.

Поскольку индуктивностью контура можно пренебречь, ЭДС самоиндукции можно не учитывать, и для тепловой мощности  $P_m$  получаем

$$P_m(t) = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{(\pi a^2 B \omega)^2}{R} \sin^2 \omega t$$

Среднее по периоду значение этой величины составляет  $\bar{P} = \frac{1}{2R} (\pi a^2 B \omega)^2$ .

**Ответ:**  $\bar{P} = \frac{1}{2R} (\pi a^2 B \omega)^2$ .

*Замечание.* Мощность момента сил, обеспечивающих вращение петли, должна равняться мощности тормозящего механического момента сил Ампера, действующих на контур со стороны магнитного поля из-за протекающего в контуре индукционного тока. Решение задачи таким способом рассмотрено в главе 9, задача 9.3.13.

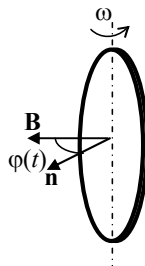


Рис. 8.3. К нахождению мощности сил, вращающих петлю из проводника в магнитном поле (задача 8.3.2)

### Задачи типа 8.2.

*Нахождение ЭДС индукции в проводящих телах, движущихся в постоянном магнитном поле*

**Метод решения** – нахождение ЭДС индукции через магнитную составляющую силы Лоренца (8.3). Применение общего интегрального соотношения (8.2) в данном случае не всегда удобно, так как требует задания контура. При наличии движущихся пространственных проводящих областей (тел) выбор контура может быть неочевидным и привести к «парадоксам» (см., например, униполярный индуктор [2, §112] и др.). В таких случаях целесообразно вести расчет ЭДС, непосредственно исходя из ее первопричины – силы Лоренца.

**Задача 8.3.3 (базовая задача).** Металлический цилиндр радиуса  $a$  помещен в однородное постоянное магнитное поле  $\mathbf{B}$ , направ-

ленное вдоль его оси. Цилиндр вращают с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси (рис. 8.4).

Найти: 1) разность потенциалов  $U$  между поверхностью цилиндра и осью; 2) поверхностную  $\sigma$  и объемную  $\rho(r)$  плотности заряда в цилиндре.

### Решение

Пусть для определенности вектор угловой скорости  $\omega$  параллелен  $\mathbf{B}$ . В стационарном режиме, движения электронов вдоль радиуса цилиндра нет, т.е. радиальная компонента скорости  $v_r = 0$ , а имеется только перпендикулярная к радиусу компонента  $v_\varphi(r) = \omega r$ . В проекции на радиальное направление второй закон Ньютона для электронов, движущихся по окружности с центростремительным ускорением  $a_{ц} = -\omega^2 r$ , имеет вид

$$-m\omega^2 r = -e(\omega r B + E_r(r)),$$

где справа стоит полная сила Лоренца,  $E_r$  – радиальная компонента напряженности электрического поля,  $e$  – модуль заряда электрона. Перепишем это выражение в виде

$$eE_r(r) = -e\omega r B + m\omega^2 r.$$

Величина  $m\omega^2 r$  обычно пренебрежимо мала по сравнению со слагаемым  $e\omega r B$ . Действительно ее отношение к магнитной силе Лоренца равно

$$\frac{m\omega^2 r}{e\omega r B} = \frac{\omega}{(e/m)B},$$

что в большинстве случаев мало ввиду большой величины удельного заряда электрона ( $e/m = 1.76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг). Например, при  $B \sim 10^{-2}$  Тл и  $\omega \sim 10^4$  рад/с это отношение имеет порядок  $10^{-5}$ . Поэтому приближенно можно считать, что,

$$E_r(r) = -\omega r B.$$

Данное радиальное электрическое  $E_r(r)$  поле создается за счет перераспределения плотности электронов в цилиндре при его вращении.

Разность потенциалов между периферией и центром цилиндра будет равна

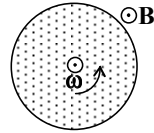


Рис. 8.4. К расчету ЭДС индукции во вращающемся цилиндре (задача 8.3.3)



$$U = - \int_0^a E(r) dr = \int_0^a \omega r B dr = \frac{1}{2} \omega B a^2.$$

Зная напряженность электрического поля, можно найти объемную плотность заряда  $\rho$  из уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ . Учитывая, что поле  $\mathbf{E}$  имеет только радиальную компоненту  $E_r$  и используя выражение дивергенции в цилиндрических координатах, получим

$$\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \varepsilon_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) = -2 \varepsilon_0 \omega B.$$

Так как плотность заряда получилась постоянной, то объемный заряд цилиндра

$$q_{\text{об}} = \rho \cdot V = -2 \omega \varepsilon_0 B \pi a^2 b.$$

Он отрицателен, поскольку магнитная сила Лоренца при заданной ориентации векторов  $\mathbf{B}$  и угловой скорости  $\omega$  вытесняет электроны от поверхности к центру цилиндра.

Поскольку в целом цилиндр не имеет заряда, то на его поверхности остается противоположный по знаку (т.е. положительный) поверхностный заряд  $q_{\text{пов}} = -q_{\text{об}} = 2 \omega \varepsilon_0 B \pi a^2 b$ , поверхностная плотность которого

$$\sigma = \frac{q_{\text{пов}}}{S} = \frac{2 \omega \varepsilon_0 B \pi a^2 b}{2 \pi a b} = \varepsilon_0 \omega B a.$$

Еще проще можно найти  $\sigma$  из граничного условия для вектора электрической индукции:

$$\sigma = -D_r(a) = -\varepsilon_0 E_r(a) = \varepsilon_0 \omega B a.$$

**Ответ:** 1)  $U = \frac{1}{2} \omega B a^2$ ; 2)  $\sigma = \varepsilon_0 \omega B a$ ,  $\rho = -2 \omega \varepsilon_0 B = \text{const}$ .

### Задачи типа 8.3

*Нахождение ЭДС индукции в переменном магнитном поле*

**Метод решения** – применение (8.2).

**Задача 8.3.4 (базовая задача).** Плоский контур, имеющий вид двух квадратов со сторонами  $a$  и  $b$  соответственно, находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен его плоскости и меняется по закону  $B(t) = B_0 \cos \omega t$ . Найти зависи-

мость от времени силы тока  $I$  в контуре, если сопротивление единицы длины провода равно  $r'$ . Индуктивностью контура пренебречь.

### Решение

Выберем в качестве положительного направления обхода обход большого контура (со стороной  $a$ , верхний на рис. 8.5) против часовой стрелки (показано стрелками на рисунке). Тогда для второго контура (со стороной  $b$ ) это направление обхода будет отрицательным. В связи с этим полный магнитный поток через контур

$$\Phi = B \cdot (a^2 - b^2),$$

а величина ЭДС равна

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial t} (a^2 - b^2) = (a^2 - b^2) B_0 \omega \sin \omega t.$$

Поскольку индуктивностью можно пренебречь, ЭДС самоиндукции учитывать не надо и сила тока определяется из найденной ЭДС по закону Ома, учитывая, что общее сопротивление  $R$  равно  $4r'(a + b)$ :

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{(a^2 - b^2) B_0 \omega \sin \omega t}{4r'(a + b)} = \frac{1}{4r'} (a - b) B_0 \omega \sin \omega t.$$

**Ответ:**  $I(t) = \frac{1}{4r'} (a - b) B_0 \omega \sin \omega t.$

**Задача 8.3.5.** Магнитный поток через неподвижный контур с сопротивлением  $R$  изменяется за промежуток времени  $\tau$  по закону  $\Phi = a \cdot t \cdot (\tau - t)$ . Найти:

- 1) количество тепла  $Q$ , выделившееся в контуре за время  $\tau$ ;
- 2) заряд  $q$ , прошедший через контур за время  $\tau/2$ .

### Решение

ЭДС индукции в контуре:  $\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = 2a \left( t - \frac{\tau}{2} \right),$

тепловая мощность тока:  $P(t) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{4a^2}{R} \left( t - \frac{\tau}{2} \right)^2.$

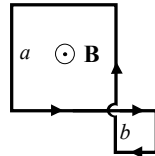


Рис. 8.5. Форма контура и ориентация вектора  $\mathbf{B}$  (задача 8.3.4)

Интегрируя тепловую мощность, находим количество тепла

$$Q = \int_0^{\tau} P(t) dt = \frac{4a^2}{R} \int_0^{\tau} \left(t - \frac{\tau}{2}\right)^2 dt = \frac{4a^2}{3R} \left(t - \frac{\tau}{2}\right)^3 \Big|_0^{\tau} = \frac{a^2}{3R} \tau^3.$$

Чтобы найти заряд  $q$ , прошедший по цепи за время  $\tau/2$ , найдем силу тока

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt},$$

откуда затем получаем

$$\begin{aligned} q &= \int_0^{\tau/2} I(t) dt = -\int_0^{\tau/2} \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} dt = -\frac{1}{R} \int_0^{\Phi(\tau/2)} d\Phi = \\ &= -\frac{1}{R} (\Phi(\tau/2) - \Phi(0)) = -\frac{a\tau^2}{4R}. \end{aligned}$$

Отрицательный знак заряда означает, что, в соответствии с правилом Ленца, индукционный ток шел по контуру в таком направлении, при котором его магнитное поле препятствовало изменению потока.

**Ответ:** 1)  $Q = \frac{a^2}{3R} \tau^3$ ;    2)  $q = -\frac{a\tau^2}{4R}$ .

**Задача 8.3.6.** Контур представляет собой окружность, соединенную по диаметру, с конденсаторами  $C_{1-3}$ , включенными в разрывы проводников (рис. 8.6), и находится в однородном переменном магнитном поле. Скорость изменения магнитного потока через площадь кольца постоянна и равна  $\dot{\Phi}$ . Найти заряды конденсаторов, если вначале конденсаторы были не заряжены.

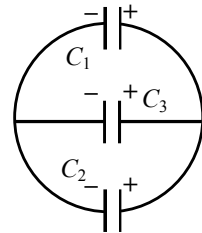


Рис. 8.6. Схема контура к задаче 8.3.6

### Решение

Расставим произвольно знаки зарядов на конденсаторах (см. рис. 8.6.) Истинные знаки зарядов определяются потом из знаков полученных решений.

Алгебраическая сумма напряжений по любому выбранному контуру должна равняться сумме ЭДС, действующих в данном контуре. Совершим обход внешнего кругового контура (против часовой

стрелки), сразу учитывая, что напряжение на конденсаторах  $U_i = \frac{q_i}{C_i}$ , а ЭДС в этом контуре  $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}$ :

$$\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = -\dot{\Phi}$$

Обход верхней половины контура (также против часовой стрелки) дает

$$\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_3}{C_3} = -\frac{1}{2}\dot{\Phi},$$

где учтено, что магнитный поток через этот контур вдвое меньше, чем через весь контур. Третье уравнение получается из условия сохранения заряда (запишем для правого узла)

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0.$$

Решая эту систему трех уравнений, получаем

$$\text{Ответ: } q_1 = -\dot{\Phi} \frac{C_1(C_2 + C_3/2)}{C_1 + C_2 + C_3}, \quad q_2 = \dot{\Phi} \frac{C_2(C_1 + C_3/2)}{C_1 + C_2 + C_3},$$

$$q_3 = \dot{\Phi} \frac{C_3(C_2 - C_1)}{2(C_1 + C_2 + C_3)}.$$

*Замечание.* Знаки  $q_1$  и  $q_2$  всегда противоположны. Знак  $q_3$  зависит от соотношения емкостей  $C_1$  и  $C_2$ . В случае  $C_1 = C_2$  разность потенциалов между концами диаметра равна нулю и  $q_3 = 0$ .

## Задачи типа 8.4

### Нахождение вихревого электрического поля

**Метод решения:** в общем случае вихревое поле определяется дифференциальным соотношением (8.5). Если же структура силовых линий поля  $\mathbf{E}_{\text{вихр}}$  заранее известна из соображений симметрии, как это бывает в большинстве случаев в задачах курса общей физики, то для нахождения  $\mathbf{E}_{\text{вихр}}$  удобно использовать соотношение

$$E_{\text{инд}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \oint_L \mathbf{E}_{\text{вихр}} d\mathbf{l}.$$

в котором приравнивается ЭДС индукции, найденная из общего соотношения (8.2), и ее выражение через циркуляцию  $\mathbf{E}_{\text{вихр}}$ . Контур интегрирования  $L$  надо выбрать так, чтобы циркуляция вектора  $\mathbf{E}_{\text{вихр}}$  получилась в наиболее простом виде. Это будет, например, когда весь контур или его участки совпадают с силовыми линиями, а остальные участки контура перпендикулярны силовым линиям и не дают вклада в циркуляцию.

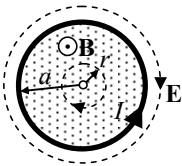
**Задача 8.3.7 (базовая задача).** В длинном соленоиде радиуса  $a$  с плотностью намотки  $n$  (витков/метр) изменяют ток с постоянной скоростью  $\dot{I}$  (А/с). Найти модуль напряженности вихревого электрического поля  $E(r)$  как функцию расстояния  $r$  от оси соленоида.

**Решение**

Магнитное поле внутри длинного соленоида пространственно однородно и равно  $B = \mu_0 n I$  (глава 7, задача 7.3.9). Пусть вектор  $\mathbf{B}$  направлен из плоскости рисунка к нам (рис. 8.7). В силу аксиальной симметрии системы силовые линии вихревого электрического поля должны быть окружностями с центром на оси соленоида (пунктир на рис. 8.7).

Область  $r < a$ .

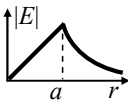
Выберем контур  $L$  в виде окружности радиуса  $r$ . Пусть положительное направление обхода контура будет против часовой стрелки, тогда нормаль к его плоскости параллельна вектору  $\mathbf{B}$  и магнитный поток через этот контур положителен



$$\Phi(t) = \pi r^2 \cdot B(t).$$

Согласно (8.2) ЭДС в этом контуре

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = -\pi r^2 \dot{B}.$$



Поскольку контур  $L$  совпадает с силовыми линиями поля  $\mathbf{E}$  и величина напряженности  $E(r)$  постоянна на этом контуре, то циркуляция имеет вид

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 2\pi r E.$$

Рис. 8.7. К расчету вихревого электрического поля, создаваемого соленоидом (задача 8.3.7)

Приравнивая эти два выражения, получаем

$$E(r) = -\frac{1}{2} \dot{B} r \quad (8.11)$$

или

$$E(r) = -\frac{1}{2} \mu_0 n \dot{I} r.$$

Знак напряженности  $E$  противоположен знаку производной тока  $\dot{I}$  в обмотке в соответствии с правилом Ленца, так как это индуцированное поле должно препятствовать изменению силы тока (см. рис. 8.7).

Область  $r > a$ .

В этом случае магнитный поток не зависит от радиуса контура  $r$  и равен полному потоку через поперечное сечение соленоида:  $\Phi(t) = \pi a^2 B(t)$ . Повторяя предыдущие вычисления с этим изменением, получаем  $\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = -\pi a^2 \dot{B}$  и

$$E(r) = -\frac{1}{2} a^2 \dot{B} \frac{1}{r} = -\frac{1}{2} \mu_0 n a^2 \dot{I} \frac{1}{r}.$$

Схематично график величины  $E(r)$  приведен на рис. 8.7.

**Ответ:**  $r < a$ :  $E(r) = -\frac{1}{2} \mu_0 n \dot{I} r,$

$r > a$ :  $E(r) = -\frac{1}{2} \mu_0 n a^2 \dot{I} \frac{1}{r}.$

**Задача 8.3.8.** Плоская спираль с большим числом витков  $N$  и внешним радиусом  $R$  находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости спирали и меняется по закону  $B = B_0 \cos \omega t$  (рис. 8.8). Найти ЭДС индукции в спирали.

**Решение**

**Способ 1.** Будем исходить из того, что силовые линии вихревого электрического поля представляют собой окружности с центром в начале спирали и его напряженность согласно результату предыдущей задачи (8.11)  $E(r) = -\frac{1}{2} \dot{B} r$ . В полярных координатах этот вектор имеет вид

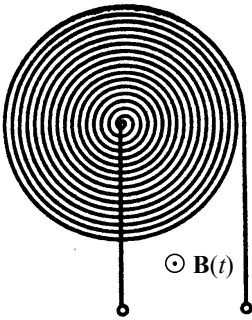


Рис. 8.8. К расчету ЭДС индукции в спирали (задача 8.3.8)

$$\mathbf{E} = \{E_r; E_\varphi\} = \{0; -\frac{1}{2} r \dot{B}\}.$$

Уравнение спирали с  $N$  витками в полярных координатах имеет вид

$$r(\varphi) = a\varphi,$$

где  $a = \frac{R}{2\pi N}$ . Учитывая, что дифференциал дуги в полярных координатах имеет вид  $d\mathbf{l} = \{dr; r d\varphi\}$ , найдем приращение ЭДС на элементе дуги спирали

$$d\mathcal{E} = \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{2} r \dot{B} r d\varphi = -\frac{1}{2} \dot{B} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Интегрируя  $d\mathcal{E}$  по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $2\pi N$ , получаем ЭДС для всей спирали

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} \dot{B} \int_0^{2\pi N} r^2 d\varphi = -\frac{1}{2} \dot{B} \int_0^{2\pi N} (a\varphi)^2 d\varphi = -\frac{1}{2} \dot{B} \left( \frac{R}{2\pi N} \right)^2 \frac{(2\pi N)^3}{3} = -\frac{1}{3} \pi N R^2 \dot{B}$$

Окончательно,  $\mathcal{E} = \frac{1}{3} \pi N R^2 B_0 \omega \sin \omega t$ .

**Способ 2.** Поскольку по условию число витков  $N$  велико, шаг спирали мал и ее каждый виток близок к окружности. ЭДС в  $i$ -ом круговом витке  $\mathcal{E}_i = -\dot{\Phi}_i = -\pi r_i^2 \dot{B}$ , где  $r_i^2$  – средний квадрат радиуса  $i$ -ого витка. Полная ЭДС получится суммированием по виткам, которое ввиду малости шага спирали  $\Delta r$  ( $\Delta r = \frac{R}{N}$ ) можно свести к интегрированию:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i = -\pi \dot{B} \sum_{i=1}^N r_i^2 = -\frac{\pi}{\Delta r} \dot{B} \sum_{i=1}^N r_i^2 \Delta r \cong -\frac{\pi}{\Delta r} \dot{B} \int_0^R r_i^2 dr = \\ &= -\frac{\pi}{R/N} \dot{B} \frac{R^3}{3} = -\frac{1}{3} \pi N R^2 \dot{B}, \end{aligned}$$

что приводит к тому же результату.

**Ответ:**  $\mathcal{E} = \frac{1}{3} \pi N R^2 B_0 \omega \sin \omega t$ .

**Задача 8.3.9.** По двум параллельным бесконечным плоскостям текут одинаковые по модулю противоположно направленные токи с поверхностной плотностью, меняющейся во времени по закону  $i(t) = \alpha t$ . Найти вихревое электрическое поле между плоскостями.

### Решение

Выберем систему координат  $xuz$ , как показано на рис.8.9. В пространстве между плоскостями магнитное поле однородно, снаружи равно нулю. Вектор индукции  $\mathbf{B}$  перпендикулярен направлению токов и равен  $B = \mu_0 i$  (глава 7, задача 7.3.8).

Направление силовых линий вихревого электрического поля можно найти из следующих соображений. В силу симметрии системы относительно центральной плоскости силовые линии должны быть параллельны плоскостям и по модулю симметричны относительно центральной плоскости. Действительно, присутствие перпендикулярной  $x$ -компоненты в этом случае привело бы к нарушению условия  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ . Далее, наличие у поля  $y$ -компоненты нарушило бы эквивалентность обоих направлений по этой оси. Таким образом, возможно существование только компоненты  $E_z$ . Направление векторов  $\mathbf{E}$  вдоль оси  $oz$  можно определить по правилу Ленца, поскольку они должны быть антипараллельны направлению поверхностных токов  $\mathbf{i}$  на верхней и нижней плоскости. Картина силовых линий представлена пунктиром на рис. 8.9.

Для нахождения  $E_z(x)$  проведем прямоугольный контур со сторонами  $l$  и  $2x$  симметрично относительно центральной плоскости. ЭДС на этом контуре, равная циркуляции вектора  $\mathbf{E}$ , при указанном стрелками направлении обхода равна  $\mathcal{E} = -2El$ . Учитывая, что положительное направление нормали к контуру параллельно  $\mathbf{B}$ , магнитный поток через контур  $\Phi(t) = +2xl \cdot B(t)$ , откуда для ЭДС согласно (8.2) можно записать  $\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = -2xl \dot{B}$ . Приравняв оба выражения для ЭДС, получаем  $E(x) = E_z(x) = x\dot{B} = \mu_0 \alpha x$ .

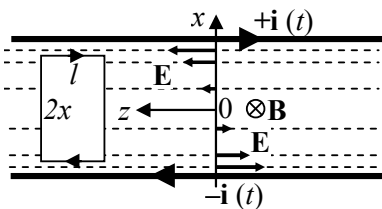


Рис. 8.9. К расчету вихревого электрического поля между плоскостями с током (задача 8.3.9)



**Ответ:**  $E = E_z(x) = \mu_0 \alpha x$ , где  $x$  – координата по оси, перпендикулярной к плоскостям с началом посередине между ними.

**Задача 8.3.10.** На поверхности длинного сплошного непроводящего цилиндра радиуса  $a$  равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Цилиндр может вращаться без трения вокруг своей оси. Внешнее однородное магнитное поле с вектором индукции  $\mathbf{B}$  направлено вдоль оси цилиндра. Найти угловую скорость вращения  $\omega$ , которую приобретет цилиндр после выключения магнитного поля. Плотность вещества цилиндра  $\rho$ , первоначально цилиндр неподвижен.

**Решение**

Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$  с осью  $Z$ , совпадающей с осью цилиндра и параллельной полю  $\mathbf{B}$ . Во время выключения магнитного поля возникает вихревое электрическое поле  $\mathbf{E}$  (задача 8.3.7) силовые линии которого ввиду аксиальной симметрии задачи являются окружностями с центром на оси цилиндра (пунктир на рис. 8.10). Это поле будет действовать на поверхностные заряды цилиндра, вызывая его ускорение.

Поскольку заряды находятся на поверхности цилиндра, найдем напряженность при  $r = a$ . В контуре  $r = a$  возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = 2\pi a E, \text{ откуда}$$

$$E(a) = -\dot{\Phi} / (2\pi a)$$

где  $\Phi$  – магнитный поток через поперечное сечение цилиндра. Здесь положительное направление обхода было выбрано против часовой стрелки, положительная нормаль параллельна  $\mathbf{B}$ .

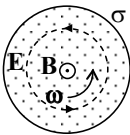


Рис. 8.10. Направление силовых линий вихревого электрического поля и направление вращения заряженного цилиндра (задача 8.3.10)

Рассмотрим элемент заряда  $dq = \sigma dS$  на поверхности цилиндра. Со стороны возникшего электрического поля на него будет действовать сила  $dF = Edq$ . Эта сила, в свою очередь, вызывает вращающий момент, направленный по оси цилиндра  $Z$  и равный

$$dM_z = adF = aE\sigma dS = -\frac{\dot{\Phi}}{2\pi} \sigma dS.$$

Полный вращающий момент получается интегрированием по поверхности цилиндра, что в данном случае сводится просто к умножению на площадь его боковой поверхности  $2\pi ab$ , где  $b$  – длина цилиндра:

$$M_z = aE\sigma \cdot 2\pi ab = -\frac{\dot{\Phi}}{2\pi} \sigma 2\pi ab = -\sigma ab \dot{\Phi}.$$

Учитывая, что момент инерции цилиндра относительно его оси равен

$$J = \frac{1}{2} ma^2 = \frac{1}{2} \rho \pi a^4 b,$$

найдем его угловое ускорение

$$\dot{\omega}_z = \frac{\dot{M}_z}{J} = -\frac{\sigma ab \dot{\Phi}}{\frac{1}{2} \rho \pi a^4 b} = -\frac{2\sigma}{\rho \pi a^3} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Интегрируя это соотношение по времени и учитывая, что  $\Phi(0) = \pi a^2 B$  и  $\Phi(\infty) = 0$ , окончательно получаем

$$\omega_z = -\frac{2\sigma}{\rho \pi a^3} (\Phi(\infty) - \Phi(0)) = \frac{2\sigma}{\rho \pi a^3} \pi a^2 B = \frac{2\sigma}{\rho a} B.$$

**Ответ:**  $\omega = \frac{2\sigma}{\rho a} B.$

### Задачи типа 8.5

*Нахождение индуктивности контуров, состоящих из линейных проводников*

**Метод решения.** Индуктивность целесообразно находить непосредственно из ее определения по формуле (8.6), проводя контур по линейным проводникам.

**Задача 8.3.10 (базовая задача).** Найти индуктивность длинного тонкого цилиндрического соленоида, имеющего  $N$  витков, длину  $l$  и радиус  $a$  ( $l \gg a$ ).

**Решение**

Величина вектора индукции магнитного поля в длинном соленоиде была найдена в главе 7 (задача 7.3.9) и равна  $B = \mu_0 n I$ , где

$n = \frac{N}{l}$  – плотность намотки. Поскольку магнитное поле однородно, поток вектора  $\mathbf{B}$  через один виток будет равен  $\Phi_1 = BS = \mu_0 nIS$ , где  $S = \pi a^2$  – площадь витка. Полный поток через все  $N$  витков равен  $\Phi = N\Phi_1 = \mu_0 \frac{N^2}{l} IS$ . Отсюда по определению индуктивности (8.6) получаем

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu_0 n^2 V,$$

где  $V = Sl = \pi a^2 l$  – объем соленоида.

**Ответ:**  $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu_0 n^2 V$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения,  $V$  – объем соленоида.

**Задача 8.3.11.** Найти индуктивность тороидальной катушки прямоугольного сечения, имеющей  $N$  витков, внутренний радиус которой равен  $a$ , внешний  $b$  и высота  $h$  (рис. 8.11).

**Решение**

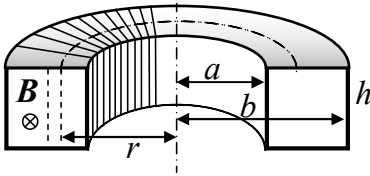


Рис. 8.11. К расчету индуктивности тороидальной катушки (задача 8.3.11)

Ввиду осевой симметрии силовые линии внутри тора являются концентрическими окружностями с центром на его оси. Модуль вектора индукции найдем по теореме о циркуляции вектора  $\mathbf{B}$  (глава 7, (7.9))

$$B(r) = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r}.$$

Магнитный поток через один виток равен потоку через поперечное сечение тора  $\sigma$ :

$$\Phi_1 = \int_{\sigma} B dS = \int_a^b \mu_0 \frac{NI}{2\pi r} h \cdot dr = \frac{\mu_0}{2\pi} NIh \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} NIh \ln \frac{b}{a},$$

где учтено, что  $dS = h dr$ . Полный магнитный поток через обмотку с  $N$  витками

$$\Phi = N\Phi_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 Ih \ln \frac{b}{a} = LI,$$

Откуда получаем  $L = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \ln \frac{b}{a}$ .

**Ответ:**  $L = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \ln \frac{b}{a}$ .

### Задачи типа 8.6

*Расчет индуктивности проводников с пространственно распределенными токами*

**Метод решения.** В задачах этой группы прямое использование определения индуктивности (8.6) бывает затруднительно, поскольку не очевидно, как в пространственном проводнике выделить контур для расчета потока. Поэтому целесообразно использовать связь индуктивности с энергией контура (8.7), при этом магнитная энергия  $W$  должна быть найдена независимым образом из плотности энергии магнитного поля (9.10). Таким образом, индуктивность рассчитывается из соотношения

$$W = \int_V \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} dV = \frac{1}{2} LI^2.$$

**Задача 8.3.12 (базовая задача).** Найти индуктивность  $L'$  единицы длины двухпроводной ленточной линии, если расстояние между лентами  $h$  значительно меньше их ширины  $b$  (рис. 8.12)

#### Решение

Пусть вдоль лент текут токи силы  $I$  в противоположных направлениях (рис. 8.12). Поскольку  $h \ll b$ , магнитное поле вдали от краев лент можно рассматривать как поле от двух бесконечных плоскостей. Его вектор напряженности перпендикулярен направлению тока и имеет индукцию

$$B = \mu_0 i = \mu_0 \frac{I}{b},$$

где  $i$  – поверхностная плотность тока (глава 7, задача 7.3.8). Ввиду того, что токи распределены по плоскостям, выделение контура для

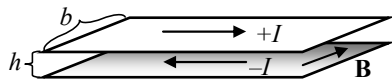


Рис. 8.12. К расчету индуктивности ленточной линии (задача 8.3.12)

расчета магнитного потока здесь не очевидно, но индуктивность легко определить из энергетического подхода. Плотность энергии магнитного поля в пространстве между лентами равна

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{I}{b}\right)^2.$$

Рассмотрим отрезок линии длины  $l$  и объема  $V = bhl$ . Энергия магнитного поля внутри него

$$W(l) = w \cdot V = \frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{I}{b}\right)^2 bhl = \frac{1}{2}LI^2.$$

Отсюда получаем  $L(l) = \mu_0 l \frac{h}{b}$  и  $L' = \frac{L}{l} = \mu_0 \frac{h}{b}$ .

**Ответ:**  $L' = \mu_0 \frac{h}{b}$ .

**Задача 8.3.13.** Коаксиальный кабель состоит из сплошного внутреннего проводника радиуса  $a$  и тонкого внешнего цилиндрического проводника радиуса  $b$ . Найти индуктивность единицы длины кабеля. Считать, что магнитная проницаемость материала проводников и зазора между ними  $\mu = 1$ , ток распределен по проводникам равномерно.

### Решение

Пусть по проводникам текут токи силы  $I$  в противоположных направлениях (рис. 8.13). Поскольку суммарный ток равен нулю, вне кабеля магнитное поле отсутствует.

Внешний проводник кабеля поля внутри себя не создает (задача 7.3.10). Магнитное поле в области  $r < b$  создается только внутренним проводником.

Величина индукции магнитного поля внутри центрального цилиндрического проводника ( $r < a$ ) с однородной плотностью тока равна

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r$ , а снаружи ( $a < r < b$ ) составляет  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  (гл. 7, задача

7.3.11).

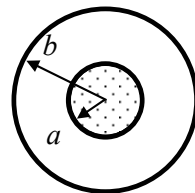


Рис. 8.13. К расчету индуктивности коаксиального кабеля (задача 8.3.13)

Найдем магнитную энергию, приходящуюся на длину  $l$  кабеля. Учитывая, что плотность энергии магнитного поля составляет  $w = B^2/(2\mu_0)$ , можно записать

$$r < a: \quad W_1 = \int_V w dV = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \right)^2 \int_0^a r^2 l 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{16\pi} I^2 l.$$

$$r > a: \quad W_2 = \int_V w dV = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \int_a^b \frac{1}{r^2} l 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 l \ln \frac{b}{a}$$

$$\text{Полная энергия: } W_1 + W_2 = \frac{\mu_0}{16\pi} I^2 l \left( 1 + 4 \ln \frac{b}{a} \right) = \frac{1}{2} L I^2 l.$$

$$\text{Отсюда получаем } L(l) = \frac{\mu_0}{8\pi} l \left( 1 + 4 \ln \frac{b}{a} \right) \text{ и } L' = \frac{L(l)}{l} = \frac{\mu_0}{8\pi} \left( 1 + 4 \ln \frac{b}{a} \right).$$

$$\text{Ответ: } L' = \frac{\mu_0}{8\pi} \left( 1 + 4 \ln \frac{b}{a} \right).$$

### Задачи типа 8.7

*Определение коэффициентов взаимной индукции линейных контуров*

**Метод решения.** При расчете коэффициента взаимной индукции основной является формула (8.8). Очень полезным бывает учет равенства коэффициентов взаимной индукции, поскольку расчет одного из коэффициентов  $L_{ji}$  или  $L_{ij}$  часто бывает намного проще, чем другого.

**Задача 8.3.14 (базовая задача).** Найти общую индуктивность системы из двух последовательно соединенных катушек в вакууме, имеющими индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  и коэффициент взаимной индукции  $L_{12}$ .

#### Решение

При последовательном соединении ток в обеих катушках одинаков. Суммарный магнитный поток, пронизывающий обе катушки,

$$\Phi(I) = \Phi_1 + \Phi_2 = (L_1 I_1 + L_{12} I_2) + (L_2 I_2 + L_{21} I_1) = (L_1 + 2L_{12} + L_2) I,$$

где учтено, что  $L_{12} = L_{21}$ . Отсюда получаем

$$L = \frac{\Phi}{I} = L_1 + 2L_{12} + L_2.$$

**Ответ:**  $L = L_1 + 2L_{12} + L_2$ .

*Замечание:* Коэффициент взаимной индукции  $L_{12}$  может быть и положительным, и отрицательным в зависимости от взаимной ориентации и полярности подключения катушек, в то время как коэффициент самоиндукции  $L$  всегда положителен.

**Задача 8.3.15 (базовая задача).** Замкнутая катушка в виде тора прямоугольного сечения (без сердечника) имеет  $N$  витков. В нее продето проволочное кольцо, в котором источником переменной ЭДС создается ток  $I = I_0 \cos \omega t$  (рис. 8.14).

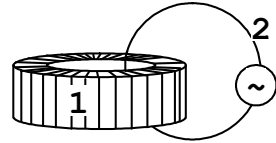


Рис. 8.14. Взаимное расположение связанных контуров (задача 8.3.15)

Найти ЭДС индукции, наводимой в обмотке тора. Внутренний радиус тороидальной катушки  $a$ , внешний –  $b$ , высота  $h$ .

**Решение**

Для нахождения ЭДС в катушке-торе (контур 1) требуется знать коэффициент взаимной индукции  $L_{12}$ . Рассчитать его трудно, поскольку для этого надо знать пространственное распределение магнитного поля кольца (контур 2) во всем объеме, занимаемом тором. Однако обратный коэффициент  $L_{21}$  рассчитывается элементарно.

Пусть по тороидальной катушке идет ток  $I_1$ . Кольцо пронизывает магнитный поток, который локализован только в сечении тора и был рассчитан выше в задаче 8.3.11:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} NI_1 h \ln \frac{b}{a} = L_{21} I_1$$

Отсюда получаем

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} Nh \ln \frac{b}{a}.$$

Тогда ЭДС, наводимая в тороидальной катушке, будет

$$\mathcal{E}_1 = -\dot{\Phi}_{12} = -L_{12} \dot{I}_2 = -L_{21} \dot{I}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} Nh \ln \frac{b}{a} \cdot I_0 \omega \sin \omega t.$$

**Ответ:**  $\mathcal{E}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} Nh \ln \frac{b}{a} \cdot I_0 \omega \sin \omega t.$

*Замечание.* Здесь был рассчитан магнитный поток через перпендикулярное сечение тора, но величина потока не зависит от ориентации плоскости сечения, т.е. не зависит от ориентации кольца относительно тороида. Результат будет тот же и для петли любой формы, в том числе и не плоской, лишь бы она охватывала тороид.

**Задача 8.3.16.** В центр сверхпроводящего кольца индуктивности  $L$  и радиуса  $a$  внесен магнитный диполь с дипольным моментом  $\mathbf{p}_m$ , направленным по оси кольца (рис. 8.15). Какой ток  $I$  установится в кольце?

### Решение

Магнитный диполь можно представить как малую петлю (контур 1) с площадью  $S$  и таким током  $I_1$ , чтобы выполнялось условие  $p_m = I_1 S$ .

Закон Ома для кольца

$$IR = \mathcal{E} = -\dot{\Phi}$$

при  $R \rightarrow 0$  приводит к условию  $\dot{\Phi} = 0$ , т.е. в сверхпроводящем контуре магнитный поток "заморожен" ( $\Phi = \text{const}$ ). Поскольку первоначально он равнялся нулю, это значение не изменится и после внесения диполя.

Когда диполь будет в центре кольца, магнитный поток  $\Phi_2$  через кольцо (контур 2) будет создаваться током самого кольца  $I$  и магнитным полем, создаваемым петлей-диполем с током  $I_1$ :

$$\Phi_2 = LI + L_{21}I_1 = 0.$$

Здесь положительная нормаль выбрана параллельно направлению вектора  $\mathbf{p}_m$ , а положительное направление обхода кольца – по часовой стрелке, если смотреть вдоль  $\mathbf{p}_m$ .

Чтобы найти отсюда  $I$ , нужно знать коэффициент взаимной индукции контуров  $L_{21}$ , но в данном случае гораздо проще рассчитать равный ему коэффициент  $L_{12}$  следующим образом.

Пусть по кольцу идет ток  $I_2$ . Тогда в центре кольца будет поле с индукцией

$$B = \frac{\mu_0 I_2}{2a}.$$

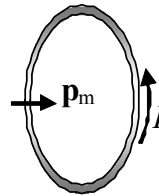


Рис. 8.15. К расчету индукционного тока в кольце (задача 8.3.16)



(глава 7, задача 7.3.3). Поскольку петля диполя очень мала, поле  $B$  на ее площади почти однородно и поток через нее

$$\Phi \cong BS = \frac{\mu_0 I_2}{2a} S = L_{12} I_2,$$

откуда 
$$L_{12} = \frac{\mu_0 S}{2a} = L_{21}.$$

Подставляя это выражение в приведенное выше условие равенства нулю полного потока, получаем

$$I = -I_1 \frac{L_{21}}{L} = -\mu_0 \frac{I_1 S}{2La} = -\mu_0 \frac{P_m}{2La}.$$

**Ответ:**  $I = -\mu_0 \frac{P_m}{2La}$ . Знак минус означает, что индукционный ток в кольце направлен против часовой стрелки, т.е. его магнитный момент противоположен вектору магнитного момента диполя.

### § 8.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 8.4.1.** На расстояниях  $a$  и  $b$  от длинного прямого проводника с постоянным током  $I_0$  расположены два параллельных ему провода, замкнутых на одном конце сопротивлением  $R$ . По проводам без трения перемещают перемычку с постоянной скоростью  $v$  (рис. 8.16). Пренебрегая сопротивлением всех проводов и индуктивностью контура, найти силу, необходимую для поддержания постоянства скорости.

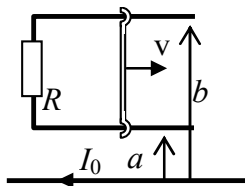


Рис. 8.16. Взаимное расположение провода с током  $I_0$  и контура с подвижной перемычкой (задача 8.4.1)

**Ответ:** 
$$F = \left( \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right)^2 \frac{v}{R}.$$

**Задача 8.4.2.** Найти как функцию времени тепло  $Q(t)$ , выделившееся на сопротивлении  $R$  от момента, когда перемычка начала двигаться с ускорением  $a$  (рис. 8.17). Магнитное поле  $\mathbf{B}$  однородно и перпендикулярно к плоскости проводников, сопротивлением всех проводников и индуктивностью контура пренебречь, длина перемычки  $l$ .

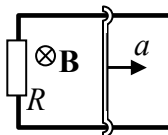


Рис. 8.17. Схема контура с подвижной перемычкой (задача 8.4.2)

**Ответ:**  $Q = \frac{1}{3R} (Bla)^2 t^3$ .

**Задача 8.4.3.** Квадратная проволочная рамка  $ACDE$  со стороной  $l$  помещена в магнитное поле с вектором индукции  $\mathbf{B}$ , направленным перпендикулярно плоскости рамки (рис. 8.18). По рамке с постоянной скоростью  $v$  скользит перемычка  $MN$ , сделанная из той же проволоки. Найти разность потенциалов точек  $C$  и  $D$  в момент, когда перемычка находится 1) посередине; 2) у правого края. Индуктивностью контура пренебречь.

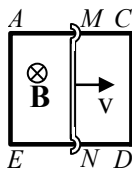


Рис. 8.18. Схема контура с подвижной перемычкой (задача 8.4.3)

**Ответ:** 1)  $\varphi_C - \varphi_D = \frac{1}{4} Blv$ ; 2)  $\varphi_C - \varphi_D = \frac{3}{7} Blv$ .

**Задача 8.4.4.** Проводящая лента ширины  $l$  протягивается со скоростью  $v$  в магнитном поле  $\mathbf{B}$ , направленном перпендикулярно ее плоскости. Найти ЭДС между краями ленты.

**Ответ:**  $\mathcal{E} = Blv$ .

**Задача 8.4.5.** Металлический стержень массы  $m$  и длины  $a$  подвешен горизонтально на двух проводах длины  $l$  к которым подключен конденсатор емкости  $C$ . Система находится в магнитном поле с индукцией, направленной вертикально вниз (рис. 8.19).

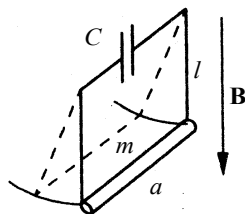


Рис. 8.19. К расчету периода колебаний стержня, подвешенного в магнитном поле (задача 8.4.5)

Определить период малых колебаний стержня. Сопротивлением проводов и стержня пренебречь.

**Ответ:**  $T = 2\pi \sqrt{\frac{(m + CB^2 a^2) l}{mg}}$ .

**Задача 8.4.6.** П-образный проводник с перемычкой длины  $l$  (рис. 8.20) находится в однородном магнитном поле с вектором индукции  $\mathbf{B}$ , который перпендикулярен к плоскости проводника и изменяется во

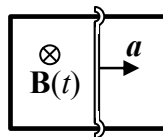


Рис. 8.20. Схема контура с подвижной перемычкой (задача 8.4.6)

времени по закону  $B = \beta t$ . В момент времени  $t = 0$  переключку, находящуюся в крайнем левом положении, начинают перемещать без начальной скорости с ускорением  $a$ . Найти ЭДС индукции в проводнике  $\mathcal{E}(t)$  в зависимости от времени.

**Ответ:**  $\mathcal{E}(t) = \frac{3}{2} a l \beta t^2$ .

**Задача 8.4.7.** По двум тонким параллельным проводникам, замкнутым на сопротивление  $R$ , в момент времени  $t = 0$  начинают перемещать переключку с постоянным ускорением  $a$  (рис. 8.21). Система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен к плоскости проводников и изменяется по закону  $B(t) = B_0 + \beta t$ . Начальная площадь контура  $S$ , длина переключки  $l$ . Найти силу тока в цепи.

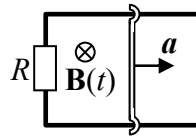


Рис. 8.21. Схема контура с подвижной переключкой (задача 8.4.7)

**Ответ:**  $I(t) = \frac{1}{R} [(B_0 + \beta t) l a t + \beta (S + l a t^2 / 2)]$ .

*Замечание.* Первое слагаемое обусловлено ЭДС в движущейся переключке, возникающей за счет магнитной силы Лоренца, второе – вихревым электрическим полем.

**Задача 8.4.8.** В магнитном поле с большой высоты падает кольцо радиуса  $a$  и массы  $m$ , так, что плоскость кольца всегда горизонтальна. Найти установившуюся скорость падения  $v$ , если вертикальная составляющая индукции поля зависит от высоты  $h$  как  $B(h) = B_0(1 + \alpha h)$ . Ускорение свободного падения  $g$ , сопротивление кольца  $R$ , индуктивностью пренебречь.

*Указание:* целесообразно использовать энергетический подход.

**Ответ:**  $v = \frac{mgR}{(B_0 \pi a^2 \alpha)^2}$ .

**Задача 8.4.9.** На длинный соленоид, через который проходит переменный ток  $I(t) = I_0 \cos \omega t$ , надет тор из диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$  (рис. 8.22). В торе имеется очень тонкий поперечный зазор. Найти напряженность электрического поля  $E$  в зазоре в зави-

симости от расстояния  $r$  от оси соленоида. Радиус соленоида  $a$ , длина  $l$ , число витков  $N$ .

**Ответ:** 
$$E(r) = \varepsilon \frac{\mu_0 N I a^2 \omega}{2lr} \sin \omega t .$$

Для тока и линий поля  $\mathbf{E}$  положительным считается направление против часовой стрелки.

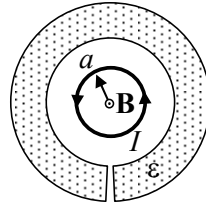


Рис.8.22. Поперечное сечение соленоида и диэлектрического тора (задача 8.4.9)

**Задача 8.4.10.** Непроводящее тонкое кольцо с невесомой ступицей надето на ось, вокруг которой может свободно вращаться. Кольцо заряжено по периметру зарядом  $q$ . В начальный момент оно покоилось, затем включили однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости кольца, индукция которого стала возрастать по некоторому закону  $B(t)$ . Найти угловую скорость кольца  $\omega(B)$  в зависимости от индукции поля. Считать, что вся масса  $m$  сосредоточена в кольце.

**Ответ:** 
$$\omega(B) = -\frac{q}{2m} \mathbf{B}(t) .$$

*Указание.* Решить задачу двумя способами:

1. динамическим, найдя момент сил, действующих на кольцо со стороны вихревого электрического поля;
2. энергетическим, учитывая, что энергия кольца в магнитном поле

$$W = \frac{1}{2} \Phi I .$$

**Задача 8.4.11.** Замкнутая катушка в виде тонкого тора среднего радиуса  $a$  имеет  $N$  витков. Сечение тора – круг площади  $S$  ( $a \gg S^{1/2}$ ). Найти индуктивность этой катушки.

**Ответ:** 
$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{2\pi a} = \mu_0 n^2 V , \text{ где } V = 2\pi a \cdot S - \text{объем тора, } n -$$

плотность катушки.

*Замечание.* Ввиду большого радиуса тора по сравнению с размером поперечного сечения его обмотки, его индуктивность совпадает с индуктивностью длинного соленоида, полученной в пренебрежении краевыми эффектами на его торцах.

**Задача 8.4.12.** Круговой виток радиуса  $a$  с собственной индуктивностью  $L$  установлен на расстоянии  $l$  от бесконечной сверхпроводящей плоскости (плоскость витка параллельна сверхпроводящей поверхности). Считая, что  $l \gg a$ , найти индуктивность  $L'$  витка в данных условиях.

*Указание:* использовать дипольное приближение, учитывая, что на поверхности сверхпроводника нормальная компонента вектора магнитной индукции  $B_n = 0$ . По аналогии с электростатикой применить метод изображений, т.е. ввести фиктивные источники поля, обеспечивающие выполнение граничных условий.

$$\text{Ответ: } L' = L - \frac{\mu_0 a^4}{16l^3}.$$

**Задача 8.4.13.** Найти индуктивность длинного соленоида, имеющего  $N$  витков, радиус  $r$  и длину  $l$ , который помещен внутри длинной сверхпроводящей трубы радиуса  $R$  вдали от ее торцов параллельно ее оси.

$$\text{Ответ: } L = \mu_0 \pi r^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{N^2}{l}.$$

**Задача 8.4.14.** Найти индуктивность  $L'$  единицы длины двухпроводной линии в вакууме. Радиус проводов равен  $a$ , расстояние между их осями  $b$ , магнитная проницаемость проводов  $\mu = 1$ . Считать, что  $b \gg a$ , магнитным полем внутри проводов пренебречь.

$$\text{Ответ: } L' = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a} - 1\right) \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

*Замечание.* Точное решение с учетом поля внутри проводов дает  $L' = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4}\right)$  (см. [5], §34, задача 4).

**Задача 8.4.15.** Найти индуктивность  $L'$  единицы длины тонкого коаксиального кабеля. Внутренний и внешний проводник считать коаксиальными тонкими цилиндрическими трубами радиусов  $a$  и  $b$  соответственно.

$$\text{Ответ: } L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

**Задача 8.4.16.** Найти индуктивность системы из двух соединенных последовательно длинных соленоидов, один из которых вставлен внутрь другого. Внутренний соленоид имеет длину  $l_1$ , радиус  $r_1$  и плотность намотки  $n_1$ , внешний –  $l_2$ ,  $r_2$  и  $n_2$  соответственно ( $l_2 > l_1$ ,  $r_2 > r_1$ ). Рассмотреть два случая, когда направления токов в витках обоих соленоидов одинаковы и противоположны.

**Ответ:**  $L = \mu_0 \pi (r_1^2 l_1 n_1^2 + r_2^2 l_2 n_2^2 \pm 2 n_1 n_2 r_1^2 l_1)$ . Знак плюс при одинаковом направлении токов.

**Задача 8.4.17.** Две катушки одинаковой длины с индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  соответственно, плотно вставлены одна в другую до полного совмещения концов (радиусы катушек считаются равными). Найти их коэффициент взаимной индукции  $L_{12}$  и общую индуктивность  $L$  при последовательном соединении катушек. Рассмотреть два случая, когда направления токов в витках обеих катушек 1) одинаковы 2) противоположны.

**Ответ:**  $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$ ,  $L = (\sqrt{L_1} \pm \sqrt{L_2})^2$ . Знак плюс соответствует одинаковому направлению токов.

**Задача 8.4.18.** Длинный соленоид окружен витком провода, в котором поддерживается ток  $I = I_0 \cos \omega t$  подключенным к нему источником переменного тока (рис. 8.23). Найти ЭДС индукции, наводимой в соленоиде. Длина соленоида  $l$ , радиус  $a$ , число витков  $N$ .

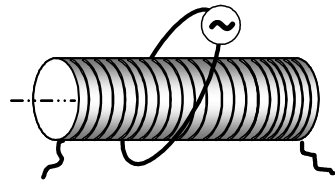


Рис. 8.23. К расчету ЭДС в соленоиде (задача 8.4.18)

**Ответ:**  $\mathcal{E} = \mu_0 \frac{N}{l} \pi a^2 I_0 \omega \sin \omega t$ . Результат не зависит от наклона и формы витка.

**Задача 8.4.19.** Квадратная рамка со стороной  $a$  лежит в одной плоскости с прямолинейным длинным проводом (рис. 8.24). Ближайшая сторона рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстояние  $b$ . В рамке источником переменной ЭДС создается ток  $I = I_0 \sin \omega t$ . Найти ЭДС индукции  $\mathcal{E}(t)$ , наводимой в проводе.

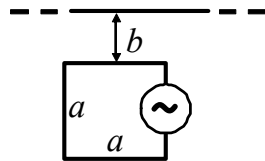


Рис. 8.24. Взаимное расположение рамки и прямолинейного провода (задача 8.4.19)

**Ответ:**  $\mathcal{E} = -\frac{\mu_0}{2\pi} a \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \omega I_0 \cos \omega t.$

**Задача 8.4.20.** Точечный магнитный диполь пролетает насквозь через соленоид вдоль его оси. Магнитный момент диполя направлен параллельно его скорости. Соленоид через идеальный выпрямляющий элемент подключен к баллистическому гальванометру, измеряющему, таким образом, сумму модулей протекших зарядов. Найти магнитный момент диполя  $p_m$ , если гальванометр показал заряд  $q$ . Соленоид имеет  $N$  витков, длина его  $l$ , общее сопротивление соленоида и измерительной цепи  $R$ .

**Ответ:**  $p_m = \frac{qRl}{2\mu_0 N}.$

**Задача 8.4.21.** По оси кругового витка радиуса  $a$  на расстоянии  $l$  от его центра ( $l \gg a$ ) движется со скоростью  $v$  точечный магнитный диполь с дипольным моментом  $\mathbf{p}_m$ , ориентированным параллельно вектору скорости. Оценить силу тока в витке, если его сопротивление равно  $R$ , а индуктивностью можно пренебречь.

**Ответ:**  $I = \frac{3}{2} \frac{\mu_0 p_m v}{R} \frac{a^2 l}{(a^2 + l^2)^{5/2}} \approx \frac{3\mu_0 p_m a^2 v}{2Rl^4}.$

### Литература к главе 8

1. *Матвеев А.Н.* Электричество и магнетизм. –М.: Оникс 21 век, 2005, §§ 44-47.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. т.III Электричество. –М.: Физматлит, 2006, §§ 64-71.
3. *Калашиников С.Г.* Электричество. –М.: Физматлит, 2003, §§ 89-99.
4. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Физматлит, 2003, §§ 76-81.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2001.

## Глава 9

## ЭНЕРГИЯ И СИЛЫ В МАГНИТОСТАТИКЕ

## § 9.1. Теоретический материал

**Закон Ампера** – сила, действующая на элемент  $d\mathbf{l}$  проводника с током  $I$ , помещенный в магнитное поле индукции  $\mathbf{B}$ , равна

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}\mathbf{B}]. \quad (9.1)$$

**Сила, действующая на точечный диполь с магнитным моментом  $\mathbf{p}_m$  во внешнем поле  $\mathbf{B}$**  ([2], §56)

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \nabla)\mathbf{B} = \nabla(\mathbf{p}_m \mathbf{B}) = \left( p_{mx} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) + \left( p_{my} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) + \left( p_{mz} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right). \quad (9.2)$$

**Момент сил, действующий на магнитный диполь в поле  $\mathbf{B}$**

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]. \quad (9.3)$$

**Энергия магнитного диполя во внешнем поле  $\mathbf{B}$**

$$W = -(\mathbf{p}_m \mathbf{B}). \quad (9.4)$$

**Энергия магнитного поля, создаваемого линейным контуром с индуктивностью  $L$  и током  $I$**

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} I\Phi. \quad (9.5)$$

где  $\Phi$  – магнитный поток через контур.

**Энергия магнитного поля, создаваемого двумя контурами с токами  $I_1$  и  $I_2$**

$$W_{12} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 I_2, \quad (9.6)$$

где  $L_1$  – индуктивность первого контура,  $L_2$  – индуктивность второго контура,  $L_{12}$  – коэффициент их взаимной индукции. Энергия не является аддитивной величиной, так как в выражении для энергии присутствует слагаемое  $L_{12} I_1 I_2$  – энергия взаимодействия контуров.

**Механическая работа** при бесконечно малом изменении конфигурации системы проводников с токами в магнитном поле



$$\delta A_{\text{стор}} = \sum_i I_i d\Phi_i = dW + \delta A, \quad (9.7)$$

где  $\delta A_{\text{стор}} = \sum_i I_i d\Phi_i$  – приращение работы сторонних сил (ЭДС источников тока), совершаемая против ЭДС электромагнитной индукции в  $i$ -контуре,  $dW$  – изменение магнитной энергии системы и  $\delta A$  – механическая работа пондеромоторных сил при бесконечно малом изменении конфигурации системы.

Для двух частных случаев, когда либо 1) не изменяется магнитный поток через проводники системы ( $\Phi_i = \text{const}$ ), либо 2) постоянен ток, текущий в проводниках ( $I_i = \text{const}$ ), выражение (9.7) соответственно, сводится к следующим: ([1], § 47)

$$\delta A = -\delta W \Big|_{\Phi_i = \text{const}}. \quad (9.8)$$

$$\delta A = +\delta W \Big|_{I_i = \text{const}}. \quad (9.8')$$

(сравните с аналогичными соотношениями для электростатического поля (5.6) и (5.8)). В первом случае механическая работа совершается за счет убыли магнитной энергии системы. Во втором случае механическая работа и сопутствующее ей и равное по величине возрастание энергии магнитного поля происходит за счет работы источников ЭДС, поддерживающих постоянство силы тока.

Соотношения (9.8), (9.8') удобно использовать для нахождения пондеромоторных сил. Разумеется, оба варианта описывают работу одной и той же силы, величина которой определяется только величиной и взаимным расположением протекающих токов и не зависит от выбранного варианта расчета.

### **Объёмная плотность энергии магнитного поля в вакууме**

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (9.9)$$

### **Энергия магнитного поля в вакууме**

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV, \quad (9.10)$$

где  $V$  – область пространства, где существует магнитное поле.

**Давление, оказываемое на границу раздела двух областей,** объемные плотности энергии магнитного поля в которых соответственно равны  $w_1$  и  $w_2$

$$p = w_1 - w_2. \quad (9.11)$$

**Сила Лоренца** – полная сила, действующая со стороны электромагнитного поля на движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$  заряд

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (9.12)$$

В выражение для силы Лоренца входят два слагаемых, первое из которых описывает взаимодействие заряда  $q$  с электрическим полем, а второе – с магнитным.

## § 9.2. Основные типы задач (классификация)

9.1. Определение энергии магнитного поля и магнитных сил в системах безграничных проводников с линейным, поверхностным или объёмным током. Взаимодействие движущегося заряда с магнитным полем.

9.2. Определение энергии магнитного поля и магнитных сил, действующих на проводники с током, ограниченные в пространстве.

9.3. Определение вращающего момента и сил, действующих на проводник с током и магнитный диполь во внешнем магнитном поле.

## § 9.3. Методы решения и примеры решения задач

Для решения задач этой главы необходимо хорошо владеть методами определения направления и величины индукции магнитного поля, создаваемого различными распределениями токов. Таким образом, базовыми оказываются задачи, рассмотренные ранее в главе 7 (магнитное поле стационарного тока в вакууме). Так как силы и моменты сил являются векторными величинами, то особое внимание следует уделить качественному анализу задачи. При этом необходимо, прежде всего, определить симметрию предложенной системы проводников, величину и направление векторов индукции магнитных полей, которые создают отдельные части системы. Под частями системы подразумеваются не только изолированные про-

водники с током, но и отдельные части проводников, направление тока в которых отличается от направления тока в остальных частях (изогнутый проводник). Удобно одну из частей рассматривать, как объект, создающий магнитное поле, действующее на остальные части системы. Дальнейшее решение основывается на использовании законов Ампера (9.1), силы Лоренца (9.12), а также соотношений (9.2), (9.3), (9.4).

### Задачи типа 9.1

*Определение энергии магнитного поля и магнитных сил в системах безграничных проводников с линейным, поверхностным или объёмным током. Взаимодействие движущегося заряда с магнитным полем*

**Методы решения.** Базовыми для раздела являются задачи 7.3.1, 7.3.7, 7.3.10 (глава 7). Начинать решение задач этого типа следует с анализа распределения магнитных полей системы в пространстве (направление и симметрия). Исходя из результатов такого анализа, надо выбрать часть системы, которая создаёт магнитное поле. Этот выбор должен определяться простотой и удобством решения.

**Задача 9.3.1.** Бесконечно длинный тонкий проводник с током  $I$  изогнут в форме буквы П. Расстояние между длинными частями провода равно  $l$ . Найти величину и направление силы  $F_l$ , действующей на единицу длины проводника в точке  $O$ , находящейся в центре горизонтальной перемычки.

#### Решение

Предположим, что ток течет в контуре по часовой стрелке (см. рис. 9.1). Тогда вектор магнитной индукции поля такой системы в окрестности точки  $O$  направлен от нас перпендикулярно плоскости рисунка. В соответствии с законом Ампера (9.1) на элемент тока длиной  $dl$  в окрестности точки  $O$  действует сила  $d\mathbf{F} = I [dl \times \mathbf{B}]$ , направление которой указано на рис. 9.1. Поэтому величина силы, действующей на единицу проводника в этой области, равна

$$F_l = \frac{dF}{dl} = IB.$$

Определим индукцию магнитного поля в точке  $O$ , используя методы главы 7. Согласно принципу суперпозиции, результирующее поле  $\mathbf{B}$  будет равно сумме полей  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$ , которые создают в этой области пространства участки провода  $AA_1$  и  $CC_1$  (индукция магнитного поля, создаваемого участком  $AC$  на элементе провода  $dl$  в окрестности точки  $O$ , равна нулю). Из симметрии задачи следует, что величины магнитных индукций этих полей одинаковы ( $B_1 = B_2$ ) и равны половине индукции поля, которое создал бы в точке  $O$  бесконечно длинный проводник с током, находящийся на расстоянии  $\frac{l}{2}$  от нее. Используя результат базовой задачи 7.3.1

$$B = B_1 + B_2 = 2B_1 = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi(l/2)} = \frac{\mu_0 I}{\pi l},$$

откуда получим

$$F_l = \frac{\mu_0 I^2}{\pi l}.$$

**Ответ:**  $F_l = \frac{\mu_0 I^2}{\pi l};$

сила перпендикулярна короткой стороне проводника (см. рис. 9.1) и её направление не зависит от направления тока.

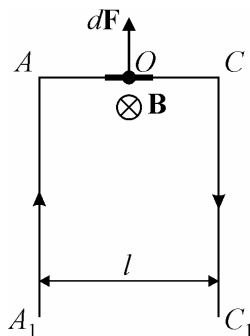


Рис. 9.1. К определению силы, действующей на линейный проводник с током в магнитном поле (задача 9.3.1)

**Задача 9.3.2 (базовая задача).** Две параллельные плоскости, по которым течет ток, создают в пространстве между собой однородное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$ . Вне этой области поле отсутствует. Найти силу магнитного взаимодействия  $\mathbf{F}_S$ , действующую на единицу площади каждой плоскости.

### Решение

В задаче 7.3.8 главы 7 было показано, что токи по плоскостям текут параллельно друг другу в противоположных направлениях – иначе согласно принципу суперпозиции будет существовать магнитное поле в пространстве вне плоскостей.

При противоположной ориентации параллельных токов в про-

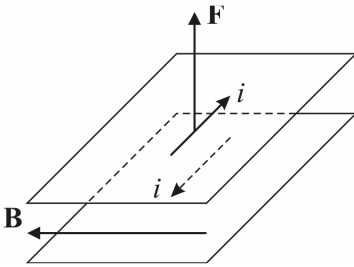


Рис. 9.2. Определение силы магнитного взаимодействия двух параллельных плоскостей с поверхностными токами (задача 9.3.2)

пластины с площадью  $\Delta S$  в соответствии с законом Ампера (9.1), действует сила равная  $\Delta F$ . Тогда сила, действующая на единицу поверхности одной из плоскостей со стороны магнитного поля, создаваемого другой плоскостью равна по модулю

$$F_S = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{iB_1\Delta S}{\Delta S} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Эта сила направлена перпендикулярно плоскостям в сторону от плоскости, создающей магнитное поле (см. рис. 9.2). Таким образом, плоскости с противоположно направленными токами отталкиваются друг от друга, испытывая давление  $p = F_S = \frac{B^2}{2\mu_0}$ . Отметим, что взаимодействие токов, текущих в пределах одной пластины, приводит к силам, параллельным ее поверхности, т.е. к касательным напряжениям.

**Ответ:** Сила (отталкивания) направлена перпендикулярно плоскостям и равна  $F_S = \frac{B^2}{2\mu_0}$ .

*Замечание.* Такой же результат можно получить, используя формулу (9.11). Так как в пространстве вне плоскостей магнитное поле отсутствует, а объемная плотность энергии магнитного поля в пространстве между плоскостями согласно (9.9) равна  $w_1 = \frac{B^2}{2\mu_0}$ ,

в пространстве между плоскостями индукция магнитного поля вдвое больше поля уединенной плоскости  $B_1$  и равна

$$B = \mu_0 i = 2B_1,$$

где  $i$  – величина поверхностной плотности тока, текущего в каждой плоскости.

Силу взаимодействия плоскостей можно найти как результат действия магнитного поля, создаваемого одной плоскостью, на токи в другой. Пусть на участок

$$\text{получим } F_S = p = w_1 - 0 = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

При таком решении направление сил давления можно легко определить из (9.8'). Раздвинем плоскости на малое расстояние. Так как плотность энергии не зависит от расстояния между плоскостями, то энергия возрастет. Согласно (9.8') при постоянстве силы тока знак работы магнитных сил совпадает со знаком изменения энергии. Таким образом, при раздвижении плоскостей работа будет положительной, что и соответствует силе отталкивания.

**Задача 9.3.3 (базовая задача).** Два параллельных тонких провода длиной  $l$  каждый находятся на расстоянии  $d$  друг от друга ( $l \gg d$ ). В них поддерживаются постоянные токи  $I_1 = I_2 = I$ , направленные в противоположные стороны. Какую работу совершают силы магнитного поля (силы Ампера) при удалении проводов на расстояние  $2d$  друг от друга? Краевыми эффектами пренебречь.

### Решение

Как известно, два параллельных проводника, по которым токи текут в противоположных направлениях, отталкиваются. Поэтому при удалении проводников друг от друга работа сил магнитного поля будет положительной.

Рассмотрим один провод в поле другого. Не ограничивая общности задачи, можно считать, что провод, создающий магнитное поле, неподвижен. Если другой провод находится на расстоянии  $x$  от первого, на него в соответствии с (9.1) действует сила Ампера, равная

$$F = IBl = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi x} l.$$

Здесь использовано выражение для величины индукции  $B$  бесконечно прямолинейного тока, полученное в базовой задаче 7.3.1, Сила Ампера направлена перпендикулярно проводу (см. рис. 9.3), поэтому под её действием провод будет перемещаться в плоскости рисунка параллельно самому себе. При перемещении одного из про-

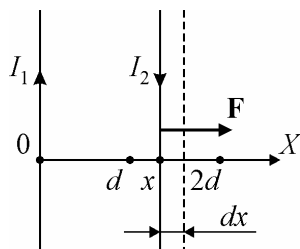


Рис. 9.3. К расчету работы сил Ампера при перемещении проводов с токами друг относительно друга (задача 9.3.3)

водов на  $dx$  силы магнитного поля другого провода совершат работу

$$\delta A = F dx = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi x} l dx,$$

и полная работа по удалению проводов на заданное расстояние  $2d$  будет равна

$$A = \int_d^{2d} \frac{\mu_0 I^2}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} l \ln 2.$$

**Ответ:**  $A = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 l \ln 2.$

*Дополнение.* Проверим выполнение закона сохранения энергии в данной задаче (соотношение (9.7) теоретического материала).

Так как конфигурация и, соответственно, индуктивность системы изменяется, а сила тока, текущего в проводниках, остается постоянной, то в соответствии с (9.5) изменение энергии можно записать как

$$\Delta W = \frac{L_2 I^2}{2} - \frac{L_1 I^2}{2} = \frac{I^2}{2} (L_2 - L_1),$$

где  $L_2$  и  $L_1$  – индуктивности двухпроводной линии в конечном и начальном состоянии, определяемые формулой  $L(x) \cong \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{x}{a}$ , где  $x$  – расстояние между проводами,  $a$  – радиус провода (см. задачу 8.4.15 главы 8). Для данного случая получим

$$\Delta W = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2d}{a} - \ln \frac{d}{a} \right) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} l \ln 2 = A > 0,$$

то есть энергия системы увеличилась на величину, численно равную работе сил Ампера, что соответствует формуле (9.8) теоретического материала.

Согласно закону сохранения энергии (9.7) работа сил Ампера и изменение энергии системы произошло за счет работы источника ЭДС, который поддерживал постоянным ток в проводниках (т.е. совершал работу против ЭДС индукции, возникшей в системе при перемещении проводов). Действительно,

$$A_{\text{эдс}} = -A_{\text{инд}} = I\Delta\Phi = I(L_2I - L_1I) = \frac{\mu_0}{\pi} I^2 l \ln 2 = A + \Delta W.$$

**Задача 9.3.4.** По длинному сплошному прямому цилиндрическому проводу радиуса  $R$  из немагнитного материала течет ток  $I$ . Считая, что плотность тока одинакова во всём объёме проводника, найти энергию магнитного поля внутри провода в расчете на единицу его длины.

### Решение

Так как плотность тока одинакова во всём объёме проводника, то на расстоянии  $r$  от его оси индукция магнитного поля равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \quad (\text{см. задачу 7.3.10 главы 7}).$$

По определению (9.9) объёмная плотность энергии магнитного поля равна  $w = \frac{B^2}{2\mu_0}$ , то есть она зависит от расстояния до оси проводника как

$$w(r) = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \right)^2.$$

Для энергии системы в расчете на единицу длины получим

$$W_l = \frac{W}{l} = \frac{1}{l} \int_0^R \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \right)^2 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}.$$

**Ответ:**  $W_l = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}.$

**Задача 9.3.5.** Вдоль прямого медного проводника радиуса  $R$  течет ток  $I$ . Найти разность потенциалов между осью проводника и его поверхностью. Концентрация электронов проводимости в меди  $n$ .

### Решение

Ток, текущий в проводнике, создает вокруг себя магнитное поле. Это поле действует на электроны проводимости, которые упорядоченно движутся с дрейфовой скоростью

$$V = \frac{I}{neS} = \frac{I}{n\pi R^2}.$$



Действие магнитной составляющей силы Лоренца  $\mathbf{F}$  приводит к тому, что при включении тока электроны начинают смещаться к оси проводника (рис. 9.4). В результате на поверхности появляется избыточный положительный заряд, а в остальном объеме – отрицательный. Таким образом, возникает электрическое поле, со стороны которого на электроны также действует сила. Равновесие в проводнике будет достигнуто тогда, когда действующая на электроны сила Лоренца (9.12) станет равной нулю, и в каждой точке проводника будет выполняться равенство

$$eE = -eVB.$$

Индукция магнитного поля на расстоянии  $r$  от оси сплошного цилиндрического проводника равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

(см. задачу 7.3.10 главы 7). Напряженность электрического поля в произвольной точке проводника направлена по радиусу проводника и для ее проекции на радиальное направление получаем:

$$E = -VB = -\frac{I}{ne\pi R^2} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r.$$

Отсюда находим разность потенциалов между осью проводника и его поверхностью

$$U = -\int_R^0 E dr = \int_R^0 \frac{\mu_0 I^2}{2ne\pi^2 R^4} r dr = -\frac{\mu_0 I^2}{4ne\pi^2 R^2}.$$

**Ответ:**  $U = -\frac{\mu_0 I^2}{4ne\pi^2 R^2}.$

*Замечание.* Чтобы найти распределение заряда внутри провода, можно воспользоваться результатами задачи 1.3.13 главы 1. В ней было показано, что такая напряженность электрического поля, пропорциональная радиус-вектору  $r$  точки, получается внутри равно-

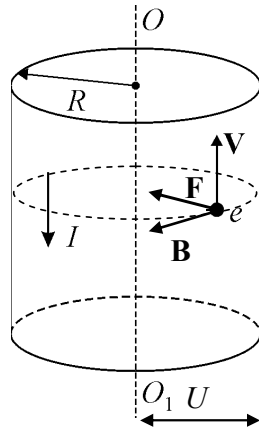


Рис. 9.4. Определение разности потенциалов  $U$  между осью и поверхностью сплошного цилиндрического проводника с током (задача 9.3.5)

мерно заряженного цилиндра и равна  $E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$ , где  $\rho$  – плотность заряда. Приравнявая это выражение полученной выше напряженности  $E$ , получаем  $\rho = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{I^2}{\pi e^2 R^4}$ .

### Задачи типа 9.2

*Нахождение энергии магнитного поля и магнитных сил, действующих на проводники с током, ограниченные в пространстве*

**Задача 9.3.6.** По тонкой проволоке диаметром  $D$ , согнутой в виде окружности радиуса  $R$ , течет постоянный ток  $I$ . Проволока разрывается, если величина механического напряжения в ней достигает величины  $\sigma_0$ . При каком значении индукции  $B_k$  однородного магнитного поля, перпендикулярного плоскости кольца, произойдет разрыв проволоки?

#### Решение

Замкнутое кольцо с током можно рассматривать как магнитный момент  $\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}$  (см. (7.16) в главе 7). Так как вектор индукции магнитного поля параллелен  $\mathbf{p}_m$ , то согласно (9.3) отсутствует вращающий момент, действующий на проводник со стороны внешнего магнитного поля.

Поскольку магнитное поле однородно, то согласно (9.2), полная сила, действующая на кольцо со стороны магнитного поля, также равна нулю, т.е. проводник находится в положении равновесия.

На элемент проводника  $d\mathbf{l}$  (рис. 9.5) действует сила Ампера (9.1)

$$d\mathbf{F}_A = I [d\mathbf{l} \mathbf{B}].$$

Эта сила должна быть скомпенсирована равнодействующей

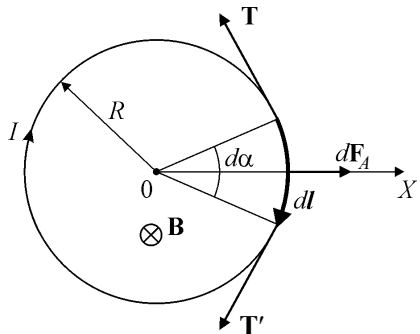


Рис. 9.5. Силы, действующие на элемент кольца с током во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}$  (задача 9.3.6)

щей  $d\mathbf{F}_T$  сил натяжения  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{T}'$ , приложенных к концам данного элемента  $dF_T = Td\alpha = T \frac{dl}{R}$ . Приравнявая модули этих сил, получаем

$$T = IBR.$$

Проволока разорвётся, если механическое напряжение в ней достигнет предельного, то есть  $\frac{T}{S} = \sigma_0$  (где  $S = \frac{\pi D^2}{4}$  – площадь поперечного сечения проводника).

Окончательно получим: 
$$B = \frac{\sigma_0 \pi D^2}{4IR}.$$

**Ответ:** 
$$B = \frac{\sigma_0 \pi D^2}{4IR}.$$

**Задача 9.3.7 (базовая задача).** Две катушки с магнитными моментами  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  расположены так, что их оси находятся на одной прямой. Расстояние  $L$  между ними велико по сравнению с размерами катушек. Определить силу взаимодействия между катушками.

**Решение**

Поскольку  $L$  намного больше размеров катушек, то такую систему можно рассматривать как систему из двух точечных магнитных моментов (см. теоретический материал главы 7), один из которых находится в поле, создаваемом другим.

Будем рассматривать вторую катушку в поле первой. Выберем ось  $X$  декартовой системы координат совпадающей с прямой, соединяющей центры катушек (см. рис. 9.6). Ввиду симметрии задачи сила будет иметь только  $x$ -компоненту. Тогда согласно (9.2) на вторую катушку действует сила, величина которой равна

$$F = F_x = p_{2x} \frac{\partial B_{1x}}{\partial x}.$$

Согласно соотношению (7.21) теоретического материала главы 7, магнитное поле

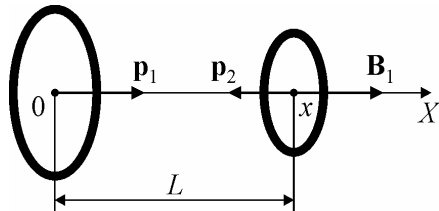


Рис. 9.6. К расчёту силы взаимодействия двух магнитных диполей (задача 9.3.7)

на оси точечного магнитного момента равно  $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{x^3}$ , следовательно, индукция магнитного поля, создаваемого первой катушкой равна  $B_{1x} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{p_{1x}}{x^3}$ .

$$\text{Окончательно получим: } F_x = p_{2x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{p_{1x}}{x^3} \right) \Bigg|_{x=L} = -\frac{3\mu_0 p_{1x} p_{2x}}{2\pi L^4}.$$

$$\text{Ответ: } F = -\frac{3\mu_0 p_1 p_2}{2\pi L^4}.$$

*Замечание.* Катушки притягиваются ( $F_x < 0$ ), если  $p_{1x}$  и  $p_{2x}$  имеют одинаковый знак ( $\mathbf{p}_1 \uparrow \uparrow \mathbf{p}_2$ ) и отталкиваются ( $F_x > 0$ ), если  $p_{1x}$  и  $p_{2x}$  имеют разные знаки ( $\mathbf{p}_1 \uparrow \downarrow \mathbf{p}_2$ ) – ситуация, приведённая на рис. 9.6.

**Задача 9.3.8 (базовая задача).** По длинному однослойному соленоиду с  $n$  витками на единицу длины течет ток  $I$ . Определить давление, действующее на боковую поверхность соленоида.

### Решение

Каждый из витков соленоида представляет собой кольцо с током, находящееся во внешнем однородном (если пренебречь краевыми эффектами) магнитном поле, перпендикулярном его плоскости, которое создаётся всеми остальными витками соленоида (см. рис. 9.7). Согласно задаче 9.3.6, ponderomotorные силы  $F$  стремятся увеличить радиус соленоида.

Найдем эти силы энергетическим методом.

Пусть радиус соленоида увеличился на  $dR$  при неизменной силе тока. Тогда согласно (9.8') работа сил давления на боковую по-

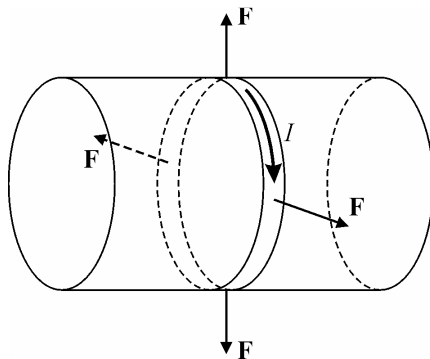


Рис.9.7. Силы, действующие на виток соленоида со стороны его собственного магнитного поля (задача 9.3.8)

верхность соленоида будет равна приращению его энергии

$$\delta A = p dV = p 2\pi R l dR = \delta W \Big|_{I=\text{const}},$$

где  $V$  – объем соленоида,  $R$  – его радиус,  $l$  – длина. Энергия соленоида согласно (9.5) равна

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi R^2 l I^2,$$

где использовано, что индуктивность соленоида  $L = \mu_0 n^2 V$  (см. задачу 8.3.10 главы 8).

Из этих соотношений находим величину давления

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2\pi R l} \frac{\partial W}{\partial R} \Big|_I = \frac{1}{2\pi R l} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi R^2 l I^2 \right) \Big|_I = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{4R} \frac{\partial}{\partial R} (R^2) = \\ &= \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}, \end{aligned}$$

где  $B = \mu_0 n I$  – индукция магнитного поля на оси длинного соленоида (см. задачу 7.3.5 главы 7).

**Ответ:**  $p = \mu_0 n^2 I^2 / 2$ .

*Замечание 1.* Длинный соленоид разделяет все пространство на две области: внутри соленоида, в которой существует магнитное поле с индукцией  $B = \mu_0 n I$  (см. задачу 7.3.5 главы 7), и снаружи соленоида – где магнитное поле очень мало.

Согласно (9.11) давление, оказываемое на боковую поверхность соленоида силами Ампера равно

$$p = w_1 - 0 = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2}.$$

*Замечание 2.* Наличие сил давления, действующих на боковую поверхность соленоида, приводит к тому, что максимальное значение индукции магнитного поля, которое можно получить с помощью соленоидов, не превышает 50 Тл (для импульсного соленоида). При такой величине  $B$  на проволоку из бериллиевой бронзы, из которой изготавливаются импульсные соленоиды, оказывается давление равное  $p = B^2 / (2\mu_0) \approx 2 \cdot 10^9$  Па, близкое к её пределу прочности.

*Замечание 3.* Вследствие взаимного притяжения витков соленоида на его торцевую поверхность будут действовать силы, стягивающие его. Величину давления, действующего на торцевую поверхность соленоида можно определить аналогично решению данной задачи (см. задачу 9.4.7 для самостоятельного решения).

### Задачи типа 9.3

*Определение вращающего момента и сил, действующих на проводник с током и магнитный диполь в магнитном поле*

**Задача 9.3.9 (базовая задача).** Квадратная рамка со стороной  $a$ , изготовленная из тонкого проводника, расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток  $I_0$ . Определить внешнюю силу, которая удерживает рамку в равновесии, если по ней течёт ток  $I$ , а расстояние между проводом и ближайшей к нему стороной рамки равно  $2a$  (рис. 9.8 а).

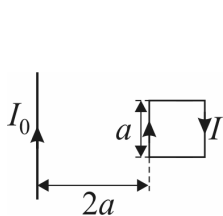


Рис. 9.8 а. Взаимное расположение проводников с токами в задаче 9.3.9

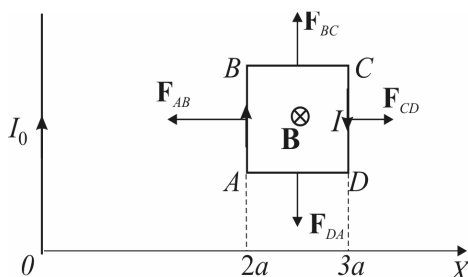


Рис. 9.8 б. Определение силы, действующей на рамку со стороны магнитного поля прямого провода (задача 9.3.9)

### Решение

**Способ 1.** Согласно закону Ампера (9.1) на стороны рамки будут действовать разные силы со стороны магнитного поля прямого провода с током  $I_0$ . Направим ось  $X$  перпендикулярно проводу в плоскости рамки. Вектор магнитной индукции поля прямого провода  $\mathbf{B}$  направлен перпендикулярно плоскости рамки, а его модуль равен  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$  (см. задачу 7.3.9 главы 7), где  $I$  – сила тока в проводе, а  $x$  – расстояние от него до рассматриваемой точки.

Полная сила, действующая на рамку со стороны магнитного поля, равна векторной сумме сил

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BC} + \mathbf{F}_{CD} + \mathbf{F}_{DA}$$

(рис. 9.8б). Так как на участках рамки  $BC$  и  $DA$  токи текут в разные стороны, а направление магнитного поля одинаково, то  $\mathbf{F}_{BC} = -\mathbf{F}_{DA}$  и сумма этих сил равна нулю.

Определим силы, действующие на две других стороны рамки. Используя соотношение (9.1), для модуля сил имеем:

$$F_{AB} = IaB \Big|_{x=2a} = \frac{\mu_0 I_0 I}{4\pi}.$$

$$F_{CD} = IaB \Big|_{x=3a} = \frac{\mu_0 I_0 I}{6\pi}.$$

Векторы  $\mathbf{F}_{AB}$  и  $\mathbf{F}_{CD}$  направлены противоположно и, следовательно,  $x$ -компонента результирующей силы, действующей на рамку со стороны магнитного поля, равна

$$F_x = -\frac{\mu_0 I_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I_0 I}{6\pi} = -\frac{\mu_0 I_0 I}{12\pi}$$

и направлена в сторону провода против оси  $X$ .

Для того, чтобы рамка находилась в равновесии, к ней должна быть приложена внешняя сила  $\mathbf{F}'$ , равная по величине и противоположная по направлению силе  $\mathbf{F}$ , то есть  $F'_x = \frac{\mu_0 I_0 I}{12\pi}$ .

**Способ 2.** При постоянстве токов, текущих в проводниках, согласно соотношению (9.8')

$$\delta A = F dx = \delta W \Big|_{I=\text{const}}.$$

Так как в рассматриваемой задаче токи, текущие в проводниках, не изменяются, то внешнюю силу, действующую на рамку, можно найти как

$$F = + \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{I=\text{const}}.$$

Энергия магнитного поля, созданного двумя контурами с токами, согласно (9.6) складывается из собственных магнитных энергий контуров и их взаимной энергии. Собственные магнитные энергии контуров – постоянные величины. От координаты  $x$  зависит только энергия взаимодействия, поэтому

$$W(x) = W_{\text{взаим}} = L_{12}(x) I_0 I,$$

где  $L_{12}$  – коэффициент взаимной индукции системы «провод – рамка».

Найдем взаимную индуктивность  $L_{12}$  контуров.

Магнитный поток через рамку, создаваемый полем провода, равен

$$\Phi = \int_S B dS = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x} a dx = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x} = L_{12} I_0 \quad (\text{см. главу 8}).$$

Тогда  $L_{12} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$  и

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_0 I_0 I a}{2\pi} \left( \ln \frac{x+a}{x} \right) \right) \Bigg|_{I=\text{const}} = - \frac{\mu_0 I_0 I a}{2\pi} \frac{a}{x(x+a)}.$$

При  $x = 2a$   $F = - \frac{\mu_0 I_0 I a}{12\pi}$ .

Так как получившаяся величина отрицательна, искомая магнитная сила направлена против направления оси  $x$ , что соответствует притяжению рамки к проводу.

**Ответ:**  $F'_x = \frac{\mu_0 I_0 I}{12\pi}$ .

**Задача 9.3.10.** Соленоид радиуса  $R$  и длины  $l$  ( $l \gg R$ ) имеет обмотку, состоящую из  $N$  витков. По соленоиду течет ток силы  $I$ . В центре соленоида на его оси помещена небольшая катушка, имеющая магнитный момент  $\mathbf{p}_m$ , направленный перпендикулярно оси соленоида. Определить величину момента сил  $M$ , действующих на катушку.

### Решение

Внутри длинного соленоида магнитное поле однородно. Вектор магнитной индукции такого поля направлен вдоль оси соленоида (см. рис. 9.9) и равен по модулю

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I.$$

Будем рассматривать катушку, как точечный магнитный диполь. Тогда в соответствии с (9.3) момент сил по модулю будет равен



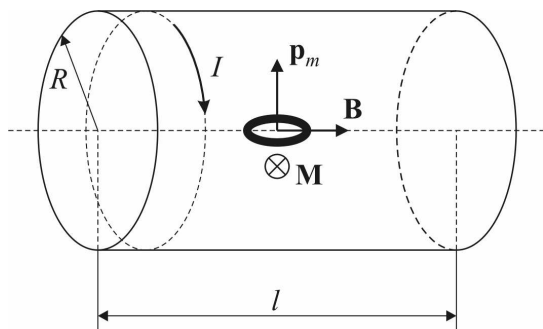


Рис. 9.9. К определению вращающего момента сил Ампера, действующего на магнитный диполь, помещённый на оси соленоида (задача 9.3.10)

$$M = p_m B \sin \alpha = p_m \mu_0 \frac{N}{l} I ,$$

где  $\alpha = 90^\circ$  – угол между векторами  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$ .

**Ответ:**  $M = \frac{\mu_0 p_m N I}{l} .$

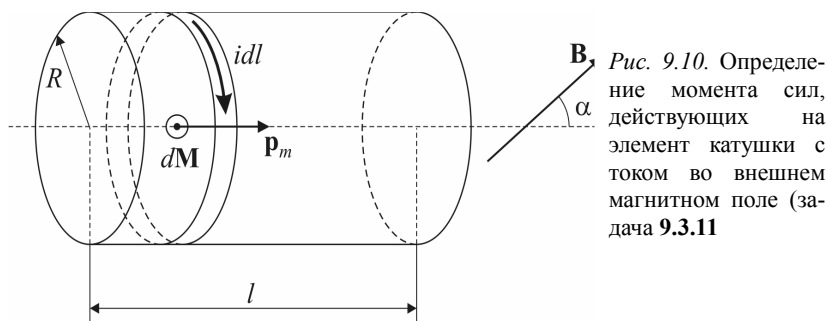
*Замечание.* Если внутренняя катушка ориентирована соосно соленоиду, то в соответствии с (9.4) момент сил, действующих на неё со стороны магнитного поля соленоида, равен нулю.

**Задача 9.3.11.** На круглый короткий деревянный цилиндр объёмом  $V$  в один слой намотана катушка. По катушке течет ток, поверхностная плотность которого равна  $i$ . Определить величину механического момента, который удерживает цилиндр в равновесии, если он находится во внешнем однородном магнитном поле, вектор индукции которого  $\mathbf{B}$  образует угол  $\alpha$  с осью цилиндра.

### Решение

Рассмотрим элемент катушки длиной  $dl$ . Согласно определению (7.16) главы 7, этот элемент можно рассматривать, как магнитный диполь с моментом  $\mathbf{p}_m = I \mathbf{S} \mathbf{n} = idl \pi R^2 \mathbf{n}$  (где  $R$  – радиус катушки), направленным вдоль оси цилиндра (см. рис. 9.10). В соответствии с (9.4) на этот элемент катушки со стороны магнитного поля действует вращающий момент, равный по модулю

$$dM = p_m B \sin \alpha = idl \pi R^2 B \sin \alpha .$$



Считая, что геометрические размеры катушки (радиус  $R$  и длина  $l$ ) совпадают с размерами деревянного цилиндра, на который она намотана, получим выражение для момента, действующего на всю катушку со стороны магнитного поля

$$M = \int_0^l dM = \int_0^l idl \pi R^2 B \sin \alpha = iVB \sin \alpha .$$

При интегрировании учтено, что объём катушки равен  $V = l\pi R^2$ .

В условиях равновесия механический момент, который удерживает цилиндр с катушкой в равновесии, равен по величине моменту магнитных сил, который стремится повернуть катушку.

**Ответ:**  $M = iVB \sin \alpha$ .

**Задача 9.3.12.** Замкнутый контур с током  $I$ , состоящий из двух полуокружностей радиусов  $a$  и  $b$ , соединённых прямыми участками (см. рис. 9.11а), находится в поле длинного прямого проводника с током  $I_0$ . Плоскость контура перпендикулярна прямому проводнику, а центры полуокружностей лежат на оси прямого проводника. Найти момент сил Ампера, действующих на замкнутый контур.

### Решение

Силовые линии индукции магнитного поля, создаваемого бесконечным прямым проводником с током, являются окружностями, плоскость которых перпендикулярна проводнику. На расстоянии  $x$  от проводника величина магнитной индукции его поля равна

$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$  (см. задачу 7.3.1 главы 7). Следовательно, в каждой точке

полуокружностей  $BC$  и  $DA$  рассматриваемого контура (см. рис. 9.11б) векторы  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{B}$  сонаправлены и, в соответствии с (9.1), силы Ампера на эти участки не действуют.

На радиальные участки  $AB$  и  $CD$  контура со стороны магнитного поля прямого проводника действуют силы Ампера, стремящиеся повернуть контур вокруг оси  $OO_1$ , проходящей через его центр.

Рассмотрим участок контура  $dr$ , находящийся на расстоянии  $r$  от центра прямого провода. На него действует сила Ампера, равная

$$dF = IBdr = I \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} dr,$$

Момент этой силы относительно оси  $OO_1$  равен

$$dM = r \cdot dF = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi} dr.$$

На участок  $AB$  действует вращающий момент

$$M_1 = \int_a^b dM = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi} (b - a).$$

В силу симметрии задачи момент сил, действующий на участок  $CD$ , также равен  $M_1$ . Для момента пары сил Ампера, действующих на весь контур, имеем

$$M = 2M_1 = \frac{\mu_0}{\pi} I_0 I (b - a).$$

**Ответ:**  $M = \frac{\mu_0}{\pi} I_0 I (b - a).$

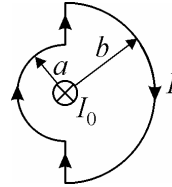


Рис. 9.11а. Взаимное расположение замкнутого проводника с током  $I$  и прямого провода с током  $I_0$  (задача 9.3.12)

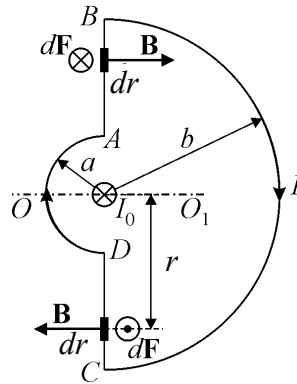


Рис. 9.11б. Силы Ампера, действующие на линейные участки контура со стороны магнитного поля прямого проводника (задача 9.3.12)

**Задача 9.3.13.** Круглая проволочная петля радиуса  $a$  и сопротивлением  $R$ , находится в однородном постоянном магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$  и равномерно вращается вокруг своего диаметра, перпендикулярного к  $\mathbf{B}$ , с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 9.12). Пренеб-

регая индуктивностью петли, найти средний тормозящий момент  $\overline{M}$  сил, действующих на петлю со стороны магнитного поля и среднюю мощность этих сил  $\overline{P}$ .

### Решение

Пусть  $\varphi(t) = \omega t$  – угол между вектором  $\mathbf{B}$  и вектором  $\mathbf{n}$  нормали к плоскости петли в момент времени  $t$ . Тогда магнитный поток через контур  $\Phi(t) = \pi a^2 B \cos \omega t$ , а ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi a^2 B \omega \sin \omega t.$$

Поскольку индуктивностью контура можно пренебречь, то индукционный ток по закону Ома равен

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{1}{R} \pi a^2 B \omega \sin \omega t.$$

Такой круговой виток с током в соответствии с определением (7.16) (глава 7) обладает магнитным моментом

$$\mathbf{p}_m(t) = IS\mathbf{n} = \mathbf{n} \pi a^2 I = \mathbf{n} \frac{1}{R} (\pi a^2)^2 B \omega \sin \omega t.$$

Согласно (9.3) на петлю будет действовать механический вращающий момент  $\mathbf{M}(t) = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}]$ , направленный против вектора  $\boldsymbol{\omega}$  (следствие правила Ленца). Его проекция на направление вектора  $\boldsymbol{\omega}$  равна

$$M(t) = -p_m(t) B \sin \omega t = -\frac{1}{R} (\pi a^2 B)^2 \omega \sin^2 \omega t.$$

Среднее по периоду  $\overline{\sin^2 \omega t} = 1/2$ , поэтому средняя величина момента

$$\overline{M} = -\frac{1}{2R} (\pi a^2 B)^2 \omega.$$

Поскольку мощность  $P(t) = M(t)\omega$ , а  $\omega = \text{const}$ , то

$$\overline{P} = \overline{M}\omega = -\frac{1}{2R} (\pi a^2 B \omega)^2.$$

**Ответ:**  $\overline{\mathbf{M}} = -\frac{1}{2R} (\pi a^2 B)^2 \boldsymbol{\omega}$ ,  $\overline{P} = -\frac{1}{2R} (\pi a^2 B \omega)^2$ .

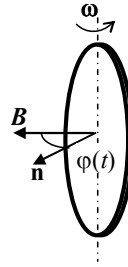


Рис. 9.12. Проволочная петля, вращающаяся во внешнем магнитном поле (задача 9.3.13)

*Замечание.* Другой способ решения данной задачи, основанный на энергетическом подходе, приведён в задаче 8.3.2 главы 8.

### Задача 9.3.14 (базовая задача).

Точечный магнитный диполь  $\mathbf{p}_m$  расположен перпендикулярно длинному прямому проводу, по которому течет ток  $I$ , так, что продолжение вектора проходит через провод (рис. 9.13). Определить силу, действующую на магнитный диполь со стороны магнитного поля провода, если расстояние между проводом и магнитным моментом равно  $r$ .

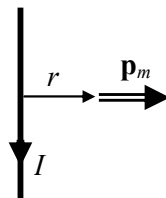


Рис. 9.13. Взаимная ориентация прямолинейного тока и магнитного диполя (задача 9.3.14)

### Решение

Выберем декартову систему координат так, чтобы ось  $Z$  была параллельна проводу, а ось  $X$  – магнитному моменту диполя. Взаимная ориентация магнитного диполя и провода в поперечной плоскости  $XY$  показана на рис. 9.14 а.

Как и большинство задач данной главы, эту задачу можно решать двумя способами – используя энергетические соотношения и непосредственно выражение для силы, действующей на магнитный диполь во внешнем магнитном поле (9.2).

### Способ 1 (энергетический)

Чтобы воспользоваться этим методом, нужно найти зависимость энергии диполя от его координат.

Линии индукции магнитного поля прямого провода имеют вид окружностей, центр которых лежит на проводе. Пусть диполь с магнитным моментом, параллельным оси  $X$ , находится в произвольной точке с координатами  $(x, y, 0)$  (рис. 9.14 б). Компоненты вектора магнитной индукции поля в этой точке можно записать как

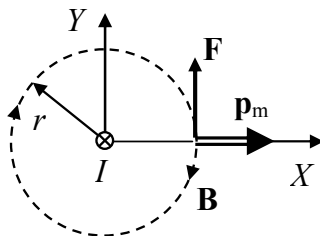


Рис. 9.14а. Сила, действующая на магнитный момент в магнитном поле прямого провода (задача 9.3.14)

$$\mathbf{B}(x, y) = B \left\{ \frac{y}{r}, -\frac{x}{r}, 0 \right\},$$

где  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  (см. задачу 7.3.1 главы

7). Согласно (9.4) энергия взаимодействия "жесткого" диполя, имеющего заданный постоянный магнитный момент  $\mathbf{p}_m = \{p, 0, 0\}$ , с магнитным полем равна

$$W = -(\mathbf{p}_m \mathbf{B}) = -p_m B \frac{y}{r} = -p_m \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{r^2}.$$

Силу, действующую на диполь, можно найти, используя (9.2)

$$\mathbf{F}_m = -\text{grad}W = -\left( \frac{\partial W}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \mathbf{k} \right).$$

Так как диполь, согласно условию задачи, находится в точке с координатами  $(r, 0, 0)$ , получаем:

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=r, y=0} = p_m \mu_0 I \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \Big|_{x=r, y=0} = 0;$$

$$F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{x=r, y=0} = p_m \mu_0 I \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \Big|_{x=r, y=0} = \frac{p_m \mu_0 I}{r^2};$$

$$F_z = \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

В векторном виде  $\mathbf{F} = p_m \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \mathbf{j}$ , где  $\mathbf{j}$  – орт оси  $Y$  выбранной системы координат.

Сила, действующая на диполь, направлена в положительном направлении оси  $Y$ . Действительно, смещение в положительном направлении оси  $Y$  уменьшает энергию диполя. В направлении оси  $X$  сила не действует, поскольку смещение по этой оси не меняет энергию, которая всегда равна нулю

### Способ 2 (непосредственный расчет сил)

Если диполь, имеющий заданный постоянный магнитный момент,

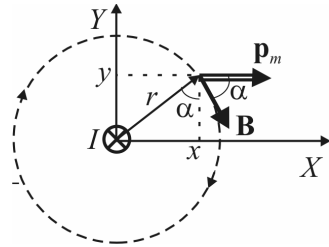


Рис. 9.14б. К определению энергии взаимодействия диполя с магнитным полем прямого провода (задача 9.3.14)

находится в точке с координатами  $(x, y, 0)$  (рис.9.14б), то согласно соотношению (9.2) компоненты силы, действующей на него со стороны магнитного поля провода равны:

$$F_x = \left( \mathbf{p}_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{p}_m, \mathbf{B});$$

$$F_y = \left( \mathbf{p}_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{p}_m, \mathbf{B});$$

$$F_z = \left( \mathbf{p}_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{p}_m, \mathbf{B}),$$

где  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  (см. задачу 7.3.1 главы 7)

Так как диполь, согласно условию задачи, находится в точке с координатами  $(r, 0, 0)$ , аналогично способу I получаем:

$$F_x = 0, \quad F_y = \frac{p_m \mu_0 I}{2\pi r^2}.$$

**Ответ:**  $\mathbf{F} = p_m \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \mathbf{j}.$

#### § 9.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 9.4.1.** Какова сила взаимодействия двух параллельных проводящих пластин в вакууме, по которым текут одинаковые по величине токи с поверхностной плотностью величиной  $i$ , если направления этих токов составляют друг с другом угол  $\alpha$ ? Линейные размеры сторон пластин  $l_1, l_2$  много больше расстояния между ними.

**Ответ:**  $F = \frac{\mu_0 i^2}{2} l_1 l_2 \cos \alpha.$  Положительная сила соответствует притяжению пластин.

**Задача 9.4.2.** Проводящую плоскость с током поместили во внешнее однородное магнитное поле. В результате индукция магнитного поля с одной стороны плоскости оказалась равной  $\mathbf{B}_1$ , а с другой стороны –  $\mathbf{B}_2$  (линии поля параллельны плоскости – см. рис. 9.15). Найти магнитное давление  $p$ , действующее на плоскость.

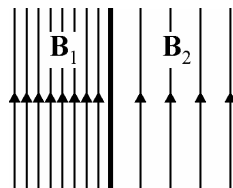


Рис. 9.15. Линии индукции магнитного поля с двух сторон от проводящей плоскости с током (задача 9.4.2)

**Ответ:**  $p = \frac{B_1^2 - B_2^2}{2\mu_0}$ , сила давления

направлена вправо.

*Указание.* Для определения направления силы давления целесообразно найти направление поверхностного тока, текущего по плоскости.

**Задача 9.4.3.** Два длинных прямых взаимно перпендикулярных провода отстоят друг от друга на расстояние  $a$ . В каждом проводе течет ток  $I$ . Найти максимальное значение силы Ампера, приходящееся на единицу длины провода в такой системе.

**Ответ:**  $(F_l)_{\max} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a}$ .

**Задача 9.4.4.** Найти энергию, приходящуюся на единицу длины коаксиального кабеля, по которому течет ток  $I$ . Радиус внутренней жилы –  $R_1$ , радиус внешней жилы –  $R_2$ .

**Ответ:**  $W = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$ .

*Указание.* См. задачу 8.4.16.

**Задача 9.4.5.** Длинный цилиндр радиуса  $R$ , заряженный равномерно по поверхности, вращается вокруг своей оси с частотой  $\omega$ . Найти энергию магнитного поля, приходящуюся на единицу длины такой системы, если заряд единицы длины цилиндра равен  $q$ .

**Ответ:**  $W = \frac{\mu_0 (q\omega R)^2}{8\pi}$ .



**Задача 9.4.6.** Вычислить энергию взаимодействия, приходящуюся на единицу длины двух одинаковых очень длинных параллельных тонких проводников. Расстояние между проводниками равно  $r$ , по ним текут одинаковые токи  $I$ .

**Ответ:**  $W_l = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln r$ .

*Указание.* См. задачу **8.4.15**.

**Задача 9.4.7.** По длинному однослойному соленоиду, обмотка которого состоит из  $N$  витков, течет ток  $I$ . Определить продольную силу, действующее на торцы соленоида, если его длина равна  $l$ .

**Ответ:**  $F = \frac{\mu_0}{2} S \left( \frac{NI}{l} \right)^2$ . Продольные силы сжимают соленоид.

**Задача 9.4.8.** Длинный соленоид площадью поперечного сечения  $S$ , намотка которого состоит из  $N$  витков, может сжиматься и растягиваться, как пружина, имеющая жесткость  $k$ . При протекании по соленоиду тока силой  $I$  его длина равна  $L$ . Определить длину  $L_0$  соленоида, отключенного от источника тока.

**Ответ:**  $L_0 = L + \frac{\mu_0 N^2 S}{kL} \frac{I^2}{2}$ .

**Задача 9.4.9.** Вдоль длинного тонкостенного круглого цилиндра радиуса  $R$  течет ток  $I$ . Какое давление испытывают стенки цилиндра?

**Ответ:**  $p = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}$ .

**Задача 9.4.10.** На оси кругового витка радиуса  $R$ , по которому течет ток  $I$ , находится небольшая катушка с током, имеющая магнитный момент  $\mathbf{p}_m$ , ориентированный вдоль оси витка. Найти модуль силы, действующей на катушку, если ее расстояние от центра витка равно  $x$ .

**Ответ:**  $F = \frac{3\mu_0 R^2 I p_m x}{2(R^2 + x^2)^{5/2}}$ .

**Задача 9.4.11.** Прямоугольная рамка с током  $I$  и сторонами  $a$  и  $b$  лежит в одной плоскости с очень длинным проводом, по которому течет ток  $I_0$  (сторона рамки  $b$  параллельна проводу). Определить внешнюю механическую силу, которая удерживает рамку в равновесии. Расстояние между проводом и осью симметрии рамки равно  $r_0$ .

**Ответ:** 
$$F = \frac{2\mu_0 I_0 I a b}{\pi(4r_0^2 - a^2)}.$$

**Задача 9.4.12.** Два длинных соосных соленоида, радиусы которых примерно одинаковы  $R_1 \cong R_2 = R$ , а длина много больше  $R$ , частично вставлены один в другой. Определить силу их взаимодействия. Плотность намотки и сила тока в соленоидах соответственно равны  $n_1, I_1$  и  $n_2, I_2$ . Краевыми эффектами пренебречь.

**Ответ:**  $F = \mu_0 n_1 n_2 I_1 I_2 \pi R^2$ . Соленоиды притягиваются, если токи в них имеют одинаковое направление, и отталкиваются в обратном случае.

**Задача 9.4.13.** В электромагнитном насосе для перекачки расплавленного металла участок трубы с металлом находится в однородном магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$  (см. рис. 9.16). Через этот участок трубы в перпендикулярном вектору  $\mathbf{B}$  и оси трубы направлении пропускают однородный ток силой  $I$ . Найти избыточное давление, создаваемое насосом.

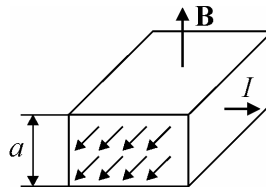


Рис. 9.16. Электромагнитный насос (задача 9.4.13)

**Ответ:** 
$$\Delta p = \frac{IB}{a}.$$

**Задача 9.4.14.** Замкнутый контур с током  $I$  находится в поле длинного прямого проводника с током  $I_0$ . Плоскость контура перпендикулярна прямому проводнику. Найти момент сил Ампера, действующих на замкнутый контур, если он имеет вид, показанный на

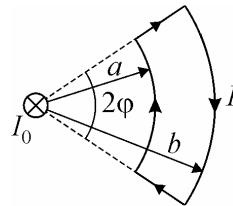


Рис. 9.17. Взаимное расположение проводников в задаче 9.4.14

рис. 9.17.

**Ответ:** 
$$M = \frac{\mu_0}{\pi} I_0 I (b - a) \sin \varphi.$$

**Задача 9.4.15.** Внутри длинного соленоида находится короткая катушка сечения  $S$ , состоящая из  $N$  витков. Ось катушки перпендикулярна оси соленоида и направлена вертикально. Внутренняя катушка укреплена на коромысле весов, которое в отсутствие тока находится в равновесии (см. рис. 9.18).

Если в катушке и соленоиде текут одинаковые токи, то для уравнивания весов на короткое плечо коромысла длиной  $l$  нужно поместить груз массы  $m$ . Определить силу этого тока  $I$ , если плотность намотки соленоида равна  $n$  витков на единицу длины.

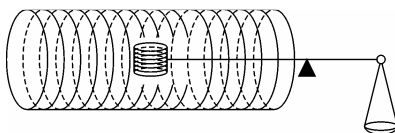


Рис. 9.18. Взаимное расположение катушек в задаче 9.4.15

**Ответ:** 
$$I = \sqrt{\frac{mgl}{\mu_0 n S N}}.$$

**Задача 9.4.16.** Два одинаковых параллельных диполя с моментом  $\mathbf{p}_m$  каждый лежат в одной плоскости и образуют одинаковые углы  $\theta$  с соединяющим их отрезком. Вычислите силу взаимодействия между диполями. При каких углах  $\theta$  эта сила максимальна?

**Ответ:** 
$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3p_m^2}{r^4} \sqrt{(1 - 3\cos^2 \theta)^2 + \sin^2 2\theta},$$

$$F_{\max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6p_m^2}{r^4} \text{ при } \theta = 0, \pi$$

**Задача 9.4.17.** Точечный магнитный диполь с моментом  $\mathbf{p}_m$  расположен в одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток  $I$ . Определить величину силы  $F$  и вращающего момента  $M$ , действующих на диполь, если расстояние между ним и проводом равно  $r$ , а его декартовы компоненты соответственно равны  $p_{mx}$  и  $p_{my}$  (см. рис. 9.19).

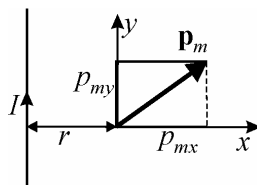


Рис. 9.19. Взаимное расположение магнитного диполя  $\mathbf{p}_m$  и прямого провода с током  $I$  (задача 9.4.17)

**Ответ:**  $F = \frac{\mu_0 I p_{mx}}{2\pi r^2}$ ; сила направлена от нас перпендикулярно

плоскости рисунка;

$M = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sqrt{(p_{mx})^2 + (p_{my})^2}$ , момент направлен в плоскости ри-

сунка под углом  $\alpha = \arctg \frac{p_{mx}}{p_{my}}$  к оси  $X$ .

**Задача 9.4.18.** Точечный магнитный диполь  $\mathbf{p}_m$  расположен перпендикулярно к длинному прямому проводу, по которому течет ток  $I$  (см. рис. 9.20). Определить магнитную силу, действующую на диполь, если расстояние между проводом и диполем равно  $r$ .

**Ответ:**  $F = F_x = \frac{\mu_0 p_m I}{2\pi r^2}$ .

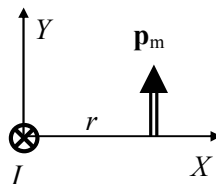


Рис. 9.20. Магнитный диполь в магнитном поле прямого провода с током  $I$  (задача 9.4.18)

### Литература к главе 9

1. *Матвеев А.Н.* Электричество и магнетизм. – М.: Оникс 21 век, 2005, § 39.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. т.III. Электричество, –М., Физматлит, 2006, §§ 49, 52, 62, 69, 72.
3. *Калашиников С.Г.* Электричество. – М.: Физматлит, 2003, §§ 96-102.
4. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Физматлит, 2003, глава IV.

## Глава 10

## МАГНЕТИКИ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

## § 10.1 Теоретический материал

Любое вещество состоит из атомов и молекул, в которых электроны находятся в состоянии непрерывного движения, образуя микроскопические замкнутые токи, обладающие магнитным моментом (см. главу 7). Кроме этого, электроны в атомах и нуклоны в атомных ядрах обладают спиновыми магнитными моментами.

**Магнитный момент атома** определяется векторной суммой магнитных моментов орбитального и спинового моментов электронов и спинового момента атомного ядра. В отсутствие внешнего магнитного поля атомы разных элементов, в зависимости от строения их электронных оболочек, могут как иметь магнитный момент, так и не иметь его (при полной компенсации всех моментов внутри атома).

**Магнитный момент вещества** определяется векторной суммой магнитных моментов входящих в него атомов.

**Магнетики.** Под действием внешнего магнитного поля все вещества приобретают макроскопические собственные магнитные моменты, величины которых в разных веществах различаются на много порядков. Магнетиком можно назвать любую среду (тело), когда рассматривается ее реакция на магнитное поле. По своим электрическим свойствам магнетики могут быть как проводниками, так и диэлектриками и полупроводниками. Некоторые магнетики обладают собственным большим магнитным моментом и при отсутствии внешнего магнитного поля (постоянные магниты).

**Намагничивание** – процесс приобретения телами макроскопического магнитного момента под действием внешнего магнитного поля.

**Намагниченность** – макроскопическая локальная характеристика магнитного состояния вещества. Вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  является локальной объемной плотностью магнитного момента, т.е. численно равен магнитному моменту единичного объема вещества:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}_{mi},$$

где  $\Delta V$  – физически бесконечно малый объем в окрестности точки  $\mathbf{r}$ , а  $\mathbf{p}_{mi}$  – магнитные моменты атомов, входящих в данный объем.

**Размерности единиц измерения:** в системе единиц СИ  $[p_m] = \text{А} \cdot \text{м}^2$ ,  $[M] = \text{А}/\text{м}$ .

В магнитных средах вектор индукции магнитного поля можно представить как сумму двух частей: одна часть порождается токами проводимости (электрический ток в проводах, катушках и т.д.), другая обусловлена намагниченностью среды и порождается связанными (молекулярными) токами.

**Вектор напряженности** магнитного поля  $\mathbf{H}$  вводится соотношением

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (10.1)$$

где  $\mathbf{B}$  – вектор магнитной индукции в магнетике,  $\mu_0$  – магнитная постоянная. В системе единиц СИ размерность напряженности магнитного поля  $[H] = \text{А}/\text{м}$  совпадает с размерностью намагниченности.

По своей сути вектор  $\mathbf{H}$  играет в магнетизме ту же роль, какую в теории электрического поля играет вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$  (см. главу 4).

**Уравнения магнитостатики при наличии магнитных сред:**  
дифференциальный вид:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (10.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}; \quad (10.3)$$

интегральный вид:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad (10.4)$$

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = I, \quad (10.5)$$

где  $\mathbf{j}$  – вектор объёмной плотности тока проводимости,  $I$  – полный ток проводимости, пронизывающий произвольную поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $L$ .

В магнитных средах вектор индукции  $\mathbf{B}$  является вихревым, как и в вакууме, то есть всегда выполняется  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ . Вектор напряженности  $\mathbf{H}$  будет вихревым, если  $\text{div } \mathbf{M} = 0$ , а в общем случае

он содержит как вихревую составляющую, обусловленную токами проводимости, так и потенциальную.

**Граничные условия** для нормальных ( $n$ ) и тангенциальных ( $\tau$ ) компонентов магнитных векторов:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (10.6)$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i. \quad (10.7)$$

(10.7) в векторной форме:

$$[\mathbf{n} (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = \mathbf{i}, \quad (10.7')$$

где  $\mathbf{i}$  – вектор поверхностной плотности тока проводимости на границе сред,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали, направленный от среды 1 к среде 2.

Если поверхностных токов проводимости нет, то тангенциальная компонента поля  $\mathbf{H}$  сохраняется

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (10.8)$$

Во многих случаях намагниченность среды пропорциональна величине напряженности магнитного поля  $H$  в ней, а ее магнитные свойства не зависят от направления намагничивания. Для такой "линейной" и изотропной среды

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad (10.9)$$

где коэффициент  $\chi$  называется магнитной восприимчивостью. В таких средах  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  также связаны линейно

$$\mathbf{B} = (1+\chi)\mu_0 \mathbf{H} = \mu \mu_0 \mathbf{H}. \quad (10.10)$$

Величина  $\mu = (1+\chi)$  называется магнитной проницаемостью. Для диамагнетиков  $0 < \mu < 1$  ( $\chi < 0$ ), для парамагнетиков  $\mu > 1$  ( $\chi > 0$ ) и можно считать, что  $\chi$  и  $\mu$  постоянны ( $\mu$  мало отличается от единицы).

Формулы (10.9), (10.10) неприменимы к ферромагнетикам. Ферромагнитные тела разбиваются на малые по сравнению с размером самого тела области спонтанной намагниченности – домены, внутри которых локальная величина векторов намагниченности  $M_0$  почти не зависит от наличия внешнего поля. Намагничивание ферромагнетика внешним полем связано со смещением доменных границ и поворотом внутримолекулярных векторов намагниченности. При этом средняя намагниченность ферромагнитных тел, усредненная по доменам, уже сильно зависит от внешнего поля, также же как и

величина магнитной индукции, но эти зависимости  $M(H)$  и  $B(H)$  нелинейные и обладает гистерезисом (т.е.  $M$  и  $B$  зависят не только от  $H$ , но и от предистории намагничивания). В связи с этим магнитная проницаемость ферромагнетиков, если ее определить формально по (10.10) как  $\mu = \frac{B(H)}{\mu_0 H}$ , не будет константой, а также яв-

ляется нелинейной гистерезисной функцией  $\mu(H)$  и может меняться в широких пределах от  $10^3$ - $10^5$  (в малых полях порядка  $0 < H < M_0$ ) до  $\mu \rightarrow 1$  (в сильных полях  $H \gg M_0$ ).

### Свойства вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$

В магнитной среде вектор  $\mathbf{H}$  является суммой двух различных по физическому смыслу слагаемых  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{M}$  и поэтому носит вспомогательный характер. В математическом отношении использование векторного поля  $\mathbf{H}$  во многих случаях упрощает расчеты магнитных полей в магнетиках.

В "линейных" магнитных средах, подчиняющихся (10.9), (10.10), векторное поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  по своим свойствам аналогично вихревому полю магнитной индукции  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . При этом само поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  определяется только *токами проводимости*, линии поля  $\mathbf{H}$  замкнуты, и в областях, где нет токов проводимости, они непрерывны и не зависят от присутствия магнитной среды (если эта среда бесконечна или границы имеющихся разных сред совпадают с линиями поля  $\mathbf{H}_0$  этих же токов в вакууме).

В таких случаях для нахождения поля  $\mathbf{H}$  в магнетиках можно использовать все формулы, относящиеся к расчету поля магнитной индукции  $\mathbf{B}$  в вакууме (глава 7), если только убрать из этих формул размерный множитель  $\mu_0$ . Именно в таких ситуациях использование поля  $\mathbf{H}$  при решении задач наиболее результативно.

В остальных случаях поле  $\mathbf{H}$ , помимо вихревой, может иметь и потенциальную компоненту, у которой  $\text{div } \mathbf{H} \neq 0$ . Так будет, например, если границы разных магнитных сред не совпадают с линиями внешнего поля  $\mathbf{H}_0$ , как они были в вакууме в отсутствие магнетиков (например, см. далее задачу 10.3.5), а также при наличии постоянных магнитов.

**Краевая магнитостатическая задача:** дифференциальные уравнения (10.2)-(10.3) вместе с граничными условиями (10.6)-(10.7) и материальным уравнением (10.9) или (10.10) полностью определяют задачу нахождения полей и намагниченности. Общие



методы нахождения решений таких задач и доказательство их единственности рассматриваются в соответствующих разделах математической физики.

В курсе общей физики рассматриваются относительно простые задачи с элементами симметрии, которые позволяют не решать дифференциальные уравнения, а сразу использовать интегральные соотношения (10.4) - (10.5) и применять простые наглядные методы решения, основанные на 1) модели молекулярных токов и 2) модели "магнитных зарядов"

### Метод молекулярных токов

Магнитное поле, создаваемое намагниченным веществом, можно описать введением макроскопических "молекулярных токов", отличных от тока проводимости [1, §38]. Вектор объёмной плотности молекулярных токов  $\mathbf{j}'$  определяется соотношением:

$$\mathbf{j}' = \text{rot } \mathbf{M}. \quad (10.11)$$

Сила молекулярного тока  $I'$  через произвольную поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $L$ , определяется интегральным соотношением, следующим из (10.11)

$$I' = \int_S \mathbf{j}' \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}, \quad (10.12)$$

В отличие от тока проводимости, молекулярный ток через полную площадь любого сечения намагниченного тела равен нулю.

Поле магнитной индукции  $\mathbf{B}'(\mathbf{r})$ , создаваемое намагниченным веществом, эквивалентно полю, создаваемому молекулярными токами  $\mathbf{j}'(\mathbf{r})$  в вакууме. При этом полный вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  определяется эффективной плотностью тока  $\mathbf{j}_\Sigma$ , равного сумме плотности токов проводимости и молекулярных токов

$$\mathbf{j}_\Sigma = \mathbf{j} + \mathbf{j}'.$$

С введением молекулярных токов дифференциальное и интегральное уравнения магнитостатики (10.3), (10.5) можно записать в виде

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_\Sigma, \quad (10.13)$$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}_\Sigma \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I_\Sigma, \quad (10.14)$$

где  $I_\Sigma = I + I'$  – величина эффективного тока через поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $L$ .

В однородных изотропных магнитных средах (где  $\mu$  и  $\chi$  не зависят от координат) плотность молекулярных токов пропорцио-

нальна плотности токов проводимости:

$$\mathbf{j}' = \text{rot } \mathbf{M} = \chi \text{ rot } \mathbf{H} = \chi \mathbf{j}. \quad (10.15)$$

В областях, где токов проводимости нет ( $\mathbf{j} = 0$ ), объемные молекулярные токи также отсутствуют, но поверхностные молекулярные токи могут присутствовать на границах раздела сред, если на них имеется скачок тангенциальной составляющей вектора  $\mathbf{M}$ .

Граничное условие для вектора намагниченности следует из (10.12) и имеет вид:

$$M_{2\tau} - M_{1\tau} = i' \quad (10.16)$$

или, в векторной форме,

$$[\mathbf{n} (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)] = \mathbf{i}', \quad (10.16')$$

где  $\mathbf{i}'$  – вектор поверхностной плотности молекулярных токов на границе,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали, направленный от среды 1 к среде 2.

### Метод "магнитных зарядов" или скалярного потенциала

Данный метод [1, §38] удобен при рассмотрении задач, в которых нет токов проводимости (например, случай постоянных магнитов или непроводящих магнитных сред).

Введем вспомогательную функцию

$$\rho_m(\mathbf{r}) = -\text{div } \mathbf{M}. \quad (10.17)$$

Тогда при отсутствии токов проводимости ( $\mathbf{j} = 0$ ) уравнения магнитостатики (10.2), (10.3) можно переписать в виде

$$\text{div } \mathbf{H} = \rho_m, \quad \text{rot } \mathbf{H} = 0.$$

Данные уравнения идентичны уравнениям электростатики

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0,$$

то есть  $\rho_m(\mathbf{r})$  *формально* играет роль объемной плотности "магнитных зарядов", которые являются источниками потенциального поля  $\mathbf{H}$  и по своей роли эквивалентны плотности электрических зарядов (точнее, величине  $\rho/\varepsilon_0$ ) в электростатике.

В однородно намагниченных средах  $\rho_m = 0$ , но на границах сред могут быть поверхностные "магнитные заряды", величина которых, как следует из (10.17), равна

$$\sigma_m = -(M_{2n} - M_{1n}) = -(\mathbf{n} (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)), \quad (10.18)$$

где, как и выше, вектор нормали  $\mathbf{n}$  направлен от первой среды ко

второй.

В связи с этой аналогией для нахождения магнитоэлектростатического поля можно использовать известные методы и готовые решения, полученные для электростатических задач, а затем произвести формальные замены

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \rightarrow \mathbf{M}, \quad \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \rho_m, \quad \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rightarrow \sigma_m. \quad (10.19)$$

В частности, для скалярного "магнитного потенциала"  $\psi$ , вводимого соотношением

$$\mathbf{H} = -\nabla\psi,$$

получается уравнение Пуассона

$$\nabla^2\psi = -\rho_m,$$

а его решение при заданном распределении плотности "магнитных зарядов" имеет вид, аналогичный решению для электростатического потенциала (глава 2, (2.5)):

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (10.20)$$

Напряженность магнитного поля на расстоянии  $\mathbf{r}$  от точечного "магнитного заряда"  $q_m$  определяется таким же соотношением, как и для электростатического поля точечного электрического заряда

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{q_m \mathbf{r}}{r^2 r}, \quad (10.21)$$

а сила, действующая на точечный "магнитный заряд"

$$\mathbf{F} = q_m \mu_0 \mathbf{H}. \quad (10.22)$$

**Энергия при наличии магнитных сред.** Бесконечно малое приращение плотности энергии в магнетике при изменении магнитного поля

$$\delta w = (\mathbf{H} \delta \mathbf{B}).$$

Если связь полей  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  линейная и изотропная ( $\mu = \text{const}$ ), то для плотности энергии магнитного поля можно записать

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (10.23)$$

Полная энергия  $W$  получается интегрированием плотности энергии по объему области, занимаемой полем

$$W = \int_V w(\mathbf{r}) dV . \quad (10.24)$$

Плотность энергии "жесткого" магнетика (т.е. среды с постоянной намагниченностью  $\mathbf{M}_0 = \text{const}$ ) в заданном поле сторонних источников, магнитная индукция которых в отсутствие магнетика была  $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$ , равна

$$w = - \mu_0 (\mathbf{H}_0 \mathbf{M}_0) \quad (10.25)$$

Если же векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{M}$  связаны линейным образом, т.е. магнитное поле создается не сторонними источниками, а порождается самой намагниченностью, или, наоборот, намагниченность порождается сторонним полем  $\mathbf{H}$ , то

$$w = - \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{H} \mathbf{M}). \quad (10.26)$$

Объемная плотность сил, действующих на магнетик ([1], §39)

$$\mathbf{f} = (\mathbf{M} \nabla) \mathbf{B} . \quad (10.27)$$

Если связь векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{B}$  линейная, то

$$\mathbf{f} = \frac{\mu - 1}{2\mu\mu_0} \nabla B^2 . \quad (10.28)$$

Давление на поверхность раздела магнитных сред

$$p = w_1 - w_2, \quad (10.29)$$

где  $w_1$  и  $w_2$  – плотности энергии по сторонам границы. Сила давления направлена от среды с большей магнитной проницаемостью к среде с меньшей магнитной проницаемостью ([3], §72, п. 5).

## § 10.2. Основные типы задач (классификация)

Задачи можно условно разбить на следующие группы согласно используемым для их решения основным методам и формулам:

10.1. Расчёт магнитных полей и намагниченности на границе раздела магнитных сред.

10.2. Нахождение магнитного поля, создаваемого токами проводимости в магнитной среде с линейной восприимчивостью.

10.3. Применение метода молекулярных токов и магнитных зарядов при расчете магнитного поля постоянных магнитов.

10.4. Задачи для ферромагнетиков с гистерезисом магнитной

восприимчивости.

10.5. Нахождение магнитной энергии и сил в магнитных средах.

### § 10.3. Методы решения и примеры решения задач

#### Задачи типа 10.1

*Расчёт магнитных полей и намагничённости на границе раздела магнитных сред*

**Метод решения.** Использование граничных условий (10.6) – (10.7)

**Задача 10.3.1 (базовая задача).** Бесконечный плоский слой парамагнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$  граничит с вакуумом. Вектор намагничённости имеет величину  $M$  и образует угол  $\alpha$  с нормалью к поверхности (рис. 10.1).

Найти модуль  $B$  вектора магнитной индукции снаружи у поверхности и угол  $\beta$ , образуемый им с нормалью.

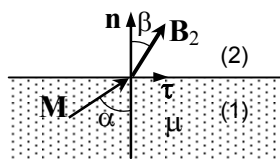


Рис. 10.1. Система координат к задаче 10.3.1

#### Решение

Обозначим величины внутри и вне магнетика индексами 1 и 2 соответственно. Поскольку токов проводимости нет, запишем граничные условия (10.6), (10.8):

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}.$$

Выразим напряженность и индукцию поля внутри магнетика через заданный вектор намагничённости, используя материальные соотношения (10.9, 10.10)

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{M}}{\chi} = \frac{\mathbf{M}}{\mu - 1}, \quad \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mu \mathbf{H}_1 = \mu_0 \frac{\mu}{\mu - 1} \mathbf{M}.$$

Подставляя эти соотношения в граничные условия, и учитывая, что  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{B}_2 / \mu_0$ , получим:

$$B_{2n} = \frac{\mu}{\mu - 1} \mu_0 M \cos \alpha, \quad \frac{B_{2\tau}}{\mu_0} = \frac{M \sin \alpha}{\mu - 1}$$

откуда следует:

$$B_2 = \frac{\mu_0 M}{\mu - 1} \sqrt{(\mu \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = \frac{\mu_0 M}{\mu - 1} \sqrt{(\mu^2 - 1) \cos^2 \alpha + 1},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{B_{2\tau}}{B_{2n}} = \frac{1}{\mu} \operatorname{tg} \alpha$$

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0 M}{\mu - 1} \sqrt{(\mu^2 - 1) \cos^2 \alpha + 1}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{B_{\tau}}{B_n} = \frac{1}{\mu} \operatorname{tg} \alpha.$

### Задачи типа 10.2

*Нахождение магнитного поля, создаваемого токами проводимости в магнитных средах с линейной восприимчивостью*

#### Метод решения

а) *Пространственные токи в проводящей "линейной" изотропной магнитной среде* ( $\mu = \text{const}$ ). В этом случае плотность объемных молекулярных токов  $\mathbf{j}'(\mathbf{r})$  пропорциональна плотности токов проводимости  $\mathbf{j}' = \chi \mathbf{j}$  (10.15). Сумма этих токов приводит к эффективному току  $\mathbf{j}_{\Sigma}$ , который в  $\mu$  раз больше тока проводимости:

$$\mathbf{j}_{\Sigma} = \mathbf{j} + \mathbf{j}' = (1 + \chi) \mathbf{j} = \mu \mathbf{j}. \quad (10.30)$$

В силу линейности уравнения (10.13), индукция магнитного поля  $\mathbf{B}$  в такой среде будет в  $\mu$  раз больше по сравнению с индукцией  $\mathbf{B}_0$ , которая создавалась бы этими же токами проводимости в вакууме:

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{B}_0 = \mu \mu_0 \mathbf{H}_0. \quad (10.31)$$

б) *Линейные токи в магнитной непроводящей среде*. При протекании тока проводимости  $I$  по тонкому линейному проводнику объемные молекулярные токи в окружающей непроводящей среде отсутствуют, так как в ней  $\mathbf{j} = 0$ . Но на границе среды с проводником возникает продольный поверхностный молекулярный ток, равный по величине намагниченности среды на границе с проводом:  $i' = M$ . Полный молекулярный ток вдоль линейного проводника равен

$$I' = \chi I \quad (10.32)$$

(более подробно см. ниже задачу 10.3.2).

Ввиду подразумеваемой тонкости линейных проводников токи  $I$  и  $I'$  можно считать пространственно совпадающими, поэтому влияние магнитной среды на поле вне проводника эквивалентно

увеличению тока в проводнике в  $\mu$  раз:

$$I_{\Sigma} = I + I' = (1 + \chi)I = \mu I.$$

Поэтому и в этом случае индукция магнитного поля  $\mathbf{B}$  снаружи проводников также увеличится в  $\mu$  раз по сравнению с индукцией  $\mathbf{B}_0$  от этих линейных токов в вакууме.

Если же и провод сделан из магнетика, то его собственная намагниченность не влияет на индукцию *вне* провода, поскольку полный молекулярный ток через поперечное сечение самого проводника (объемный ток плюс поверхностный) всегда равен нулю (подробнее см. задачу 10.3.3).

Важно отметить, что все вышесказанное справедливо только в случае, если *однородный* магнетик бесконечен, или же занимает область, *границы которой совпадают с линиями исходного поля*  $\mathbf{B}_0$  или линиями совпадающего с ним поля  $\mathbf{H}_0$ , какими они были бы в отсутствие магнитной среды (в вакууме). То же относится к случаю, когда среда неоднородна (т.е. проницаемость  $\mu = \mu(\mathbf{r})$  зависит от координат), но линии  $\mathbf{H}_0$  совпадают с поверхностями постоянства  $\mu$ . В этих случаях везде  $\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$ , поле  $\mathbf{H}$  в магнетике определяется только токами проводимости и будет таким же, как в вакууме.

Поэтому решение для таких задач целесообразно начинать с нахождения поля  $\mathbf{H}$ , используя формулы для расчета магнитных полей от токов в вакууме (глава 7), убрав из них множитель  $\mu_0$ . Затем, зная  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ , поле векторов  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  можно найти по формулам (10.9) и (10.10) соответственно. Благодаря магнетикю индукция  $\mathbf{B}$  возрастет в  $\mu$  раз, а вместе с ней также возрастут в  $\mu$  раз и магнитные потоки через контуры и, соответственно, величины их коэффициентов самоиндукции и взаимной индукции (глава 8).

Если же линии  $\mathbf{H}_0$  не параллельны границам магнетика или поверхностям постоянства  $\mu$ , нахождение магнитного поля требует точного решения краевой задачи. В некоторых случаях, когда можно достаточно просто найти распределение молекулярных токов или "магнитных зарядов" по границам магнетика, задача допускает и элементарное решение (см. задачу 10.3.5).

**Задача 10.3.2 (базовая задача).** Прямой бесконечно длинный немагнитный провод радиуса  $a$ , по которому течет ток  $I$ , находится в непроводящей бесконечной однородной среде с магнитной про-

нищаемостью  $\mu$ . Найти намагниченность  $M(r)$ , магнитную индукцию  $B(r)$ , напряженность поля  $H(r)$  и молекулярный ток  $I'(r)$ .

### Решение

В силу осевой симметрии силовые линии векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  являются окружностями, на которых их модули  $H$  и  $B$  постоянны (рис. 10.2). Записывая теорему (10.5) о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  для контура радиуса  $r$ , получаем

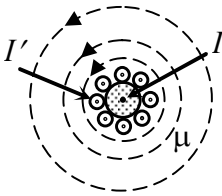


Рис. 10.2. К расчету магнитного поля, создаваемого бесконечным немагнитным проводом в магнитной среде (задача 10.3.2).  $I$  – ток проводимости в проводе,  $I'$  – поверхностный молекулярный ток

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r},$$

а ввиду магнитной однородности среды

$$B(r) = \mu\mu_0 H(r) = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r} \quad \text{и}$$

$$M(r) = (\mu - 1)H(r) = (\mu - 1) \frac{I}{2\pi r}.$$

Из-за однородности среды объемные молекулярные токи отсутствуют, но имеется поверхностный молекулярный ток на границе провода и среды. Согласно (10.16) его поверхностная плотность

$$i' = M(a) = \chi H(a) = (\mu - 1) \frac{I}{2\pi a},$$

где  $a$  – радиус провода. Направление  $i'$  при  $\mu > 1$  совпадает с направлением тока в проводе. Полный поверхностный молекулярный ток

$$I' = i' \cdot 2\pi a = (\mu - 1)I.$$

Таким образом, влияние намагничиваемой среды на магнитное поле учитывается молекулярным током, который добавляется к току проводимости, текущему по проводнику. Магнитная индукция вне провода определяется величиной эффективного полного тока  $I_\Sigma = I + I' = \mu I$ :

$$B(r) = \mu_0 \frac{I_\Sigma}{2\pi r} = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r}.$$

**Ответ:**  $M(r) = (\mu - 1) \frac{I}{2\pi r}, \quad B(r) = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r}, \quad H(r) = \frac{I}{2\pi r},$

$$I' = (\mu - 1)I.$$



**Задача 10.3.3.** Бесконечный прямолинейный однородный провод радиуса  $a$ , сделанный из материала с магнитной проницаемостью  $\mu_1$ , находится в непроводящей бесконечной однородной среде с магнитной проницаемостью  $\mu_2$ .

По проводу течет постоянный ток  $I$ . Найти напряженность поля  $H(r)$ , магнитную индукцию  $B(r)$ , намагниченность  $M(r)$ , объемную  $j'(r)$  и поверхностную  $i'$  плотность молекулярных токов внутри провода и снаружи.

### Решение

В силу осевой симметрии системы линии полей  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{M}$  являются окружностями, на которых модули  $H$ ,  $B$  и  $M$  постоянны (рис. 10.3). Обозначим переменные внутри провода индексом 1, вне него – 2.

**Область  $r \geq a$ .** Решение для  $H(r)$ ,  $B(r)$  и  $M(r)$  в наружной области разобрано в предыдущей задаче, в полученных ответах нужно только поставить индекс 2.

**Область  $r < a$ .** Записывая теорему (10.5) о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  для контура радиуса  $r$ , получаем

$$2\pi r H_1(r) = I(r) = I \frac{r^2}{a^2},$$

откуда следует

$$H_1(r) = \frac{I}{2\pi a^2} r,$$

где  $I(r)$  обозначает ТОК, протекающий через круг радиуса  $r$ . Отсюда получаем

$$B_1(r) = \mu_0 \mu_1 H_1(r) = \mu_0 \mu_1 \frac{I}{2\pi a^2} r,$$

$$M_1(r) = (\mu_1 - 1) H_1(r) = (\mu_1 - 1) \frac{I}{2\pi a^2} r$$

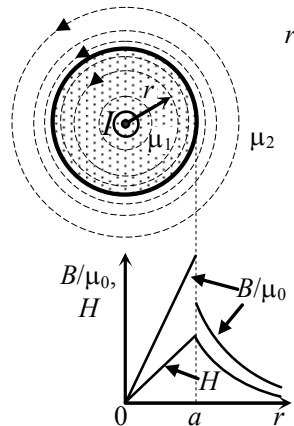


Рис. 10.3. К расчету магнитного поля, создаваемого бесконечным магнитным проводом в магнитной среде (задача 10.3.3). Пунктир – линии поля  $\mathbf{H}$

Ввиду магнитной однородности материала провода плотность молекулярных токов (10.15) внутри него, согласно (10.32), равна  $j'_1 = (\mu_1 - 1)j$ ,

где  $j = \frac{I}{\pi a^2}$  – плотность токов проводимости. Полная поверхностная плотность молекулярного тока на границе провод-среда (10.16):

$$i' = M_2(a) - M_1(a) = (\mu_2 - 1) \frac{I}{2\pi a} - (\mu_1 - 1) \frac{I}{2\pi a} = \frac{I}{2\pi a} (\mu_2 - \mu_1).$$

**Ответ:**  $r < a$ :  $H_1(r) = \frac{I}{2\pi a^2} r$ ,  $B_1(r) = \mu_0 \mu_1 \frac{I}{2\pi a^2} r$ ,

$$M_1(r) = (\mu_1 - 1) \frac{I}{2\pi a^2} r; \quad j'_1 = (\mu_1 - 1) \frac{I}{\pi a^2};$$

$r \geq a$ :  $H_2(r) = \frac{I}{2\pi r}$ ,  $B_2(r) = \mu_2 \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$ ,

$$M_2(r) = (\mu_2 - 1) \frac{I}{2\pi r}; \quad j' = 0,$$

$r \equiv a$ :  $i' = \frac{I}{2\pi a} (\mu_2 - \mu_1).$

Картина линий для полей  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  и качественный график их зависимости от  $r$  показаны на *рис. 10.3* для случая  $\mu_1 > \mu_2$ .

*Замечание.* Полный поверхностный молекулярный ток можно представить в виде суммы вкладов  $I'_{2\text{пов}}$  и  $I'_{1\text{пов}}$  соответственно от внешней и внутренней приграничной намагниченности

$$I' = 2\pi a i' = I(\mu_2 - \mu_1) = (\mu_2 - 1)I - (\mu_1 - 1)I = I'_{2\text{пов}} + I'_{1\text{пов}}.$$

Таким образом, поверхностный молекулярный ток, обусловленный намагниченностью материала провода, равен

$$I'_{1\text{пов}} = -(\mu_1 - 1)I.$$

Полный же объемный молекулярный ток в проводе  $I'_{1\text{об}} = \pi a^2 j' = (\mu_1 - 1)I$ . Итак,

$$I'_{1\text{пов}} + I'_{1\text{об}} = 0.$$

Это – следствие указанного выше общего положения, что молекулярный ток через площадь любого сечения намагниченного тела равен нулю. Поэтому суммарный молекулярный ток, существенный для расчета поля вне провода, равен  $I' = (\mu_2 - 1)I$ , то есть определяется только внешней средой и не зависит от магнитной проницаемости самого провода.

**Задача 10.3.4.** По проводящей бесконечной плоскости течет постоянный ток с поверхностной плотностью  $i$  (рис. 10.4). С одной стороны к плоскости прилегает бесконечная пластина конечной толщины из материала с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Найти во всем пространстве магнитную индукцию  $\mathbf{B}$ , напряженность  $\mathbf{H}$ , намагниченность  $\mathbf{M}$  и молекулярные токи.

### Решение

Пусть ток проводимости течет по направлению от нас в плоскость рисунка. В отсутствие магнетика векторы индукции в силу симметрии были бы равны по модулю, параллельны плоскости и противоположно направлены по ее разным сторонам ( $\mathbf{B}_1$  и  $-\mathbf{B}_1$  на рис. 10.4). Величина индукции со-

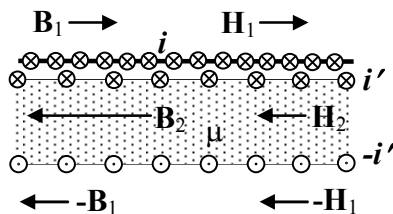


Рис. 10.4. К расчету магнитного поля в пластине из магнетика, прилегающей к плоскости с током (задача 10.3.4)

ставляет  $B_1 = \frac{1}{2} \mu_0 i$  (глава 7, зада-

ча 7.3.7), а напряженность магнитного поля  $H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} = \frac{1}{2} i$ . По-

скольку полный молекулярный ток через поперечное сечение пластины равен нулю, то добавление пластины магнетика не меняет вышеуказанных значений магнитного поля *снаружи* от нее.

Внутри магнитного слоя напряженность поля  $H_2 = H_1$  (следствие сохранения тангенциальной компоненты вектора  $\mathbf{H}$  на границе), а индукция

$$B_2 = \mu_0 \mu H_2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu i.$$

Согласно (10.9, 10.10), намагниченность  $M = (\mu - 1)H_1 = \frac{1}{2}(\mu - 1)i$ .

Поскольку намагниченность однородна, объемные молекулярные токи отсутствуют, и имеются только поверхностные молекулярные токи, противоположно направленные на верхней и нижней поверхности, с плотностью  $i' = M = \frac{1}{2}(\mu - 1)i$ .

**Ответ:** Направления векторов магнитного поля и токов пока-

заны на *рис. 10.4*.

$$\text{Снаружи пластины: } B_1 = \frac{1}{2} \mu_0 i; \quad H_1 = \frac{1}{2} i;$$

$$\text{Внутри пластины: } B_2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu i, \quad H_2 = \frac{1}{2} i, \quad M = i' = \frac{1}{2} (\mu - 1) i.$$

**Задача 10.3.5 (базовая задача).** Прямой тонкий бесконечно длинный провод малого радиуса  $a$ , по которому течет ток  $I$ , лежит на поверхности плоского непроводящего однородного магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$ , занимающего половину пространства (*рис. 10.5а*). Найти намагниченность  $\mathbf{M}$ , магнитную индукцию  $\mathbf{B}$ , напряженность  $\mathbf{H}$  и молекулярные токи во всем пространстве.

### Решение

В данной задаче граница магнетика не совпадает с круговыми линиями поля  $\mathbf{H}_0$  от линейного тока  $I$  в вакууме, поэтому поле  $\mathbf{H}$  не будет совпадать с  $\mathbf{H}_0$ . Путь решения задачи – найти распределение молекулярных токов и на основании его выразить поле индукции  $\mathbf{B}$ .

В силу однородности среды и отсутствия в ней токов проводимости объемные молекулярные токи отсутствуют (10.15). Рассмотрим распределение поверхностных молекулярных токов.

Возьмем произвольный участок поверхности, не прилегающий к проводу (окрестность точки  $A$  на *рис. 10.5а*). Протекающий по нему поверхностный молекулярный ток  $i'$  создал бы у поверхности этого участка только тангенциальные компоненты индукции

$$B_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \mu_0 i' \quad (\text{см. глава 7, задача 7.3.7}).$$

Молекулярные токи, текущие на всей остальной поверхности магнетика, и ток проводимости, текущий по проводу, в окрестности точки  $A$  могут создать только нормальные компоненты поля  $\mathbf{B}$ .

На поверхности магнетика токов проводимости нет, поэтому тангенциальные компоненты поля  $\mathbf{H}$  на границе должны быть непрерывны. Учитывая, что  $H_{1t} = \frac{B_{1t}}{\mu_0}$  и  $H_{2t} = \frac{B_{2t}}{\mu_0 \mu}$ , это граничное

условие дает

$$\frac{1}{2} i' = -\frac{1}{2\mu} i',$$

откуда следует  $i' = 0$ , то есть поверхностные молекулярные токи на плоской границе отсутствуют.

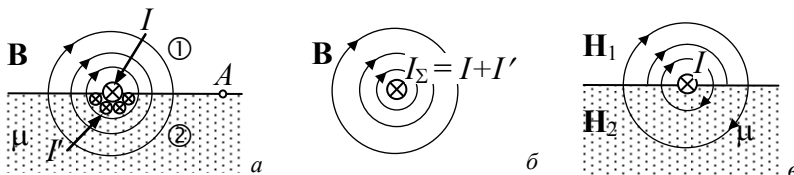


Рис. 10.5. К нахождению магнитного поля от провода с током, лежащего на границе плоского полубесконечного магнетика (задача 10.3.5):

*a* – распределение молекулярного тока  $I'$  и линии поля  $\mathbf{B}$ .  $I$  – ток проводимости;

*б* – эквивалентная задача о магнитном поле  $\mathbf{B}$  прямолинейного тока в вакууме; *в* – линии поля  $\mathbf{H}$

На границе самого провода с магнитной средой ( $r = a$ ) имеется скачок тангенциальной компоненты намагниченности, вызывающий молекулярный ток с поверхностной плотностью  $i' = M(a)$  и полной величины  $I' = i' \pi a$ , который добавляется к току проводимости  $I$ , образуя с ним суммарный эффективный линейный ток

$$I_{\Sigma} = I + I'.$$

Ввиду тонкости провода эффективный ток также можно считать линейным. Поэтому, заменяя поле, создаваемое магнитной средой, полем молекулярных токов, приходим к задаче о находящемся в вакууме линейном тонком бесконечном проводе с эффективным током  $I_{\Sigma}$  (рис. 10.5б). Линии магнитной индукции вокруг него  $\mathbf{B}$  будут окружностями, а величина  $B$  в зависимости от расстояния до провода  $r$  определяется из (10.14):

$$B_1(r) = B_2(r) = B(r) = \mu_0 \frac{I_{\Sigma}}{2\pi r}.$$

Поскольку  $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$  и  $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ , линии полей  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{M}$  также будут окружностями. Отметим, что все это справедливо на расстояниях от провода, много больших его радиуса  $a$ , когда несимметричность распределения молекулярных токов около провода становится несущественной.

Ввиду того, что эффективный ток  $I_{\Sigma}$  пока не известен, для нахождения величины полей  $B(r)$  и  $H(r)$  запишем теорему (10.5) о

циркуляции вектора  $\mathbf{H}$ , выбрав в качестве контура окружность радиуса  $r$ :

$$\pi r H_1 + \pi r H_2 = I.$$

Подставляя  $H_1 = \frac{B}{\mu_0}$  и  $H_2 = \frac{B}{\mu\mu_0}$ , получаем

$$\pi r \left( \frac{B}{\mu_0} + \frac{B}{\mu_0\mu} \right) = I,$$

откуда следует

$$B(r) = \mu_0 \frac{\mu}{\mu+1} \frac{I}{\pi r}, \quad H_1(r) = \frac{\mu}{\mu+1} \frac{I}{\pi r}, \quad H_2(r) = \frac{1}{\mu+1} \frac{I}{\pi r},$$

$$M(r) = (\mu-1)H_2 = \frac{\mu-1}{\mu+1} \frac{I}{\pi r}, \quad i' = M(a) = \frac{\mu-1}{\mu+1} \frac{I}{\pi a},$$

где  $a$  – радиус провода. Линии поля  $\mathbf{H}$  показаны на *рис. 10.5в*. Полный молекулярный ток на границе провода с магнетиком, представляющей в сечении полуокружность длины  $\pi a$ , равен

$$I' = \pi a \cdot i'(a) = \pi a \cdot M(a) = I \frac{\mu-1}{\mu+1}.$$

**Ответ:**  $M(r) = \frac{\mu-1}{\mu+1} \frac{I}{\pi r}, \quad B(r) = \mu_0 \frac{\mu}{\mu+1} \frac{I}{\pi r},$

$$H_1(r) = \frac{\mu}{\mu+1} \frac{I}{\pi r}, \quad H_2(r) = \frac{1}{\mu+1} \frac{I}{\pi r}, \quad I' = I \frac{\mu-1}{\mu+1}.$$

*Замечание.* Векторное поле  $\mathbf{H}$  не является чисто вихревым, и его линии терпят разрыв на границе магнетика.

**Задача 10.3.6.** Длинный по сравнению со своим радиусом соленоид заполнен неоднородным парамагнетиком с восприимчивостью, зависящей от расстояния  $r$  от по закону  $\chi(r) = ar^2$ , где  $a = \text{const}$ . На оси соленоида индукция магнитного поля равна  $B_0$ .

Найти намагниченность  $M(r)$ , магнитную индукцию  $B(r)$  и плотность объемных  $j'(r)$  и поверхностных  $i'$  молекулярных токов внутри соленоида. Краевыми эффектами пренебречь.

### Решение

Введем правую систему декартовых координат  $xyz$  с осью  $Z$ , совпадающей с осью соленоида. В вакууме в соленоиде с длиной,

много большей его радиуса, линии напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}_0$  параллельны его оси, а значит и величина поля  $\mathbf{H}_0$  в соленоиде везде одинакова (кроме области вблизи его концов). Поскольку линии поля  $\mathbf{H}_0$  параллельны поверхностям постоянства величины  $\mu(r) = \text{const}$ , поле  $\mathbf{H}$  при введении магнетика останется без изменения, и в данном случае его величина определяется заданным по условию значением в центре

$$H = H_z = \frac{B_0}{\mu\mu_0} = \frac{B_0}{\mu_0},$$

так как в центре  $\mu(0) = 1$ . Исходя из известного значения  $H$ , с помощью (10.9), (10.10) получаем

$$M(r) = M_z(r) = \chi(r)H = ar^2H = ar^2 \frac{B_0}{\mu_0},$$

$$B(r) = \mu_0(1+\chi)H = (1+ar^2) B_0.$$

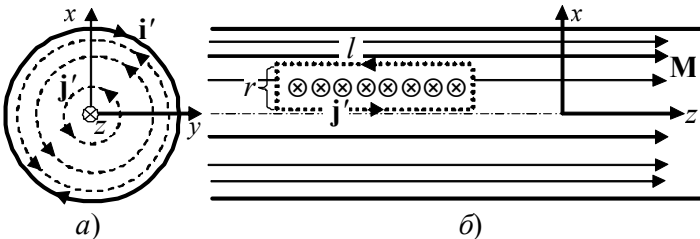


Рис. 10. 6. К расчету магнитного поля соленоида, заполненного неоднородным магнетиком (задача 10.3.6).

*a* – вид с торца соленоида: линии объемных ( $\mathbf{j}'$ ) и поверхностных ( $\mathbf{i}'$ ) молекулярных токов;

*б* – центральное осевое сечение соленоида: линии намагниченности  $\mathbf{M}$ .

Чтобы найти молекулярные токи, можно воспользоваться интегральным соотношением (10.12) о циркуляции вектора  $\mathbf{M}$ .

В силу осевой симметрии задачи линии молекулярных токов  $\mathbf{j}'$  являются окружностями, лежащими в перпендикулярных сечениях соленоида (рис.10.6а). Рассмотрим в плоскости  $xz$  прямоугольный контур длины  $l$  и высоты  $r$ , одна сторона которого совпадает с осевой линией ( $r = 0$ ) (пунктир на рис.10.6б). Выберем направление обхода так, чтобы положительная нормаль к контуру совпадала с направлением орта  $\mathbf{e}_\varphi$  цилиндрической системы координат. Циркуляция вектора  $\mathbf{M}$  по данному контуру равна

$$\{M(0) - M(r)\}l = -ar^2 l \frac{B}{\mu_0},$$

Приравнявая циркуляцию вектора  $\mathbf{M}$  молекулярному току  $I'$  через данный контур (10.12), получаем соотношение

$$\int_0^r j' l dr = -ar^2 l \frac{B_0}{\mu_0}.$$

Дифференцируя его по  $r$ , получаем

$$j'(r) = -2ar \frac{B_0}{\mu_0}.$$

Разумеется,  $j'(r)$  можно найти и непосредственно из дифференциального соотношения (10.11)  $\mathbf{j}' = \text{rot } \mathbf{M}$ , исходя из найденного выше выражения для  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ . Учитывая, что намагниченность имеет только  $z$ -компоненту, в цилиндрических координатах ротор будет иметь  $\phi$ -компоненту, равную

$$j' = j'_\phi = (\text{rot } \mathbf{M})_\phi = \frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} = -\frac{\partial M_z}{\partial r} = -2ar \frac{B_0}{\mu_0}.$$

На границе магнитной среды ( $r = R$ ) плотность поверхностного молекулярного тока найдем из (10.16):  $i' = i'_\phi = M(R) = aR^2 \frac{B_0}{\mu_0}$ .

Направление линий молекулярных токов  $\mathbf{j}'$  и  $\mathbf{i}'$  показано на рис. 10.6.

$$\text{Ответ: } M(r) = ar^2 \frac{B_0}{\mu_0}, B(r) = (1+ar^2) B_0, j'(r) = -2ar \frac{B_0}{\mu_0},$$

$$i' = R^2 \frac{B_0}{\mu_0}.$$

**Задача 10.3.7.** Найти индуктивность соленоида длины  $l$  и радиуса  $a$  ( $l \gg a$ ), содержащего  $N$  витков, если он заполнен парамагнетиком с неоднородной магнитной проницаемостью  $\mu(r) = 1 + \alpha r$ , где  $r$  – расстояние от оси соленоида,  $\alpha = \text{const}$ .

### Решение

Поскольку линии поля внутри пустого соленоида  $\mathbf{H}_0$  параллельны поверхностям постоянства величины  $\mu(r)$ , поле  $\mathbf{H}$  при введении магнетика останется без изменения и будет, как и в вакууме,



равно  $H = nI$ , где  $n = N/l$  – плотность катушки, а магнитная индукция

$$B(r) = \mu_0 \mu(r) H = \mu_0 (1 + \alpha r) nI.$$

Магнитный поток через один виток контура равен потоку через поперечное сечение  $S$  соленоида:

$$\Phi_1 = \int_S B(r) dS = \int_0^a \mu_0 nI (1 + \alpha r) \cdot 2\pi r dr = \mu_0 nI \pi a^2 \left(1 + \frac{2\alpha}{3} a\right).$$

Полный поток через всю обмотку  $\Phi = N\Phi_1 = LI$ , откуда

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi a^2 \left(1 + \frac{2\alpha}{3} a\right) = \mu_0 n^2 V \left(1 + \frac{2\alpha}{3} a\right),$$

где  $V$  – объем соленоида.

**Ответ:**  $L = \mu_0 n^2 V \left(1 + \frac{2\alpha}{3} a\right).$

*Замечание.* Если  $\mu = 1$  ( $\alpha = 0$ ), то получается известная формула для индуктивности соленоида в вакууме  $L = \mu_0 n^2 V$  (Глава 8, задача 8.3.10).

### Задачи типа 10.3

*Применение метода молекулярных токов и магнитных зарядов при расчете магнитного поля систем с постоянными магнитами*

**Метод молекулярных токов.** Магнитное поле, создаваемое постоянным магнитом с фиксированным распределением намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ , можно найти, заменив магнит эквивалентным распределением молекулярных токов, в общем случае как объемных  $\mathbf{j}' = \text{rot } \mathbf{M}$  (10.11), так и поверхностных  $\mathbf{i}' = [\mathbf{n}(\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)]$  (10.16). Индукция магнитного поля рассчитывается по найденному распределению молекулярных токов аналогично методам нахождения индукции магнитного поля токов в вакууме, рассмотренным в главе 7.

**Метод "магнитных зарядов".** Решение данным способом целесообразно, если задано "замороженное" распределение намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ , из которого можно сразу найти распределение "магнитных зарядов", как поверхностных (10.18)  $\sigma_m = -(\mathbf{n} \cdot (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1))$ , так и объемных (10.17)  $\rho_m(\mathbf{r}) = -\text{div } \mathbf{M}$ . Далее, зная распределение этих зарядов, можно найти поле  $\mathbf{H}$ , используя, по возможности, известное решение аналогичной электростатической задачи.

**Задача 10.3.8 (базовая задача).** Постоянный магнит в виде цилиндра радиуса  $R$  и длины  $2l$  изготовлен из материала с однородной намагниченностью  $\mathbf{M}$ , направленной вдоль его оси. Найти величину индукции и напряженности магнитного поля на оси цилиндра вне и внутри него, считая, что намагниченность не зависит от магнитного поля.

### Решение

**Метод молекулярных токов.** Так как намагниченность однородна, то объемные молекулярные токи отсутствуют, а на боковой поверхности цилиндра имеется круговой поверхностный молекулярный ток плотности  $i' = M$ . Создаваемое этими токами поле  $\mathbf{B}$  аналогично полю соленоида с такой же поверхностной плотностью тока.

Величина магнитной индукции на оси соленоида определяется известной формулой

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 I n (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

(глава 7, задача 7.3.5), где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы, под которыми видны крайние точки соленоида из точки наблюдения  $A$  (рис. 10.7). При выбранном здесь одинаковом направлении отсчета углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  данная формула без изменений пригодна для точек как внутри, так и снаружи соленоида. Подставляя в нее  $In = i' = M$ , получим

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{1}{2} \mu_0 M (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 M \left( \frac{l-z}{\sqrt{R^2 + (l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2 + (l+z)^2}} \right). \end{aligned}$$

Величина напряженности  $H$  магнитного поля внутри магнита определяется соотношением (10.1), что дает

$$H(z) = \frac{B(z)}{\mu_0} - M = \frac{1}{2} M \left( \frac{l-z}{\sqrt{R^2 + (l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2 + (l+z)^2}} - 2 \right).$$

Отметим, что для нахождения  $H$  внутри магнита соотношение (10.10) применить нельзя, поскольку намагниченность не зависит от  $H$ .

Вне магнита согласно (10.10)  $H(z) = B(z)/\mu_0$ .

**Метод "магнитных зарядов".** Ввиду однородности намагниченности внутри магнита магнитные заряды возникают только на

его торцах и, согласно (10.18), имеют поверхностные плотности  $\sigma_m = \pm M$ . Таким образом, поле  $\mathbf{H}$  создается двумя противоположно заряженными соосными тонкими дисками, расположенными на расстоянии  $2l$  друг от друга. Электростатическим аналогом, применимым к этой задаче, является равномерно заряженный тонкий диск, электрическое поле на оси которого было найдено в главе 1 (задача 1.3.6) и равно

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} \right),$$

где  $z_0$  – расстояние от центра диска,  $\sigma$  – поверхностная плотность электрического заряда.

Произведем стандартную замену (10.19)

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \sigma/\epsilon_0 \rightarrow \sigma_m$$

и перейдем в нашу систему координат (рис. 10.7 а). Для правого торца с положительным зарядом надо взять  $z_0 = l - z$ , а для левого, с отрицательным зарядом,  $z_0 = l + z$ . Складывая поля от обоих торцов с учетом их направления, получаем ту же, приведенную выше, формулу для  $H(z)$ .

Графики зависимостей  $B(z)$  и  $H(z)$  на оси магнита приведены на рис. 10.7 б для случая  $\frac{l}{R} = 10$ .

Поля  $\mathbf{B}$  для соленоида и цилиндрического магнита совпадают как внутри, так и снаружи их. Поля  $\mathbf{H}$  совпадают у них только снаружи. Внутри соленоида  $H = B/\mu_0$ , а в магните  $\mathbf{H}$  противоположно по направлению, а его величина быстро уменьшается с удалением от торцов. Для тонкого длинного магнита можно считать, что  $H = 0$  в большей части его объема, кроме областей в непосредственной близости

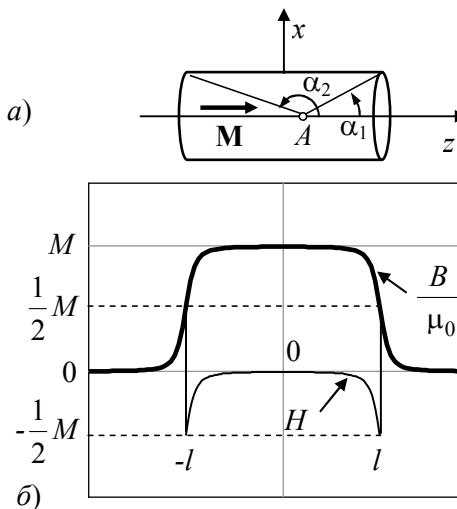


Рис. 10.7. К расчету индукции и напряженности магнитного поля на оси цилиндрического постоянного магнита (задача 10.3.8);

а) Система координат,

б) Зависимость  $B(z)$  и  $H(z)$  на оси магнита

его торцов, где  $H$  испытывает скачок в пределах  $\pm \frac{1}{2}M$ . Отметим, что все найденные величины относятся к осевой линии цилиндра.

$$\text{Ответ: } B(z) = \frac{1}{2} \mu_0 M \left( \frac{l-z}{\sqrt{R^2 + (l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2 + (l+z)^2}} \right);$$

$$\text{Вне магнита: } H(z) = \frac{1}{2} M \left( \frac{l-z}{\sqrt{R^2 + (l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2 + (l+z)^2}} \right).$$

$$\text{Внутри: } H(z) = \frac{1}{2} M \left( \frac{l-z}{\sqrt{R^2 + (l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2 + (l+z)^2}} - 2 \right).$$

**Задача 10.3.9.** Длинный цилиндр радиуса  $R$  изготовлен из материала с "замороженной" однородной намагниченностью, направленной вдоль его оси. Индукция магнитного поля в центре торца данного цилиндра равна  $B_1$ . Найти индукцию  $B_2$  в центре тонкого диска толщины  $h$  ( $h \ll R$ ), отрезанного от этого цилиндра.

### Решение

Так как намагниченность  $M$  однородна, то объемные молекулярные токи отсутствуют, а на боковой поверхности цилиндра имеется круговой поверхностный молекулярный ток плотности  $i' = M$ . Создаваемое этими токами поле  $\mathbf{B}$  аналогично полю соленоида с такой же поверхностной плотностью тока. Величина магнитной индукции в центре торца соленоида равна  $B_1 = \frac{1}{2} \mu_0 i = \frac{1}{2} \mu_0 M$  (глава 7, задача 7.3.5, замечание 2). Из этого соотношения находим величину намагниченности материала  $M = \frac{2B_1}{\mu_0}$ .

Поле в центре тонкого диска с той же намагниченностью можно представить как поле кругового витка с молекулярным током  $I' = hi' = hM$  (см. рис. 10.8). По известной формуле (глава 7, задача 7.3.3, замечание 1) величина индукции в центре витка равна  $B = \mu_0 \frac{I'}{2R}$ , откуда следует

$$B_2 = \mu_0 \frac{I'}{2R} = \mu_0 M \frac{h}{2R} = B_1 \frac{h}{R}.$$

**Ответ:**  $B_2 = B_1 \frac{h}{R}$ .

**Задача 10.3.10.** Постоянный магнит имеет форму тонкого диска радиуса  $R$  и толщины  $h$  ( $h \ll R$ ). Магнитный момент диска  $\mathbf{p}_m$  перпендикулярен его плоскости (рис. 10.8). Предполагая, что намагниченность диска однородна, найти величину магнитной индукции на оси диска в зависимости от расстояния  $z$  от его центра.

**Решение**

Найдем намагниченность материала диска:

$$M = \frac{P_m}{V} = \frac{P_m}{\pi R^2 h}.$$

Так как намагниченность однородна, то объемные молекулярные токи отсутствуют, а на боковой поверхности диска в соответствии с (10.16) течет поверхностный молекулярный ток плотности  $i' = M$ . Полный поверхностный молекулярный ток, текущий по периметру диска, равен

$$I' = i' h = Mh = \frac{P_m}{\pi R^2}.$$

Поскольку диск тонкий, этот ток можно считать линейным и создаваемое им магнитное поле будет совпадать с полем на оси кольца с током  $I = I'$ , определяемым следующей формулой (см. Глава 7, задача 7.3.3)

$$B(z) = \frac{1}{2} \mu_0 I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Подставляя сюда значение силы молекулярного тока  $I'$ , окончательно получаем

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{P_m}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{P_m}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$ .

*Замечание.* На больших расстояниях от диска  $z \gg R$  данная формула переходит в  $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{P_m}{z^3}$ , что совпадает с известным выражением для магнитной индукции на оси магнитного диполя.

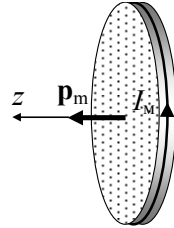


Рис. 10.8. К расчету магнитного поля на оси нормально намагниченного диска (задача 10.3.10)

Вблизи центра диска  $B(0) = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{Mh}{R}$ , что при тонком диске ( $h/R \ll 1$ ) дает  $B(0) \approx 0$ . Такой же близкой к нулю будет величина вектора индукции и внутри диска. Это легко сразу получить из рассмотрения задачи методом "магнитных зарядов". Однородно намагниченный диск эквивалентен тонкому "конденсатору", заряженному с поверхностной плотностью зарядов  $\sigma_m = \pm M$ . Как известно из электростатики, напряженность поля у наружной стороны пластины конденсатора вдали от его краев  $H \approx 0$ , а внутри  $H = \sigma_m = M$ , откуда согласно (10.1) следует  $B = \mu_0(H - M) = 0$ .

**Задача 10.3.11 (базовая задача).** Постоянный магнит в виде длинного цилиндра с однородной "замороженной" намагниченностью  $\mathbf{M}$ , направленной вдоль его оси, разрезан пополам и половинки разведены на расстояние, малое по сравнению с его радиусом  $a$ .

Найти: 1) магнитную индукцию  $B_1$  и напряженность магнитного поля  $H_1$  в зазоре, а также в остальных частях магнита вдали от зазора ( $B_2$  и  $H_2$ ); 2) силу  $F$  притяжения двух половинок магнита.

*Решение методом магнитных зарядов*

Ввиду разрыва нормальной компоненты вектора  $\mathbf{M}$  (пунктир на рис. 10.9) на границах зазора появляются магнитные заряды противоположного знака с поверхностной плотностью  $\sigma_m = \pm M$  (10.18). Таким образом, зазор эквивалентен тонкому плоскому электрическому конденсатору. Напряженность электрического поля внутри плоского конденсатора, как известно из электростатики,  $E = \sigma/\varepsilon_0$  (Глава 1, задача 1.3.9). Произведя замены  $E \rightarrow H_1$ ,  $\sigma/\varepsilon_0 \rightarrow \sigma_m$  (10.18), получаем

$$H_1 = \sigma_m = M, \quad B_1 = \mu_0 H_1 = \mu_0 M.$$

Направление вектора  $\mathbf{H}_1$  совпадает с направлением  $\mathbf{B}_1$ .

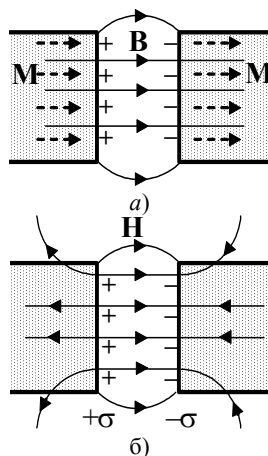


Рис. 10.9. К нахождению магнитного поля в зазоре постоянного магнита (задача 10.3.11)

а) Линии поля индукции  $\mathbf{B}$  и намагниченности  $\mathbf{M}$  (пунктир)

б) Линии поля  $\mathbf{H}$

Вне "конденсатора" поле  $\mathbf{H}$  близко к нулю, т.е. внутри обеих половинок магнита вдали от зазора  $H_2 = 0$  и  $B_2 = B_1 = \mu_0(H_2 + M) = \mu_0 M$ .

Силу, действующую на половинки магнита, можно найти как притяжение двух пластин заряженного конденсатора по аналогии с соответствующей электростатической задачей:

$$F = \frac{1}{2} \mu_0 H_1 q_m = \frac{1}{2} \mu_0 M \cdot S \sigma_m = \frac{1}{2} S \mu_0 M^2.$$

Данную силу можно найти и из магнитного давления на границе магнитных сред, используя (10.29), (10.23):

$$F = Sp = S(w_1 - w_2) = \frac{1}{2} SB(H_1 - H_2) = \frac{1}{2} \pi a^2 \mu_0 M^2.$$

#### *Решение методом молекулярных токов*

Так как намагниченность однородна, объемные молекулярные токи отсутствуют, а на боковой поверхности цилиндрического магнита имеется круговой поверхностный молекулярный ток плотности  $i' = M$ . Магнитная индукция  $B$  внутри длинного цилиндра будет та же, что и внутри соленоида с поверхностным током  $i = i'$ , т.е.  $B = \mu_0 i = \mu_0 M$ . При этом, в отличие от соленоида, напряженность магнитного поля внутри цилиндра равна нулю:

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} - M = 0.$$

Если поперечный зазор в цилиндре узкий, то можно пренебречь краевыми эффектами, то есть считать, что силовые линии  $\mathbf{B}$  не отклоняются от продольного направления. Тогда вектор  $\mathbf{B}$  в зазоре сохранит ту же величину  $B = \mu_0 M$  в силу сохранения нормальной компоненты  $B_n$  на границе сред, при этом внутри зазора  $H_1 = B/\mu_0 = M$ , а поле  $H$  вдали от зазора останется нулевым.

**Ответ:** 1)  $H_1 = M$ ,  $B_1 = B_2 = \mu_0 M$ ,  $H_2 = 0$ .

$$2) F = \frac{1}{2} \pi a^2 \mu_0 M^2.$$

**Задача 10.3.12.** Тонкий диск толщины  $h$  и радиуса  $R$  ( $h \ll R$ ) имеет однородную "замороженную" намагниченность с вектором намагниченности  $\mathbf{M}$ , лежащим в его плоскости. Найти:

1) магнитную индукцию  $B$  и напряженность магнитного поля  $H$  в центре диска;

2) в дипольном приближении индукцию  $B$  на оси диска на расстоянии  $z$  от него.

### Решение

Ввиду разрыва нормальной компоненты вектора  $\mathbf{M}$  на боковой поверхности диска согласно (10.18) появляются "магнитные заряды" с поверхностной плотностью  $\sigma_m = M \cos \varphi$  (рис. 10.10).

1) Пусть ось  $OX$  параллельна вектору намагниченности. Ввиду симметрии задачи магнитное поле в плоскости диска будет иметь только  $x$ -компоненту. Рассмотрим бесконечно малый участок боковой поверхности диска, расположенный под углом  $\varphi$  к оси  $OX$  и имеющий длину  $Rd\varphi$  и площадь  $hRd\varphi$ . На нем находится магнитный заряд

$$dq_m(\varphi) = \sigma_m(\varphi)dS = MhR \cos \varphi d\varphi,$$

который (по аналогии с точечным электрическим зарядом) создает в центре диска поле  $d\mathbf{H}$  с  $x$ -проекцией, равной

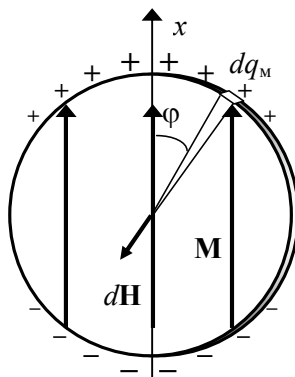


Рис. 10.10. К расчету магнитного поля в центре касательно намагниченного диска (задача 10.3.12)

$$dH_x = -\frac{1}{4\pi} \frac{dq_m}{R^2} \cos \varphi = -\frac{1}{4\pi R} Mh \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Интегрируя по углу  $\varphi$ , получаем величину поля  $\mathbf{H}$  в центре диска

$$H = H_x = -M \frac{h}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = -M \frac{h}{4R},$$

и, затем, магнитную индукцию

$$B = B_x = \mu_0(H + M) = \mu_0 M \left(1 - \frac{h}{4R}\right).$$

2) Магнитный момент диска равен  $p_m = MV = M\pi R^2 h$  и направлен по оси  $x$ . В дипольном приближении ( $z \gg R$ ) индукция магнитного поля на оси  $z$ , перпендикулярной оси диполя (Глава 7, задача 7.3.3, замечание 2), равна:



$$B_x(z) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{z^3} = -\mu_0 M \frac{R^2 h}{4z^3}.$$

**Ответ:** 1)  $B = B_x = \mu_0 M (1 - \frac{h}{4R})$ ,  $H = H_x = -M \frac{h}{4R}$ ,

2)  $B_x(z) = -\mu_0 M \frac{R^2 h}{4z^3}$ .

**Задача 10.3.13 (базовая задача).** Шар радиуса  $R$  имеет однородную "замороженную" намагниченность с вектором намагниченности  $\mathbf{M}$  (рис. 10.11). Найти магнитную индукцию  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  внутри (1) и снаружи (2) шара.

**Решение**

Задачу удобно решить методом "магнитных зарядов".

Поскольку намагниченность внутри шара однородна, объемных магнитных зарядов нет, но на поверхности согласно (10.18) возникают заряды с поверхностной плотностью

$$\sigma_m(\vartheta) = M_n = M \cos \vartheta$$

(рис. 10.11). Аналогичная электростатическая задача для однородно поляризованного шара была решена выше (Глава 4, задача 4.3.17) где было получено, что внутри шара напряженность электрического поля

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P},$$

где  $\mathbf{P}$  – вектор поляризации, а снаружи поле совпадает с полем точечного диполя, расположенного в центре шара, имеющего дипольный момент  $\mathbf{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{P}$ .

Произведя замены (10.19)  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ ,  $\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \rightarrow \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}_m$ , для обла-

сти внутри шара, получаем

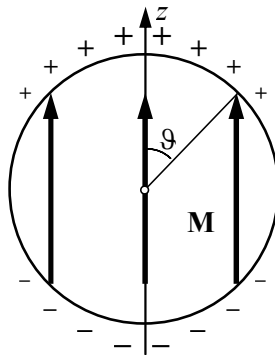


Рис. 10.11. К нахождению магнитного поля однородно намагниченного шара (задача 10.3.13)

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{3}\mathbf{M}, \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}.$$

**Ответ:** Внутри шара  $\mathbf{H} = -\frac{1}{3}\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B} = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}$ ,

Снаружи  $\mathbf{H}_2(r) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{(\mathbf{p}_m \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right)$ ,  $\mathbf{B}_2(r) = \mu_0\mathbf{H}_2(r)$ ,

где  $\mathbf{p}_m = \frac{4}{3}\pi R^3\mathbf{M}$  – вектор магнитного дипольного момента шара.

*Замечание.* Магнитное поле, порождаемое однородной намагниченностью внутри конечных тел, называется размагничивающим полем (поскольку оно направлено против направления намагниченности). При однородной намагниченности тела это поле будет однородным только для тел в форме эллипсоида или его частных случаев – шара или сфероида.

Для эллипсоида размагничивающее поле можно записать в виде  $\mathbf{H}_p = -\hat{N}\mathbf{M}$ , где  $\hat{N}$  – тензор размагничивающих факторов (коэффициентов). В главных осях эллипсоида тензор  $\hat{N}$  диагонален, и сумма диагональных элементов всегда равна 1. Поэтому в шаре все коэффициенты размагничивания равны  $1/3$ . Аналогичным способом можно решить задачу для длинного цилиндра с поперечной намагниченностью (без учета неоднородности поля на торцах, то есть, аппроксимируя его длинным сфероидом). В этом случае оба коэффициента размагничивания в его поперечном сечении равны  $1/2$ , а продольный равен нулю (это используется далее в задаче 10.4.9).

Тонкую плоскую пластину без учета неоднородности поля на ее краях можно аппроксимировать сплюснутым сфероидом. Тогда размагничивающий фактор в перпендикулярном к плоскости пластины направлении будет равен 1, а в плоскости пластины – 0.

#### Задачи типа 10.4

*Задачи для ферромагнетиков с гистерезисом магнитной восприимчивости*

**Метод решения.** Для таких сред  $\mu \neq \text{const}$ , поэтому при нахождении полей нужно учитывать нелинейную зависимость намагни-

ченности  $M(H)$  или индукции  $B(H)$  от напряженности поля  $H$  внутри ферромагнетика, задаваемую петлей гистерезиса ферромагнитного материала. Для связи векторов  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{M}$  нужно использовать общее соотношение (10.1)  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$  и условия на границах сред (10.6), (10.7). При наличии симметрии удобно использовать закон полного тока – интегральное соотношение для поля  $\mathbf{H}$  (10.5).

**Задача 10.3.14 (базовая задача).** Ферромагнитный материал имеет остаточную намагниченность  $M_r$  и коэрцитивную силу  $H_c$ , а участок петли гистерезиса, соответствующий размагничиванию, можно приближенно аппроксимировать четвертью эллипса (рис. 10.12). Из данного материала изготовлен постоянный магнит в виде тонкого тора среднего радиуса  $R$  с тонким зазором ширины  $h$  ( $h \ll R$ ). Найти индукцию магнитного поля в зазоре.

### Решение

Ввиду малой толщины тора по сравнению с его средним радиусом пренебрежем зависимостью магнитного поля по толщине тора.

Пусть  $H_1$  – средняя напряженность магнитного поля внутри тора,  $H_2$  – напряженность в зазоре, а силовые линии полей магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и полей  $\mathbf{H}_{1,2}$  ввиду большой магнитной проницаемости ферромагнетика не выходят наружу и являются окружностями. Запишем закон полного тока (10.5) для циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  по окружности радиуса  $R$ :

$$(2\pi R - h) H_1 + h H_2 = 0.$$

Непрерывность нормальной компоненты индукции  $B_n$  на границах тонкого зазора дает соотношение

$$\mu_0 (H_1 + M_1) = \mu_0 H_2.$$

Связь  $M_1$  и  $H_1$  определяется заданной формой кривой размагничивания (эллипс):

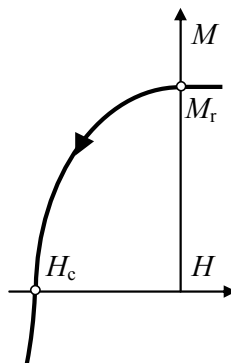


Рис. 10.12. Идеализированный участок петли гистерезиса ферромагнетика (задача 10.3.14)

$$\frac{M_1^2}{M_r^2} + \frac{H_1^2}{H_c^2} = 1.$$

Решая данную систему из этих трех уравнений, получаем  $B = \mu_0 H_2$ , где

$$H_2 = \left(1 - \frac{2\pi R}{h}\right) \frac{M_r}{\sqrt{\frac{M_r^2}{H_c^2} + \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}}.$$

**Ответ:**  $B = \mu_0 \left(1 - \frac{2\pi R}{h}\right) \frac{M_r}{\sqrt{\frac{M_r^2}{H_c^2} + \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}}.$

### Задачи типа 10.5

*Нахождение магнитной энергии и сил в магнитных средах*

**Метод решения.** Энергию магнитного поля можно найти из соотношений (10.23), (10.24). Объемная плотность сил и магнитное давление определяются из (10.27)-(10.29). Если магнитное поле создается контуром с током, то для нахождения сил удобно использовать энергетический метод (Глава 9, (9.8)):

$$\delta A = \delta W|_{I=\text{const}} = \frac{1}{2} I^2 \delta L,$$

где  $\delta A$  – механическая работа, совершаемая искомыми силами при малом изменении конфигурации системы, а  $\delta W|_{I=\text{const}}$  – происходящее при этом изменение магнитной энергии при условии, что ток через контур поддерживается постоянным,  $\delta L$  – соответствующее малое изменение индуктивности контура.

**Задача 10.3.15 (базовая задача).** Длинный и тонкий вертикально расположенный соленоид, намотанный на тонкостенную немагнитную трубку с плотностью намотки  $n$  (витков/м), погружен одним концом в парамагнитную жидкость с плотностью  $\rho$ . После включения тока  $I$  жидкость в трубке поднялась на высоту  $h$ . Найти магнитную проницаемость жидкости. Капиллярными эффектами пренебречь.

#### Решение

В данной задаче поле  $\mathbf{H}$ , строго говоря, не будет совпадать с

полем пустого соленоида  $\mathbf{H}_0$ , поскольку линии  $\mathbf{H}_0$  перпендикулярны поверхности магнитной жидкости. Действительно, на этой границе нормальная компонента поля  $\mathbf{H}$  будет иметь скачок  $H_{2n} - H_{1n} = M_n$ , вызванный полем возникающих на границе поверхностных "магнитных зарядов" плотности  $\sigma = M_n$ . Однако ввиду малости поперечного сечения соленоида поле от этих "магнитных зарядов" будет быстро спадать с удалением от границы (по аналогии с графиком  $H(z)$  в задаче 10.3.8). Поэтому в остальной части длинного соленоида поле  $\mathbf{H}$  не изменится и будет, как и в вакууме, равно  $H = nI$ . Тогда магнитная индукция будет  $B_1 = \mu_0 H$  над жидкостью, и  $B_2 = \mu \mu_0 H$  – внутри жидкости. Поскольку эти величины не зависят от положения уровня жидкости, удобно решить задачу, исходя из магнитного давления на границе раздела (10.27):

$$p = w_2 - w_1 = \frac{1}{2} H(B_2 - B_1) = \frac{1}{2} \mu_0 (\mu - 1) H^2 = \frac{1}{2} \mu_0 (\mu - 1) (nI)^2.$$

Так как  $w_2 > w_1$ , то при смещении границы вверх энергия магнитного поля возрастает (за счет работы источника ЭДС, поддерживающего ток в соленоиде). Поскольку токи остаются постоянными, из (9.8) следует, что механическая работа также положительна, то есть силы давления направлены вверх. Это давление, вызывающее подъем жидкости, при равновесии должно компенсироваться гидростатическим давлением  $p = \rho gh$ .

Приравнявая эти два давления, находим  $\mu = 1 + \frac{2\rho gh}{\mu_0 (nI)^2}$ .

**Ответ:**  $\mu = 1 + \frac{2\rho gh}{\mu_0 (nI)^2}$ .

*Замечание 1.* То, что  $B_1 \neq B_2$ , не противоречит условию непрерывности нормальной компоненты вектора  $\mathbf{B}$  на границе раздела, которое всегда выполняется. Приведенные выражения для величины полей  $B_{1,2}$  и  $H$  справедливы при достаточно большом удалении от границы жидкости. На самой границе поле неоднородно, вектор  $\mathbf{B}$  не перпендикулярен к границе, и часть линий индукции  $\mathbf{B}$  из нижней части, где ее величина больше и линии идут гуще, выходит за пределы соленоида, не проходя в верхнюю часть.

*Замечание 2.* Несмотря на неоднородность поля в окрестности границы раздела сред, при нахождении магнитного давления надо использовать величины полей, взятых *вдали от границы*. Действительно, при малом смещении приграничной области, где поля не-

однородны, вся она смещается как целое, и ее магнитная энергия остается постоянной. Полная же энергия меняется только из-за изменения объемов верхней и нижней части, где поля однородны и были найдены выше.

**Задача 10.3.16.** Бесконечная плоская пластина-магнит толщины  $l$  однородно намагничена так, что вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  перпендикулярен ее плоскости. Найти магнитную энергию  $W'$  единицы площади пластины.

### Решение

Ввиду однородности намагниченности объемных молекулярных токов нет. Поскольку вектор  $\mathbf{M}$  перпендикулярен поверхности, поверхностные молекулярные токи также отсутствуют, и ввиду отсутствия токов проводимости и молекулярных токов индукция магнитного поля  $\mathbf{B}$  везде равна нулю, как внутри, так и вне пластины. Учитывая, что внутри пластины  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0$ , получаем  $\mathbf{H} = -\mathbf{M}$ . Это – размагничивающее поле, которое соответствует нормальному размагничивающему фактору пластинки  $N \approx 1$  (см. замечание к задаче 10.3.13). Поскольку магнитное поле создается не сторонними источниками, а порождается самой намагниченностью, то согласно (10.24) плотность энергии

$$w = -\frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H} \mathbf{M} = \frac{1}{2} \mu_0 M^2.$$

На единицу площади пластины приходится энергия

$$W' = wl = \frac{1}{2} \mu_0 M^2 l.$$

**Ответ:**  $W' = wl = \frac{1}{2} \mu_0 M^2 l.$

**Задача 10.3.17.** В длинный соленоид вставлен по его оси тонкий по сравнению с радиусом соленоида парамагнитный стержень радиуса  $a$  с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Один конец стержня находится в середине соленоида, второй совпадает с его торцом. Найти силу, действующую на стержень, если в центре соленоида магнитная индукция равна  $B_0$ .

### Решение

Введем декартову систему координат с осью  $Z$ , направленной по оси соленоида. Пусть стержень расположен в положительной

части оси  $Z$ . В длинном соленоиде на его оси индукция магнитного поля меняется от  $B_0$  в середине до величины  $B_1 = \frac{1}{2}B_0$  в центре торца (глава 7, задача 7.3.5, замечание 2). Поскольку вектор индукции направлен вдоль оси соленоида  $Z$  и все величины зависят только от координаты  $z$ , то согласно (10.27) объемная плотность сил, действующих в стержне

$$\mathbf{f} = (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{B} = M \frac{dB}{dz} \mathbf{e}_z = \frac{\mu-1}{\mu\mu_0} B \frac{dB}{dz} \mathbf{e}_z = \frac{\mu-1}{2\mu\mu_0} \frac{dB^2}{dz} \mathbf{e}_z.$$

Дифференциал величины силы, действующей на элемент объема  $dV$ , равен

$$dF = f dV = \frac{\mu-1}{2\mu\mu_0} \frac{dB^2}{dz} \cdot S dz = S \frac{\mu-1}{2\mu\mu_0} d(B^2).$$

Проекцию вектора силы на ось  $Z$  находим, интегрируя в пределах от  $B_0$  до  $B_1 = \frac{1}{2}B_0$ .

$$F = S \frac{\mu-1}{2\mu\mu_0} \int_{B_0}^{B_1} d(B^2) = S \frac{\mu-1}{2\mu\mu_0} (B_1^2 - B_0^2) = -\frac{3}{8} S \frac{\mu-1}{\mu\mu_0} B_0^2.$$

Знак минус означает, что сила направлена против оси  $Z$ , то есть стремится втянуть парамагнитный стержень в центр соленоида.

**Ответ:**  $\mathbf{F} = -\frac{3}{8} S \frac{\mu-1}{\mu\mu_0} B_0^2 \mathbf{e}_z.$

**Задача 10.3.18.** Найти силу притяжения двух половинок тонкого тора среднего радиуса  $R$ , имеющего квадратное поперечное сечение площади  $S$  ( $R \gg \sqrt{S}$ ), сделанного из материала с большой магнитной проницаемостью  $\mu$  ( $\mu \gg 1$ ). На торе намотано  $N$  витков провода, по которому идет ток  $I$ .

### Решение

Силы в данной задаче можно найти несколькими способами. Используем здесь энергетический метод (глава 9, (9.8))

$$\delta A = \delta W|_{I=\text{const.}}$$

Раздвинем половинки тора на расстояние  $x$ , малое по сравне-

нию с размером поперечного сечения (рис. 10.13). Учитывая, что элементарная работа при малом раздвижении половинок  $\delta A = F dx$ , и выражая энергию через индуктивность контура  $W = \frac{1}{2} LI^2$ ,

получаем

$$F = \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{I=\text{const}} = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Найдем зависимость индуктивности контура  $L$  от  $x$ . Поскольку  $\mu$  велико ( $\mu \gg 1$ ), будем считать, что магнитное поле сконцентрировано внутри тора, силовые линии полей магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и напряженности  $\mathbf{H}$  являются окружностями, и они не искажаются при пересечении тонкого зазора. Ввиду малой толщины тора пренебрежем также зависимостью полей от радиуса.

Пусть  $H_1$  – напряженность магнитного поля в нижней половине,  $H_2$  – в верхней,  $H_3$  – в зазоре. Запишем закон о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  (10.5) для окружности радиуса  $R$ , учитывая, что ее поверхность пересекают  $N$  витков с током  $I$ :

$$\pi R H_1 + \pi R H_2 + 2x H_3 = NI.$$

Поскольку зазор тонкий и нормальная компонента индукции  $B_n$  непрерывна на границах зазора, модуль вектора  $\mathbf{B}$  будет одинаков везде, как в торе, так и в зазоре. Подставляя в последнее соотношение следующие выражения полей  $H_{1,3}$  через  $B$

$$H_1 = H_2 = \frac{B}{\mu \mu_0}, \quad H_3 = \frac{B}{\mu_0}$$

и решая получившееся для  $B$  уравнение, находим

$$B(x) = \mu_0 \frac{NI}{\pi R} \frac{1}{\frac{2}{\mu} + \frac{2x}{\pi R}}.$$

Учитывая, что полный поток магнитной индукции через обмотку

$$\Phi = NSB = LI,$$

находим индуктивность  $L$  контура

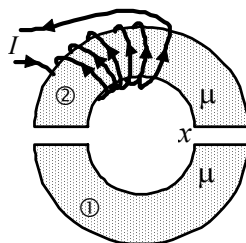


Рис. 10.13. К расчету силы притяжения половинок круглого электромагнита (задача 10.3.18)



$$L(x) = \mu_0 S \frac{N^2}{\pi R} \frac{1}{\frac{2}{\mu} + \frac{2x}{\pi R}}.$$

Отсюда получаем

$$F(x) = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L}{\partial x} = -\mu_0 S \left( \frac{N}{\pi R} \right)^2 \frac{I^2}{\left( \frac{2}{\mu} + \frac{2x}{\pi R} \right)^2}.$$

Когда половинки тора полностью прижаты ( $x = 0$ ), сила будет равна

$$F(0) = -\mu_0 S \left( \frac{N}{\pi R} \right)^2 \frac{I^2}{\left( \frac{2}{\mu} \right)^2} = -\mu_0 S \left( \frac{\mu N}{2\pi R} \right)^2 I^2.$$

Отрицательный знак силы означает, что она направлена против увеличения расстояния  $x$ , то есть вызывает взаимное притяжение половинок тора.

**Ответ:**  $F = \mu_0 S \left( \frac{\mu N}{2\pi R} \right)^2 I^2.$

*Замечание.* Силу притяжения можно легко найти и как притяжение "магнитных зарядов", образующихся на границах зазоров, как было рассмотрено в задаче **10.3.11**. Используя полученное там выражение для силы и найденную здесь величину поля  $B$ , а также учитывая наличие двух зазоров, получаем

$$F = 2 \frac{1}{2} S \mu_0 M^2 = S \mu_0 \left( \frac{\mu - 1}{\mu \mu_0} B \right)^2 = \mu_0 S \left( \frac{\mu - 1}{\mu} \right)^2 \left( \frac{N}{\pi R} \right)^2 \frac{I^2}{\left( \frac{2}{\mu} + \frac{2x}{\pi R} \right)^2}.$$

В использованном приближении ( $\mu \gg 1$ ,  $(\mu - 1)/\mu \rightarrow 1$ ) это выражение совпадает с приведенным выше.

**Задача 10.3.19.** Найти период малых горизонтальных крутильных колебаний стрелки компаса вокруг вертикальной оси, перпендикулярной бесконечному горизонтальному проводу с током  $I$ . стрелка расположена над проводом на расстоянии  $h$  от него

(рис. 10.14а). Стрелку считать тонким цилиндром длины  $2l$  с однородной продольной постоянной намагниченностью  $M$  и плотностью  $\rho$ .

### Решение

В положении равновесия стрелка установится перпендикулярно проводу, поскольку линии поля  $\mathbf{B}$  являются concentрическими окружностями, плоскость которых перпендикулярна направлению тока.

На торцах цилиндрической стрелки нормальная компонента намагниченности имеет разрыв, из-за чего на них появятся поверхностные "магнитные заряды" противоположного знака с плотностью (10.18)  $\sigma_m = \pm M$ , а полная величина "заряда" на каждом торце будет  $q_m = \pm \sigma_m S$ , где  $S$  – площадь основания цилиндра.

Ввиду тонкости цилиндра-стрелки можно считать, что магнитное поле, создаваемое проводом, на поверхности торца стрелки однородно и имеет индукцию

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi h} \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между осью  $Z$  и перпендикуляром, опущенным из торца на ось провода (рис. 10.14б).

Силы со стороны магнитного поля будут приложены к торцам стрелки, направлены по касательным к силовой линии (пунктир на рис. 10.15б) и равны  $F_{1,2} = F = B(r) q_m$ .

Для расчета момента этих сил относительно оси  $Z$  требуется их

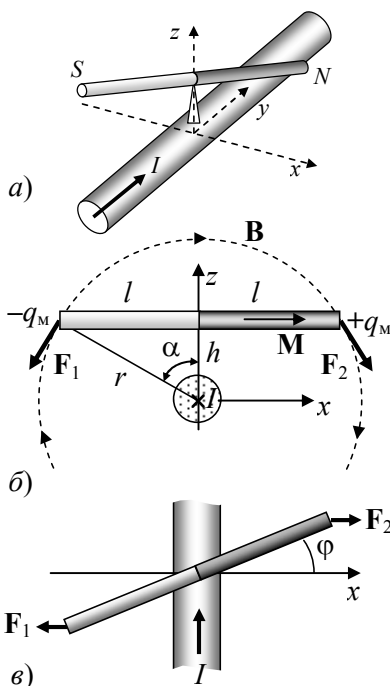


Рис. 10.14. К нахождению периода колебаний стрелки компаса над проводом с током (Задача 10.3.19). а) общий вид б) вид вдоль провода в) вид сверху

$x$ -компонента

$$F_x = F \cos \alpha = \pm \frac{\mu_0 I}{2\pi h} q_m \cos^2 \alpha = \pm \frac{\mu_0 I q_m}{2\pi h} \frac{h^2}{h^2 + l'^2},$$

где  $l' = l \cos \varphi$  – проекция половины стрелки на ось  $x$ .

При отклонении стрелки от положения равновесия на угол  $\varphi$  возникает возвращающий момент магнитных сил

$$N_z = -2l F_x \sin \varphi$$

(рис. 10.14в). В приближении малых колебаний ( $\varphi \ll 1$ ,  $l \approx l'$ ) момент этих сил будет пропорционален углу  $\varphi$  и равен

$$N_z = -\frac{\mu_0 I q_m}{\pi} \frac{hl}{h^2 + l^2} \varphi = -D\varphi,$$

где через  $D$  обозначен данный коэффициент пропорциональности. Уравнение малых колебаний стрелки имеет вид

$$J \ddot{\varphi} = -D\varphi,$$

где  $J = \frac{1}{12} m(2l)^2 = \frac{2}{3} \rho S l^3$  – момент инерции тонкого цилиндра длины  $2l$  относительно оси, проходящей через его центр. Для круговой частоты колебаний получаем

$$\omega^2 = \frac{D}{J} = \frac{3\mu_0 I M}{2\pi \rho h} \frac{1}{1 + \left(\frac{l}{h}\right)^2}.$$

**Ответ:** 
$$\omega^2 = \frac{3\mu_0 I M}{2\pi \rho h} \frac{1}{1 + \left(\frac{l}{h}\right)^2}.$$

*Замечание.* При малом размере магнитной стрелки по сравнению с расстоянием до провода ( $l \ll h$ ) можно использовать дипольное приближение. Дипольный момент стрелки-цилиндра равен  $p_m = MV = 2MSl$ , а действующий на него вращающий момент

$N_z = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]_z = -p_m B \sin \varphi$ , где  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi h}$ . Подставляя эти выражения в

уравнение колебаний, получаем  $\omega^2 = \frac{3\mu_0 I M}{2\pi \rho h}$ , что совпадает с най-

денным выше ответом при  $\frac{l}{h} \rightarrow 0$ .

### § 10.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 10.4.1.** Бесконечная плоская пластина-магнит намагничена так, что вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  перпендикулярен ее плоскости. Найти магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  и напряженность поля  $\mathbf{H}$  внутри и вне пластины.

**Ответ:** внутри  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{H} = -\mathbf{M}$ ; снаружи  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{H} = 0$ .

**Задача 10.4.2.** Бесконечная плоская пластина-магнит намагничена так, что вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  параллелен ее плоскости. Найти магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  и напряженность поля  $\mathbf{H}$  внутри и вне пластины.

**Ответ:** внутри  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H} = 0$ ; снаружи  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{H} = 0$ .

**Задача 10.4.3.** Плоский постоянный магнит граничит с вакуумом и имеет постоянную намагниченность  $\mathbf{M}$ , параллельную поверхности. Снаружи у поверхности вектор магнитной индукции имеет величину  $B$  и образует угол  $\alpha$  с нормалью к поверхности. Найти вектор магнитной индукции  $B_1$  внутри магнита (модуль и угол  $\beta$  с нормалью).

**Ответ:**  $B_1 = \sqrt{B^2 + 2\mu_0 MB \sin \alpha + (\mu_0 M)^2}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha + \mu_0 M / B}{\cos \alpha}$ .

**Задача 10.4.4.** По бесконечному проводу круглого сечения радиуса  $a$ , находящемуся в вакууме, течет постоянный ток  $I$ . Магнитная проницаемость материала провода равна  $\mu(r) = 1 + \alpha \frac{r}{a}$ . Найти напряженность поля  $H(r)$ , магнитную индукцию  $B(r)$ , намагниченность  $M(r)$ , объемную  $j'(r)$  и поверхностную  $i'$  плотность молекулярных токов и полную величину этих токов  $I'_{\text{об}}$  и  $I'$ .

**Ответ:**

$$\underline{r < a}: \quad H_1(r) = \frac{I}{2\pi a^2} r, \quad B_1(r) = \mu_0 \mu(r) \frac{I}{2\pi a^2} r,$$

$$M_1(r) = \alpha \frac{I}{2\pi a^3} r; \quad j'_1 = \frac{3}{2} \alpha \frac{I}{\pi a^3} r;$$

$$\underline{r \geq a}: \quad H_2(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad B_2(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}, \quad M_1(r) = 0; \quad j'_2 = 0,$$

$$\underline{r = a}: \quad i' = \alpha \frac{I}{2\pi a^2}, \quad I' = -I'_{об} = \alpha I.$$

*Указание.* Для нахождения молекулярных токов можно рассчитать  $\text{rot } \mathbf{M}$  в декартовых координатах, либо использовать выражение ротора в цилиндрических координатах, в которых, учитывая, что вектор  $\mathbf{M}$  имеет только круговую  $\varphi$ -компоненту:

$$j' = (\text{rot } \mathbf{M})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rM_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial M_r}{\partial \varphi}.$$

Другим способом является использование интегрального соотношения (10.12), как это было сделано в задаче 10.3.6.

**Задача 10.4.5.** Круговой тонкий виток, в котором течет ток силы  $I$ , лежит на плоской границе раздела вакуума и магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Найти индукцию магнитного поля на оси контура в зависимости от расстояния  $z$  от его центра.

*Указание:* см. решение задачи 10.3.5.

**Ответ:**  $B = \frac{2\mu}{1+\mu} B_0$ , где  $B_0 = \frac{1}{2} \mu_0 I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$  – магнитная индукция в отсутствие магнетика.

**Задача 10.4.6.** Диск радиуса  $R$  из ферромагнетика ( $\mu \gg 1$ ) помещен в магнитное поле с вектором индукции  $B_0$ , параллельным его оси. *Оценить*, при какой толщине  $l$  диска индукция в центре диска будет отличаться от  $B_0$  не более, чем на величину  $\Delta B = \eta B_0$ ,  $\eta = 0,01$ .

*Указание:* считая в первом приближении, что внутри диска  $B = B_0$ , найти поправку  $\Delta B$  как вклад от поверхностного молекулярного тока, текущего по боковой поверхности диска (см. рис. 10.10).

**Ответ:**  $l \leq \eta \frac{2\mu}{\mu-1} R$ .

**Задача 10.4.7.** Шар радиуса  $R$  имеет однородную "замороженную" намагниченность с вектором намагниченности  $\mathbf{M}$  (рис. 10.11).

Найти: магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  в центре шара. Решить методом молекулярных токов и методом "магнитных зарядов".

**Ответ:**  $\mathbf{H} = -\frac{1}{3}\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B} = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}$ .

**Задача 10.4.8.** В однородное магнитное поле с вектором индукции  $\mathbf{B}_0$  поместили однородный шар из магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Найти напряженность  $\mathbf{H}$ , индукцию  $\mathbf{B}$  магнитного поля и намагниченность  $\mathbf{M}$  внутри шара.

Указание. См. решение задачи 10.3.13.

**Ответ:**  $\mathbf{H} = 3\frac{1}{\mu+2}\frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}$ ,  $\mathbf{B} = 3\frac{\mu}{\mu+2}\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{M} = 3\frac{\mu-1}{\mu+2}\frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}$ .

**Задача 10.4.9.** Бесконечно длинный цилиндр из однородного изотропного магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$  поместили в однородное постоянное магнитное поле с вектором индукции  $\mathbf{B}_0$ , который перпендикулярен оси цилиндра. Найти величину намагниченности магнетика.

Указание. См. замечание к задаче 10.3.13.

**Ответ:**  $\mathbf{M} = 2\frac{\mu-1}{\mu+1}\frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}$ .

**Задача 10.4.10.** Электромагнит с тонким сердечником квадратного сечения со стороной  $a$ , сделанный из материала с большой магнитной проницаемостью  $\mu$ , имеет тонкий плоский поперечный зазор ширины  $l$ , в котором создается магнитное поле с индукцией  $B$ . Оценить в дипольном приближении магнитную индукцию в точке  $A$ , лежащей в плоскости зазора на большом расстоянии  $r$  от его центра ( $r \gg a$ ,  $R \gg a \gg l$ , где  $R$  – средний радиус тора).

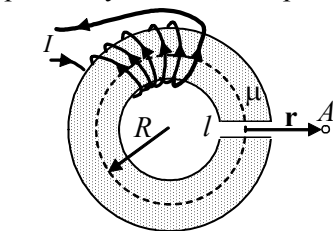


Рис.10.15. К расчету магнитного поля вне зазора электромагнита (задача 10.4.10)

Указание. Использовать метод "магнитных зарядов".

**Ответ:**  $B(r) \approx \frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^3}$ , где  $p_m = \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{B}{\mu_0} a^2 l$ .

**Задача 10.4.11.** Два длинных тонких цилиндрических магнита одинакового радиуса, имеющие одинаково направленные продольные намагниченности  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  соответственно, соединены торцами. Найти величину индукции магнитного поля  $B_{1,2}$  и напряженности  $H_{1,2}$  внутри обоих магнитов. Векторы намагниченности считать постоянными и независимыми от магнитного поля внутри магнитов.

**Ответ:**  $B_1 = \mu_0 M_1$ ;  $B_2 = \mu_0 M_2$ ;  $H_{1,2} = 0$ .

Данное решение справедливо вдали от торцов цилиндров. На торцах поле  $\mathbf{H}$  испытывает скачки в пределах  $\pm \frac{1}{2} M_1$ ,  $\pm \frac{1}{2} |M_1 - M_2|$  и  $\pm \frac{1}{2} M_2$  соответственно и быстро уменьшается к нулю с удалением от торцов.

*Указание.* См. задачу 10.3.8.

**Задача 10.4.12.** Длинный тонкий цилиндрический соленоид с плотностью намотки  $n$  (витков/м) приставлен торцом к длинному тонкому цилиндрическому железному сердечнику того же радиуса с большой магнитной проницаемостью.

Найти величину намагниченности  $M$  сердечника, индукции магнитного поля  $B$  и напряженности  $H$  внутри соленоида (1) и железного сердечника (2), если по соленоиду течет ток силы  $I$ .

**Ответ:**  $B_1 = B_2 = \mu_0 n I$ ,  $H_1 = n I$ ,  $H_2 \approx 0$ ,  $M \approx n I$ . Данное решение справедливо вдали от торцов соленоида и сердечника.

*Указание.* Считать, что из-за большой величины магнитной проницаемости сердечника линии индукции  $\mathbf{B}$ , выходящие из соленоида, концентрируются в сердечнике и не выходят из его боковой поверхности.

**Задача 10.4.13.** Намагниченность насыщения материала составляет  $M_s$  и достигается в поле насыщения  $H_s$ . Из этого материала изготовлен тонкий тор среднего радиуса  $R$ , в котором сделан малый воздушный зазор  $l$  ( $l \ll R$ ). На тор намотано  $N$  витков провода.

1) При какой величине силы тока  $I_s$  через обмотку наступит насыщение материала? 2) Как будет меняться индукция в зазоре при  $I > I_s$ ?

**Ответ:** 1)  $I_s = (2\pi R H_s + M_s l) / N$ ;

$$2) B(I) = \mu_0 \left( \frac{NI}{2\pi R} + M_s \right) = \mu_0 (H_s + M_s + N \frac{I - I_s}{2\pi R}).$$

**Задача 10.4.14.** Постоянный магнит имеет вид тонкого кольца среднего радиуса  $R$  с узким поперечным воздушным зазором. Материал имеет остаточную намагниченность  $M_r$  и коэрцитивную силу  $H_c$ , а кривую намагничивания можно приблизительно аппроксимировать прямоугольником (рис. 10.16).

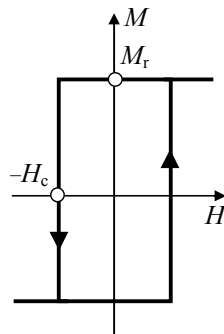


Рис. 10.16. Идеализированная петля гистерезиса постоянного магнита (задача 10.4.14)

1) Какова ширина зазора  $h_{\max}$ , при дальнейшем увеличении которой величина индукция в зазоре начнет резко уменьшаться?

2) Чему равна величина магнитной индукции  $B$  в зазоре при его ширине  $h_{\max}$ ?

**Ответ:**  $h_{\max} = 2\pi R \frac{|H_c|}{M_r},$

$$B(h_{\max}) = \mu_0(M_r - |H_c|).$$

**Задача 10.4.15.** Постоянный магнит имеет вид кольца среднего радиуса  $R$  с узким воздушным поперечным зазором ширины  $h$ . Материал имеет остаточную намагниченность  $M_r$  и коэрцитивную силу  $H_c$ , а участок кривой гистерезиса на участке размагничивания можно аппроксимировать прямой линией (рис. 10.17).

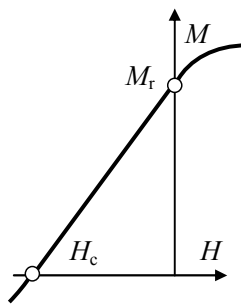


Рис.10.17. Идеализированный участок размагничивания петли гистерезиса ферромагнетика (задача 10.4.15)

Найти магнитную индукцию внутри зазора, пренебрегая рассеянием магнитного поля на его краях.

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0 M_r}{1 + \frac{h}{2\pi R} \frac{M_r}{H_c}}.$



**Задача 10.4.16.** Бесконечная плоская пластина-магнит толщины  $l$  намагничена так, что вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  образует угол  $\alpha$  с нормалью к ее поверхности. Найти магнитную энергию  $W'$  единицы площади пластины.

*Ответ:*  $W' = (1/2)\mu_0 M^2 l \cos^2 \alpha$ .

**Задача 10.4.17.** Длинный соленоид длины  $l$  и радиуса  $R$  с плотностью намотки  $n$  витков на метр и протекающим по нему током  $I$  погружен горизонтально до середины в парамагнитную жидкость с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Найти давление, действующее на поверхность жидкости со стороны магнитных сил и полную силу, действующую на соленоид.

*Ответ:*  $p = (1/2)\mu_0(\mu - 1)n^2 I^2$ ;  $F = 2lRp$ , сила направлена вниз.

**Задача 10.4.18.** Небольшой шарик объема  $V$  из парамагнитного материала с проницаемостью  $\mu$  переместили из точки с магнитной индукцией  $B$  в точку, где магнитное поле отсутствует. Какую работу совершили магнитные силы?

*Ответ:*  $A = -(\mu - 1)V \frac{B^2}{2\mu_0}$ .

**Задача 10.4.19.** Найти силу притяжения двух половинок тонкого тора радиуса  $R$ , имеющего квадратное поперечное сечение площади  $S$  ( $R \gg \sqrt{S}$ ), сделанных из материалов с большой магнитной проницаемостью  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно. Обмотка на торе имеет  $N$  витков и по ней идет ток  $I$ .

*Ответ:*  $F = \mu_0 S \left( \frac{N}{\pi R} \right)^2 \left( \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right)^2 I^2$ .

**Задача 10.4.20.** В сердечнике тороидального электромагнита радиуса  $R$  и круглого сечения площади  $S$  ( $R \gg \sqrt{S}$ ) имеется малый зазор ширины  $l$  ( $l \ll \sqrt{S}$ ), в который помещена пластинка из того же материала (рис. 10.18). По обмотке из  $N$  витков течет ток  $I$ . Магнитная проницаемость материала  $\mu$  ( $\mu \gg 1$ ).

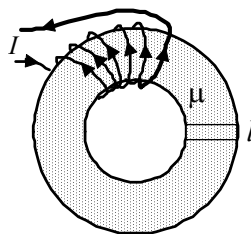


Рис. 10.18. Сердечник электромагнита с магнитной прокладкой в зазоре (задача 10.4.20)

Какую работу нужно совершить против магнитных сил, чтобы удалить пластинку из зазора?

**Ответ:** 
$$A = \frac{\mu_0 S (\mu N I)^2}{4\pi R \left( \mu + \frac{2\pi R}{l} \right)}.$$

**Задача 10.4.21.** Бесконечный прямолинейный тонкий провод расположен на расстоянии  $a$  над плоской бесконечной поверхностью магнетика с проницаемостью  $\mu$ . Найти силу, действующую на единицу длины провода, если по нему течет ток силы  $I$ .

**Ответ:** 
$$F = \frac{\mu_0 \mu - 1}{4\pi \mu + 1} \frac{I^2}{a}.$$

### Литература к главе 10

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм, 42. – М., Оникс 21 век, 2005, §§ 38, 39.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. т. III Электричество. – М., Физматлит, 2006, §§ 58-61, 73.
3. Калашиников С.Г. Электричество. – М.: Физматлит, 2003, §§ 103-119.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Физматлит, 2003, глава V.

## Глава 11

## ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В RL, RC И RLC ЦЕПЯХ. СВОБОДНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНТУРАХ

### § 11.1. Теоретический материал

**Переходные процессы** – процессы, которые возникают в электрических цепях после того, как один из параметров цепи испытал скачкообразное (очень быстрое) изменение. Например, подключенный к цепи источник ЭДС (генератор тока или напряжения) формирует прямоугольный импульс напряжения или тока, или в цепи с подключенным постоянным источником ЭДС происходит коммутация отдельных элементов цепи с помощью ключей.

**Квазистационарный ток** – изменяющийся со временем ток, удовлетворяющий следующим условиям:

1) Для *периодического тока*: линейные размеры цепи  $l$  много меньше длины волны  $\lambda$

$$l \ll \lambda = cT,$$

где  $T$  – период изменения процесса со временем,  $c$  – скорость распространения электромагнитной волны по цепи, которая близка к скорости света.

Для *переходного непериодического процесса*: линейные размеры цепи должны удовлетворять условию

$$l \ll c\Delta t,$$

где  $\Delta t$  – длительность интервала времени, за который происходит скачкообразное изменение параметра цепи. Это условие позволяет пренебречь конечностью скорости распространения электромагнитных полей и считать, что в любом сечении последовательной цепи сила тока одинакова. Например, для синусоидального тока

частотой  $\nu = 50$  Гц:  $l \ll \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} \text{ м} = 6000 \text{ км}$ . Однако, если

время скачка параметров  $\Delta t \sim 1$  нс, то  $l \ll c\Delta t \sim 0,3$  м.

Для того чтобы считать изменение параметров цепи мгновенными, длительность скачка параметров должна быть много меньше  $\tau$  – времени релаксации цепи:  $\Delta t \ll \tau$ . Величина  $\tau$  зависит от вида цепи и параметров входящих в нее элементов, и будет рассмотрена ниже при решении конкретных задач.

2) Токи смещения малы по сравнению с токами проводимости

$$\omega \ll \frac{1}{\rho \varepsilon \varepsilon_0},$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление среды, в которой распространяется ток,  $\varepsilon$  – её диэлектрическая проницаемость. Для металлических проводников это условие заведомо хорошо выполняется при выполнении условия 1 ( $\omega \ll 10^{18} \text{ с}^{-1}$  [1, §48]).

Предположение о квазистационарности токов позволяет при анализе процессов, происходящих в цепи, использовать те же методы, что и в цепях постоянного тока (подробнее см. главу 6).

Рассмотрим взаимосвязь между током и напряжениями на отдельных участках цепи (резистор, конденсатор, индуктивность, которые рассматриваются как элементы с сосредоточенными параметрами).

### Резистор:

$$U_R = R I_R. \quad (11.1)$$

$U_R$  – напряжение на резисторе;  $I_R$  – ток, протекающий через этот резистор;  $R$  – величина сопротивления резистора.

### Конденсатор:

$$U_C = \frac{Q}{C}, \quad I_C = C \frac{dU_C}{dt}. \quad (11.2)$$

$U_C$  – напряжение на конденсаторе;  $I_C$  – ток, протекающий через конденсатор;  $Q$  – заряд конденсатора,  $C$  – емкость конденсатора.

Из соотношений (11.2) следует:

$$U_C = U_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t I_C dt, \quad (11.3)$$

где  $U_C(0)$  – напряжение на конденсаторе в момент времени  $t = 0$ .

### Замечания

1) Выбор момента времени  $t = 0$  является, вообще говоря, произвольным. За этот момент времени удобно выбрать тот момент, когда происходит скачкообразное изменение одного из параметров цепи.

2) Напряжение и заряд на конденсаторе всегда является непрерывной функцией времени, даже в тех случаях, когда ток  $I_C$  испытывает очень быстрое («скачкообразные») изменения. Это связано с

тем, что никакая система не может изменять свою энергию мгновенно.

### Индуктивность:

$$U_L = L \frac{dI_L}{dt}. \quad (11.4)$$

$U_L$  – напряжение на катушке индуктивности,  $I_L$  – ток, протекающий через катушку;  $L$  – индуктивность катушки. Напряжение на катушке индуктивности  $U_L$  равно взятой с обратным знаком ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке. Поэтому можно либо учитывать напряжение на катушке индуктивности в сумме с другими напряжениями в контуре, либо включить этот элемент в состав ЭДС, действующих в контуре. Из соотношения (11.4) следует:

$$I_L = I_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t U_L dt. \quad (11.5)$$

где  $I_L(0)$  – сила тока через катушку в момент времени  $t = 0$ .

Реальная катушка наряду с индуктивностью  $L$ , обладает также омическим (активным) сопротивлением  $r$ , и напряжение  $U_{rL}$  на ней равно

$$U_{rL} = rI_L + L \frac{dI_L}{dt}. \quad (11.6)$$

*Замечание.* Ток, протекающий через катушку индуктивности, всегда является непрерывной функцией времени, даже в тех случаях, когда напряжение  $U_L$  испытывает очень быстрые («скачкообразные») изменения. Как и конденсатор, катушка индуктивности не может изменять свою энергию мгновенно.

**Генератор напряжения** – устройство, напряжение на выходе которого  $\mathcal{E}(t)$  не зависит от величины тока, протекающего через этот генератор. Внутреннее сопротивление такого генератора принимается равным нулю, а в реальности – это источник ЭДС с внутренним сопротивлением, много меньшим сопротивления внешней цепи.

**Генератор тока** – устройство, которое обеспечивает силу тока в цепи  $I(t)$ , не зависящую от напряжений на элементах этой цепи. Такой генератор имеет бесконечное внутреннее сопротивление, а в реальности – это источник ЭДС с внутренним сопротивлением, значительно превышающим сопротивление внешней цепи.

**Правила Кирхгофа** (более подробно см. §6.1 главы 6)

**Правило I.** Для каждого узла цепи алгебраическая сумма сил токов равна нулю:

$$\sum_i I_i = 0. \quad (11.7)$$

При суммировании знак входящего тока (обычно "+") принимается противоположным знаком выходящего ("–").

**Правило II.** При обходе любого замкнутого контура, выбранного в разветвленной цепи, алгебраическая сумма напряжений на элементах цепи (резисторе, конденсаторе, катушке индуктивности) равна алгебраической сумме ЭДС, входящих в данный контур:

$$\sum_i U_i = \sum_j \mathcal{E}_j. \quad (11.8)$$

Для использования данных формул сначала нужно выбрать направления токов в каждой ветви цепи, что можно сделать произвольным образом (истинные направления токов определяются по знакам полученных решений). Как и для резисторов, напряжения на конденсаторах и катушках индуктивности понимаются как разность потенциалов на их концах в выбранном направлении протекания тока.

Записывая правила Кирхгофа (11.7) и (11.8) с учётом выражений для напряжений на элементах цепи – резисторе, конденсаторе и катушке индуктивности (11.1) – (11.6), приходим к системе дифференциальных уравнений. Из этой системы можно получить одно **уравнение цепи** – дифференциальное уравнение, которое (в неявном виде) описывает изменение во времени одной изучаемой величины  $X$  (тока, напряжения, заряда). Решение этого уравнения даёт зависимость от времени  $X(t)$  в явном виде. В механике аналогами уравнения цепи и его решения являются уравнение движения и закон движения соответственно.

**Установившееся значение исследуемой величины**  $X_\infty$  – значение изучаемой величины  $X$  (тока, напряжения, заряда:  $X = I, U, Q$ ) при  $t \rightarrow \infty$ , т.е. после окончания всех переходных процессов.

**Начальные условия**  $X(0), X'(0)$  – такие значения исследуемой величины  $X(t)$  и её производной по времени  $X'(t)$ , которые они имеют сразу после “скачка” (изменения параметров цепи), который произошёл при  $t = 0$ .

$$\begin{aligned} X(0) &= X(t = 0), \\ X'(0) &= X'(t = 0). \end{aligned}$$

**$RC$ - и  $RL$ -цепи**

Если цепь состоит из резисторов и конденсаторов ( $RC$ -цепь) или из резисторов и катушек индуктивности ( $RL$ -цепь), то в ней могут происходить только релаксационные непериодические процессы. В зависимости от сложности цепи, уравнение цепи может быть любого порядка, начиная с первого.

В курсе общей физики рассматриваются только такие цепи, в которых уравнение цепи является дифференциальным уравнением либо первого, либо второго порядка.

**Уравнение цепи первого порядка**

В этом случае уравнение цепи можно записать в виде:

$$\frac{dX}{dt} + \frac{1}{\tau}[X - X_{\infty}] = 0. \quad (11.9)$$

Решение такого уравнения имеет следующий вид

$$X(t) = X_{\infty} + Ae^{-t/\tau},$$

где  $A$  — константа, определяемая из начального условия  $X(0)$ . Так как  $X(0) = X_{\infty} + A$ , решение уравнения (11.9) окончательно можно записать следующим образом:

$$X(t) = X_{\infty} - [X_{\infty} - X(0)]e^{-t/\tau}. \quad (11.10)$$

Например, если в качестве исследуемой величины выбрана сила тока в цепи, то уравнение цепи имеет вид

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{\tau}[I - I_{\infty}] = 0,$$

а его решение

$$I(t) = I_{\infty} - [I_{\infty} - I(0)]e^{-t/\tau}.$$

Величина  $\tau$ , входящая в уравнение (11.9) и в его решение (11.10) определяет время, за которое величина  $|X(t) - X_{\infty}|$  уменьшается в  $e$  раз. Эта величина называется **временем релаксации**. Она является одной из основных характеристик цепи, определяется только параметрами цепи и не зависит от начальных условий.

**Уравнение цепи второго порядка**

Его можно представить в виде:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\beta\frac{dX}{dt} + \Omega^2(X - X_{\infty}) = 0. \quad (11.11)$$

Решением этого уравнения является функция

$$X(t) = X_{\infty} + A_1 e^{-\beta_1 t} + B_1 e^{-\beta_2 t}, \quad \beta_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \Omega^2}, \quad (11.12)$$

в которой **константы  $\Omega$  и  $\beta$  определяются параметрами самой цепи**, а константы  $A_1$  и  $B_1$  находятся из начальных условий.

При  $t \rightarrow \infty$  значение исследуемой величины, как следует из (11.10) и (11.12), стремится к установившемуся значению  $X_{\infty}$ . Таким образом, решение уравнения цепи в обоих случаях описывает переходный процесс установления силы тока в цепи (или напряжения на элементах цепи) после скачкообразного изменения параметров (например, замыкания или размыкания ключа).

### ***RLC-цепи***

*Если электрическая цепь содержит конденсатор, катушку индуктивности и резистор, то в ней при определенном соотношении параметров элементов могут происходить колебательные процессы. Такую цепь называют колебательным контуром.*

Если в цепи присутствуют и резисторы, и катушки индуктивности, и конденсаторы, то уравнение цепи имеет вид дифференциального уравнения порядка не ниже второго. В простых случаях, рассматриваемых обычно в курсе общей физики, это – уравнение второго порядка, которое имеет вид:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + 2\beta \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 (X - X_{\infty}) = 0. \quad (11.13)$$

В зависимости от соотношения параметров цепи решение этого уравнения может описывать как свободные колебания, так и релаксационные (непериодические) процессы.

Величина  $\beta$ , входящая в уравнение (11.13) определяет диссипацию энергии в цепи и называется **коэффициентом затухания**. Она определяется параметрами цепи ( $R, L, C$ ). Как и в механических колебательных системах, потери энергии в электрической цепи приводят к затухающим колебаниям. В электрическом колебательном контуре энергия уменьшается за счет выделения тепла на активном сопротивлении (резисторе). В рассматриваемом квазистационарном приближении потери на излучение малы и не учитываются. Величина

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$



является **временем релаксации** контура, т.е. временем, за которое амплитуда собственных затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Величина  $\omega_0$  зависит только от индуктивности катушки и емкости конденсатора и определяет частоту незатухающих (гармонических) свободных колебаний в контуре, если бы в нем не было потерь (см. (11.14), (11.15)).

В зависимости от соотношения коэффициента затухания  $\beta$  и частоты  $\omega_0$  уравнение (11.13) описывает следующие различные процессы, происходящие в цепи.

1)  $\beta = 0$ .

Если в цепи имеются только  $L$  и  $C$  элементы, то  $\beta = 0$ . В этом случае реализуются **свободные незатухающие гармонические колебания**. При этом уравнение цепи имеет вид:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0, \quad (11.14)$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  – частота собственных гармонических колебаний. Решением уравнения (11.14) является

$$X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (11.15)$$

где  $X_0$  – амплитудное значение исследуемой величины,  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний. Константы  $X_0$  и  $\varphi_0$  находятся из начальных условий, т.е. из значений переменной  $X(t)$  и её производной при  $t = 0$ .

В реальной цепи потери энергии всегда существуют, т.е.  $\beta > 0$  всегда, но потери за один период могут быть малыми по сравнению с запасом энергии в контуре, и тогда приближенно можно считать колебания гармоническими.

2)  $\beta < \omega_0$ .

Этот случай возможен, только если в цепи присутствуют все  $L$ ,  $C$  и  $R$  элементы. При этом реализуются свободные затухающие колебания.

Если константа  $X_\infty$ , входящая в уравнение (11.13), отлична от нуля ( $X_\infty \neq 0$ ), то после затухания колебаний (при  $t \rightarrow \infty$ ) соответствующая переменная (ток в цепи, напряжения на элементах цепи или установившиеся заряды на конденсаторах) не равна нулю (аналог в механике – колебания со смещённым от нуля положением

равновесия из-за приложения к колебательной системе постоянной силы).

Решение уравнения (11.13) в этом случае имеет вид

$$X(t) = X_{\infty} + X_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (11.16)$$

где константы  $X_0$  и  $\varphi_0$ , как и в предыдущем случае, находятся из начальных условий, т.е. из значений переменной  $X(t)$  и её производной при  $t = 0$ , а  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота собственных затухающих колебаний.

При очень слабом затухании ( $\beta \ll \omega_0$ ) обычно говорят о величине  $X_0 e^{-\beta t}$  как о зависящей от времени амплитуде затухающих колебаний.

Выражение (11.16) удобно преобразовать к виду:

$$X(t) = X_{\infty} + e^{-\beta t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t), \quad (11.17)$$

где  $a$  и  $b$  – константы, для определения которых используются начальные условия:

$$X(0) = X_{\infty} + a;$$

$$X'(0) = -\beta a + \omega b.$$

### 3) $\beta \geq \omega_0$

В этом случае колебания в цепи отсутствуют, и реализуется переходной процесс установления напряжения на элементах цепи (силы тока в цепи).

Аналогично (11.11) решение уравнения цепи в этом случае имеет вид:

$$X(t) = X_{\infty} + A e^{-\beta_1 t} + B e^{-\beta_2 t}, \quad \text{где } \beta_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad (11.18)$$

а константы  $A$  и  $B$  определяются из начальных условий.

В частном случае  $\beta^2 = \omega_0^2$  решение уравнения (11.13) имеет вид

$$X(t) = X_{\infty} + (A + Bt) e^{-\beta t}. \quad (11.19)$$

**Основными характеристиками**, которыми определяются потери энергии в любой колебательной системе, в том числе и при описании затухающих колебаний, являются: коэффициент затухания  $\beta$  (определен выше), логарифмический декремент затухания  $\theta$  и добротность  $Q$ .

**Логарифмический декремент затухания  $\theta$**  определяется соотношением

$$\theta = \ln \frac{X_n}{X_{n+1}}, \quad (11.20)$$

где  $X_n$  и  $X_{n+1}$  – два последовательных максимальных отклонения (амплитуды) колеблющейся величины в одну и ту же сторону. Уч-

итывая, что  $X_n = e^{-\gamma(t_1+nT)} \frac{1}{\sqrt{1+(\gamma/\omega)^2}}$ , где  $t_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\gamma}$ ,  $T$  – период

затухающих колебаний, получаем

$$\theta = \beta T.$$

Логарифмический декремент затухания – это величина, обратная числу колебаний  $N_e$ , за которые амплитуда колебаний убывает в  $e \approx 2,7$  раза:

$$\theta = \frac{1}{N_e}. \quad (11.21)$$

Например, если  $\theta = 0,01$ , то амплитуда уменьшится в  $e$  раз после 100 колебаний.

Коэффициент затухания  $\beta$ , частота колебаний  $\omega$  и логарифмический декремент затухания связаны следующим соотношением

$$\theta = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\omega}. \quad (11.22)$$

**Добротность колебательной системы  $Q$**  определяется соотношением

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e, \quad (11.23)$$

При малом затухании ( $\beta \ll \omega_0$ ) добротность можно также представить как

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = 2\pi \frac{\langle W \rangle}{\langle \Delta W \rangle}, \quad (11.24)$$

где  $\langle W \rangle$  – средняя за период энергия, запасённая в цепи,  $\langle \Delta W \rangle$  – уменьшение энергии за один период колебаний. При очень большой величине добротности амплитуда уменьшается медленно, и форма колебания мало отличается от гармонической.

Если при описании затухающих колебаний использовать в качестве основных параметров частоту  $\omega_0$  и добротность  $Q$ , то частоту собственных затухающих колебаний можно представить в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{4Q^2} \right). \quad (11.25)$$

**Мощность, подводимая к элементу цепи, равна**

$$P(t) = U(t)I(t), \quad (11.26)$$

где  $U(t)$  и  $I(t)$  – напряжение на данном элементе (сопротивлении, конденсаторе, катушке) и ток через этот элемент. Эта мощность может выделяться на резисторе в виде тепла или расходоваться на зарядку конденсатора и создание магнитного поля в катушке индуктивности.

## § 11.2 Основные типы задач (классификация)

11.1. Задачи на определение временных зависимостей напряжения на элементах цепи или силы тока при переходных процессах в  $RC$  и  $RL$ -цепях.

11.2. Задачи на определение временных зависимостей зарядов, напряжений и токов в  $RLC$ -цепях.

11.3. Расчет энергетических характеристик процессов (мощность, энергия, количество выделенного тепла и т. д.).

## § 11.3 Методы решения и примеры решения задач

Методы решения задач типа 11.1 и 11.2 практически совпадают и сводятся к процедурам, описанным ниже.

Из условия задачи нужно определить переменную  $X$ , поведение которой следует исследовать (ток, напряжение, заряд).

Далее для указанной в условиях задачи схемы записать правила Кирхгофа (11.7), (11.8) и, пользуясь соотношениями (11.1) – (11.6), получить дифференциальное уравнение для искомой величины  $X$ .

Используя математические преобразования, привести полученное дифференциальное уравнение цепи к стандартному виду (11.9), (11.11), (11.13) и определить порядок уравнения.

Записать начальные условия для  $X(0)$  и  $X'(0)$ . Для определения установившегося стационарного значения  $X_\infty$  нужно в полученном

уравнении цепи приравнять нулю все производные по времени и решить это уравнение.

Исходя из типа полученного уравнения цепи, выбрать решение в виде (11.10), (11.12), (11.15), (11.16) - (11.19).

Из начальных условий найти все неизвестные коэффициенты в выбранном решении.

Проанализировать решение и написать ответ.

### Задачи типа 11.1

*Задачи на определение временных зависимостей напряжения на элементах цепи или силы тока при переходных процессах в  $RC$ - и  $RL$ -цепях*

Базовыми задачами этого раздела являются задачи **11.3.1**, **11.3.2**, **11.3.3**.

**Задача 11.3.1 (базовая задача).** Резистор  $R$ , незаряженный конденсатор  $C$  и генератор постоянного напряжения  $\mathcal{E}$  соединены последовательно (последовательная  $RC$ -цепь, *рис. 11.1 а*). Определить зависимость напряжения на конденсаторе от времени после замыкания ключа  $K$ .

#### Решение

По второму правилу Кирхгофа (11.8) сумма напряжений на резисторе  $U_R$  и конденсаторе  $U_C$  после замыкания ключа в любой момент времени должна быть равна  $\mathcal{E}$ :

$$U_C + U_R = \mathcal{E}.$$

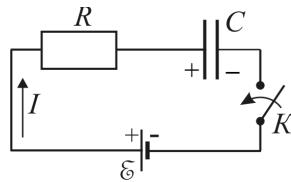
Согласно выражениям (11.1) и (11.2)

$$U_R = R I_R, \quad I_C = C \frac{dU_C}{dt}.$$

Так как все элементы цепи соединены последовательно, сила тока на всех участках цепи одинакова

$$I(t) = I_R = I_C.$$

Выберем в качестве исследуемой величины напряжение на конденсаторе  $U_C$ . Совершив обход контура по выбранному направ-



*Рис. 11.1а.* Зарядка конденсатора в последовательной  $RC$ -цепи (задача 11.3.1)

лению тока и используя записанные выше соотношения, получим уравнение цепи:

$$U_c + RC \frac{dU_c}{dt} = \mathcal{E}.$$

Приведём это уравнение к стандартному виду (11.9)

$$\frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{RC}(U_c - \mathcal{E}) = 0.$$

До замыкания ключа  $K$  напряжение на конденсаторе было равно нулю. Напряжение на конденсаторе не может измениться скачком, следовательно, и сразу после замыкания ключа это напряжение будет равно нулю. Таким образом, начальное условие можно записать в виде:  $U_c(0) = 0$ .

В соответствии с (11.10) решением этого уравнения будет функция

$$U_c(t) = \mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau}),$$

где время релаксации  $\tau = RC$ . График этой зависимости представлен на рис. 11.1 б.

При  $t = \tau$  напряжение на конденсаторе равно  $U_c(t) = \mathcal{E}(1 - e^{-1}) \approx 0,63\mathcal{E}$ .

**Ответ:**  $U_c(t) = \mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau})$ .

*Замечание 1.* Используя полученный результат, можно определить зависимость от времени и всех остальных параметров цепи: напряжения на резисторе, силы тока в цепи и заряда конденсатора:

$$U_R(t) = \mathcal{E} - U_c(t) = \mathcal{E} e^{-t/\tau};$$

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau};$$

$$Q(t) = CU_c(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau}).$$

*Замечание 2.* Если до замыкания ключа конденсатор был заряжен до напряжения  $U_0$ , то начальное условие будет иметь вид  $U_c(0) = U_0$ , и напряжение на конденсаторе будет меняться со временем по следующему закону:

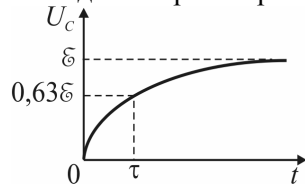


Рис. 11.1б. Зависимость напряжения на конденсаторе от времени при его зарядке в последовательной  $RC$ -цепи (задача 11.3.1)

$$U_c(t) = \xi + (U_0 - \xi)e^{-t/\tau}.$$

**Задача 11.3.2 (базовая задача).** Заряженный до напряжения  $U_0$  конденсатор  $C$  и резистор  $R$  соединены последовательно (последовательная  $RC$ -цепь, рис. 11.2а). Определить зависимость напряжения на конденсаторе от времени после замыкания ключа  $K$ .

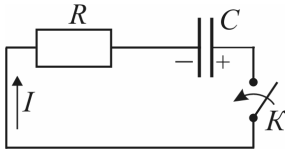


Рис. 11.2 а. Разрядка конденсатора в последовательной  $RC$ -цепи (задача 11.3.2)

### Решение

По второму правилу Кирхгофа (11.8) сумма напряжений на резисторе  $U_R$  и конденсаторе  $U_C$  после замыкания ключа в любой момент времени должна быть равна 0:

$$U_C + U_R = 0.$$

Аналогично решению задачи 11.3.1 можно записать

$$U_R = R I_R, \quad I_C = C \frac{dU_C}{dt},$$

$$I(t) = I_R = I_C.$$

Выберем в качестве исследуемой величины напряжение на конденсаторе  $U_C$ . Выполнив обход контура по выбранному направлению тока и используя записанные выше соотношения, получим уравнение цепи и приведём его к виду (11.9):

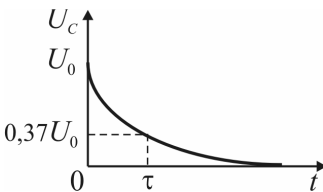


Рис. 11.2 б. Зависимость напряжения на конденсаторе от времени при разрядке в последовательной  $RC$ -цепи (задача 11.3.2)

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C = 0.$$

Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе равно  $U_0$ , то есть  $U_C(0) = U_0$ . В соответствии с (11.10) решением этого уравнения будет функция

$$U_C(t) = U_0 e^{-t/\tau},$$

где время релаксации  $\tau = RC$ .

График этой зависимости представлен на рисунке 11.2 б.

**Ответ:**  $U_c(t) = U_0 e^{-t/RC}$ .

*Замечание.* Режим зарядки и разрядки конденсатора можно получить, если вместо источника постоянного напряжения и ключа ис-

пользовать генератор прямоугольного импульса напряжения (рис. 11.3 б):

$$\mathcal{E}(t) = 0 \text{ при } t < 0, t > T_{\text{и}};$$

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \text{ при } 0 < t < T_{\text{и}}.$$

Здесь длительность импульса должна быть намного больше времени релаксации ( $T_{\text{и}} \gg \tau$ ), чтобы за время действия импульса напряжение на конденсаторе практически сравнялось с его стационарным значением  $\mathcal{E}_0$ .

**Задача 11.3.3 (базовая задача).** Резистор  $R$ , катушка индуктивности  $L$  и генератор напряжения  $\mathcal{E}$  соединены последовательно (последовательная  $RL$ -цепь, рис. 11.3 а). Определить зависимость напряжения на резисторе от времени, если напряжение генератора меняется со временем по закону, показанному на рис. 11.3б:

$$\mathcal{E}(t) = 0 \text{ при } t < 0, t > T_{\text{и}};$$

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \text{ при } 0 < t < T_{\text{и}}.$$

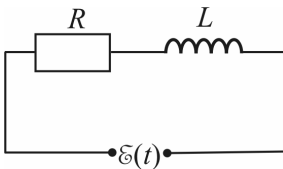


Рис. 11.3а. Схема к расчёту переходных процессов в последовательной  $RL$ -цепи (задача 11.3.3)

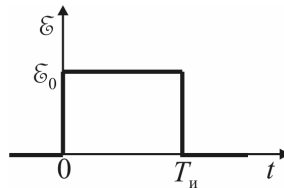


Рис. 11.3б. Сигнал, формируемый генератором прямоугольных импульсов напряжения

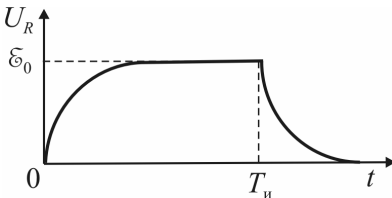


Рис. 11.3в. Зависимость напряжения на резисторе от времени в последовательной  $RL$ -цепи (задача 11.3.3)

При решении считать, что при  $t < 0$  сила тока в цепи равна нулю, а время релаксации существенно меньше длительности импульса ( $\tau \ll T_{\text{и}}$ ).



**Решение**Интервал  $0 < t < T_{и}$ 

Используя второе правило Кирхгофа (11.8) запишем

$$U_R + U_L = \mathcal{E}_0.$$

Так как все элементы цепи соединены последовательно, сила тока на всех участках цепи одинакова

$$I(t) = I_R = I_L.$$

Согласно выражениям (11.1) и (11.4)

$$U_R = R I_R, \quad U_L = L \frac{dI}{dt} = \frac{L}{R} \frac{dU_R}{dt}.$$

Выберем в качестве исследуемой величины напряжение на резисторе  $U_R$ . Используя записанные выше соотношения, получим уравнение цепи:

$$U_R + \frac{L}{R} \frac{dU_R}{dt} = \mathcal{E}_0.$$

Приведём это уравнение к стандартному виду (11.9)

$$\frac{dU_R}{dt} + \frac{R}{L}(U_R - \mathcal{E}_0) = 0.$$

Сила тока в цепи не может измениться скачком, следовательно, начальное условие можно записать в виде  $U_R(0) = 0$ .

В соответствии с (11.10) решением полученного уравнения будет функция

$$U_R(t) = \mathcal{E}_0(1 - e^{-t/\tau}),$$

где время релаксации  $\tau = R/L$ . График этой зависимости представлен на *рис. 11.3 в*.

Интервал  $t \geq T_{и}$ 

Рассуждая аналогично первой части данной задачи, запишем уравнение цепи для этого промежутка времени

$$\frac{dU_R}{dt} + \frac{R}{L}U_R = 0.$$

Так как согласно условию  $T_{и} \gg \tau$ , то при  $t = T_{и}$  напряжение на резисторе можно считать равным  $U_R(T_{и}) = \mathcal{E}_0(1 - e^{-T_{и}/\tau}) \approx \mathcal{E}_0$ .

Тогда получим зависимость напряжения на резисторе от времени:  $U_R(t) = \varepsilon_0 e^{-(t-T_n)/\tau}$ , где время релаксации  $\tau = R/L$ .

График этой зависимости представлен на рисунке 11.3в.

**Ответ:**  $U_R(t) = \varepsilon_0(1 - e^{-tL/R})$ , при  $0 < t < T_n$ ;

$$U_R(t) = \varepsilon_0 e^{-(t-T_n)L/R}, \quad \text{при } t \geq T_n.$$

**Задача 11.3.4.** Незаряженный конденсатор, резистор и генератор напряжения  $\varepsilon(t)$  соединены в последовательную цепь (рис. 11.4а). Определить зависимость от времени напряжения на конденсаторе  $U_C(t)$ , если генератор напряжения формирует пилообразный сигнал (см. рис. 11.4б):

$$\varepsilon(t) = 0 \quad \text{при } t < 0, t > T_0;$$

$$\varepsilon(t) = \alpha t \quad \text{при } 0 < t < T_0.$$

### Решение

Так как пилообразный сигнал нельзя описать одной функцией, рассмотрим отдельно случаи  $0 < t < T_0$  и  $t \geq T_0$ .

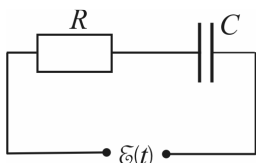


Рис. 11.4а. Схема последовательного соединения резистора  $R$ , конденсатора  $C$  и генератора напряжения  $\varepsilon(t)$  (задача 11.3.4)

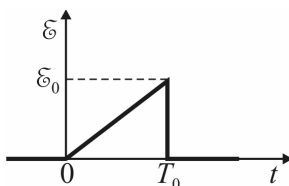


Рис. 11.4б. Сигнал, формируемый генератором напряжения  $\varepsilon(t)$  (задача 11.3.4)

### Интервал $0 < t < T_0$

ЭДС в цепи не равна нулю, следовательно, конденсатор будет заряжаться. Второе правило Кирхгофа (11.8) для этого случая имеет вид:

$$RI + \frac{q}{C} = \alpha t,$$

где  $I$  – ток в цепи,  $q$  – заряд конденсатора.

В отличие от базовой задачи **11.3.1** здесь ЭДС не является постоянной величиной, однако, продифференцировав по времени правую и левую часть этого уравнения, получим следующее уравнение относительно силы тока в цепи

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \alpha.$$

Приводя уравнение цепи к стандартному виду (11.9), имеем:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC}(I - \alpha C) = 0.$$

Решение этого уравнения, с учётом начального условия  $I(0) = 0$  (при  $t < 0$  ток в цепи отсутствовал), согласно (11.10) равно

$$I(t) = \alpha C(1 - e^{-t/\tau}), \text{ где } \tau = RC.$$

Таким образом, напряжение на конденсаторе в этот промежуток времени меняется по закону

$$U_C(t) = \mathcal{E}(t) - U_R(t) = \alpha t - RI(t) = \alpha t - \alpha RC(1 - e^{-t/\tau}) = \alpha [t - \tau(1 - e^{-t/\tau})]$$

и при  $t = T_0$  достигает максимального значения

$$U_C(T_0) = \alpha [T_0 - \tau(1 - e^{-T_0/\tau})].$$

#### Интервал $t \geq T_0$

Так как здесь ЭДС генератора равна нулю, то конденсатор будет разряжаться. В этом случае, используя результат базовой задачи **11.3.2**, имеем:

$$U_C(t) = U_C(T_0)e^{-(t-T_0)/\tau} = \alpha [T_0 - \tau(1 - e^{-T_0/\tau})] e^{-(t-T_0)/\tau}.$$

**Ответ:**

$$U_C(t) = \alpha [t - \tau(1 - e^{-t/\tau})] \quad \text{при } 0 < t < T_0,$$

$$U_C(t) = \alpha [T_0 - \tau(1 - e^{-T_0/\tau})] e^{-(t-T_0)/\tau} \quad \text{при } t \geq T_0.$$

*Замечание.* В частном случае  $T_0 \ll RC = \tau$  экспонента может быть представлена в виде  $e^{-t/\tau} \approx 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + \dots$  Тогда

$$U_C(t) \approx \frac{\alpha t^2}{2\tau} \quad \text{при } 0 < t < T_0;$$

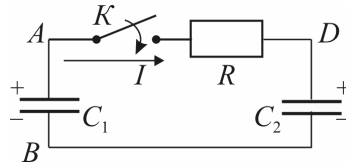
$$U_C(t) \approx \frac{\alpha T_0^2}{2\tau} e^{-(t-T_0)/\tau} \quad \text{при } t \geq T_0.$$

**Задача 11.3.5.** Конденсаторы  $C_1$  и  $C_2$ , предварительно заряженные соответственно до напряжений  $U_1(0)$  и  $U_2(0)$  в полярности, указанной на *рис. 11.5*, соединяют последовательно с резистором  $R$ . Определить зависимость от времени силы тока в цепи и напряжений на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$  после замыкания ключа  $K$ .

При расчёте положить  $U_1(0) > U_2(0)$ .

### Решение

После замыкания ключа  $K$  резистор  $R$  и конденсаторы  $C_1$  и  $C_2$  составляют последовательную замкнутую цепь. Внешнего источника – генератора напряжения, в этой цепи нет. Поэтому второе правило Кирхгофа (11.8) с учетом (11.2) для указанной на рисунке 11.5 полярности подключения конденсаторов и выбранного направления тока запишется в виде:



*Рис. 11.5.* Схема соединения резистора  $R$  и конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$  в задаче 11.3.5

$$-\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + RI = 0.$$

Здесь  $I$  – сила тока в цепи,  $Q_1$  и  $Q_2$  – заряды конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ .

Продифференцируем по времени правую и левую часть этого уравнения. Тогда учитывая, что согласно закону сохранения заряда сила тока в цепи равна  $I = -\frac{1}{C_1} \frac{dQ_1}{dt} = \frac{1}{C_2} \frac{dQ_2}{dt}$ , получим:

$$-\frac{1}{C_1} \frac{dQ_1}{dt} + \frac{1}{C_2} \frac{dQ_2}{dt} + R \frac{dI}{dt} = R \frac{dI}{dt} + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) I = 0.$$

Решением этого уравнения по аналогии с базовой задачей 11.3.2 будет функция

$$I(t) = I(0)e^{-t/\tau},$$

где  $I(0)$  – начальное значение тока в цепи,  $\tau = R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$  – время релаксации.

Определим  $I(0)$ . Так как напряжение на конденсаторе не может изменяться скачком, то сразу после замыкания ключа  $K$  напряжения на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$  имеют то же значение, что и до замыкания ключа, то есть  $U_1(0)$  и  $U_2(0)$ . Таким образом, напряжение на рези-

сторе сразу после замыкания ключа равно  $U_R(0) = U_1(0) - U_2(0)$ . Поэтому согласно закону Ома для участка цепи, начальное значение силы тока равно

$$I(0) = \frac{U_1(0) - U_2(0)}{R}.$$

Окончательно получим следующую зависимость силы тока в цепи от времени:

$$I(t) = \frac{U_1(0) - U_2(0)}{R} e^{-t/\tau}.$$

Определить зависимость от времени напряжений на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$  после замыкания ключа  $K$  можно двумя способами.

### Способ 1

Так как напряжение  $U_1(0) > U_2(0)$ , то после замыкания ключа конденсатор  $C_1$  будет разряжаться, и согласно (11.3), напряжение на нём (падение напряжения между точками  $A$  и  $B$  схемы) будет уменьшаться со временем

$$U_{AB}(t) = U_1(0) - \frac{1}{C_1} \int_0^t Idt = U_1(0) - \frac{I(0)}{C_1} \int_0^t e^{-t/\tau} dt,$$

или, с учётом выражения для  $I(0)$ , полученного выше

$$U_{AB}(t) = U_1(0) - \frac{(U_1(0) - U_2(0))C_2}{C_1 + C_2} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Аналогично, получим напряжение на конденсаторе  $C_2$  (напряжение на нём увеличивается, т.е. конденсатор заряжается)

$$U_{DB}(t) = U_2(0) + \frac{1}{C_2} \int_0^t Idt = U_2(0) + \frac{(U_1(0) - U_2(0))C_2}{C_1 + C_2} (1 - e^{-t/\tau}).$$

### Способ 2

После замыкания ключа  $K$  в цепи будет происходить зарядка конденсатора  $C_2$  от значения  $U_2(0)$  до некоторого установившегося значения  $U_\infty$ , и одновременная разрядка конденсатора  $C_1$  от значения  $U_1(0)$  до установившегося значения  $U_\infty$ .

Аналогично базовым задачам **11.3.2** (разрядка конденсатора в последовательной  $RC$ -цепи) и **11.3.1** (зарядка конденсатора в последовательной  $RC$ -цепи) получим:

$$U_{AB}(t) = U_\infty - [U_\infty - U_1(0)]e^{-t/\tau};$$

$$U_{DB}(t) = U_{\infty} + [U_2(0) - U_{\infty}]e^{-t/\tau},$$

$$\text{где } \tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

Определим установившееся значение напряжения на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$ .

Суммарный заряд, сосредоточенный как на “верхних” (точки  $A$  и  $D$ ), так и на “нижних” (точка  $B$ ) обкладках конденсаторов не изменяется во время переходного процесса, то есть

$$Q_1(0) + Q_2(0) = Q_1(t) + Q_2(t) = Q_1(\infty) + Q_2(\infty).$$

$$\begin{aligned} \text{Учитывая, что} \quad Q_1(0) &= C_1U_1(0), \\ Q_2(0) &= C_2U_2(0), \\ Q_1(\infty) &= C_1U_{\infty}, \\ Q_2(\infty) &= C_2U_{\infty}, \end{aligned}$$

получим установившееся значение напряжения  $U_{\infty}$ .

$$U_{\infty} = \frac{C_1U_1(0) + C_2U_2(0)}{C_1 + C_2}.$$

Окончательный результат имеет следующий вид

$$\begin{aligned} U_{AB}(t) &= \frac{C_1U_1(0) + C_2U_2(0)}{C_1 + C_2} - \frac{C_2(U_2(0) - U_1(0))}{C_1 + C_2} e^{-t/\tau}; \\ U_{DB}(t) &= \frac{C_1U_1(0) + C_2U_2(0)}{C_1 + C_2} - \frac{C_1(U_1(0) - U_2(0))}{C_1 + C_2} e^{-t/\tau}. \end{aligned}$$

Результаты для напряжений  $U_{AB}$  и  $U_{DB}$ , полученные первым и вторым способом, хотя и имеют разный вид, являются эквивалентными. Покажем это для  $U_{AB}$ :

$$\begin{aligned} U_{AB}(t) &= U_1(0) - \frac{(U_1(0) - U_2(0))C_2}{C_1 + C_2} (1 - e^{-t/\tau}) = \\ &= U_1(0) - \frac{(U_1(0) - U_2(0))C_2}{C_1 + C_2} + \frac{(U_1(0) - U_2(0))C_2}{C_1 + C_2} e^{-t/\tau} = \\ &= \frac{C_1U_1(0) + C_2U_2(0)}{C_1 + C_2} - \frac{C_2(U_2(0) - U_1(0))}{C_1 + C_2} e^{-t/\tau}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } I(t) = \frac{U_1(0) - U_2(0)}{R} e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2};$$

$$U_{AB}(t) = U_1(0) - \frac{(U_1(0) - U_2(0))C_2}{C_1 + C_2} (1 - e^{-t/\tau}).$$

$$U_{DB}(t) = U_2(0) + \frac{(U_1(0) - U_2(0))C_2}{C_1 + C_2} (1 - e^{-t/\tau}).$$

**Задача 11.3.6.** Параллельно соединённые резисторы сопротивлением  $R$  и  $R/99$  соединены последовательно с катушкой индуктивности  $L$  и генератором постоянного напряжения  $\mathcal{E}_0$  (рис. 11.6а). Определить, как изменяется со временем напряжение  $U(t)$  между точками  $A$  и  $B$  при замыкании и размыкании ключа  $K$ .

### Решение

#### 1) Ключ замыкают

Используя правило Кирхгофа (11.8), составляем уравнение для тока  $I$ , который протекает через индуктивность  $L$  и источник ЭДС  $\mathcal{E}_0$ .

$$R_0 I = \mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt},$$

где  $R_0 = R/100$  – сопротивление двух параллельно соединённых резисторов  $R$  и  $r$ . Приведём уравнение цепи к виду (11.9)

$$\frac{L}{R_0} \frac{dU}{dt} + (U - \mathcal{E}_0) = 0$$

или

$$\frac{dU}{dt} + \frac{R_0}{L} (U - \mathcal{E}_0) = 0.$$

Время релаксации при замыкании ключа равно  $\tau_1 = L/R_0$ .

Для определения начального условия  $U(0)$  используем тот факт, что ток в цепи сразу после включения ключа  $I(0)$  имеет то же значение, что и до включения:

$$I(0) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

Тогда при  $t = 0$  имеем

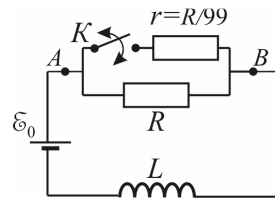


Рис. 11.6а. Схема соединения элементов цепи в задаче 11.3.6

$$U(0) = I(0)R_0 = \frac{\varepsilon_0}{R} R_0.$$

Установившееся значение исследуемого напряжения равно  $U_\infty = \varepsilon_0$  (так как катушка не обладает омическим сопротивлением).

Используя выражение (11.10), получим

$$U(t) = U_\infty - [U_\infty - U(0)]e^{-t/\tau_1} = \varepsilon_0 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{R_0}{R} \right) e^{-t/\tau_1} \right].$$

## 2) Ключ размыкают

Проводя аналогичные расчеты и учитывая изменившиеся начальные условия ( $U(0) = \varepsilon_0$ ), получим

$$U(t) = \varepsilon_0 \left[ 1 + \left( \frac{R}{R_0} - 1 \right) e^{-t/\tau_2} \right], \quad \text{где } \tau_2 = \frac{L}{R}.$$

Схематично графики этих релаксационных процессов показаны на рис. 11.6 б.

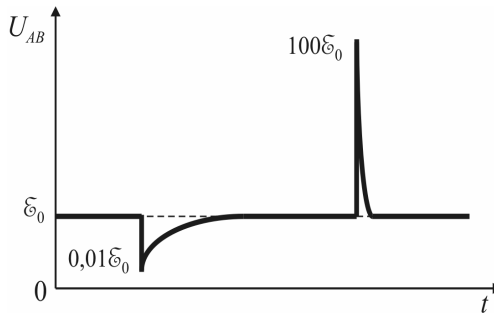


Рис. 11.6б. Зависимость напряжения между точками А и В от времени при замыкании и размыкании ключа (задача 11.3.6)

**Ответ:** при замыкании ключа  $U(t) = \varepsilon_0 \left( 1 - 0,99 \exp\left(-\frac{tR}{100L}\right) \right)$ ;

при размыкании ключа  $U(t) = \varepsilon_0 \left( 1 + 99 \exp\left(-\frac{tR}{L}\right) \right)$ .

*Замечание.* Времена релаксации в рассматриваемых случаях имеют существенно разные значения



$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{R}{R_0} = 100.$$

**Задача 11.3.7.** Параллельно соединенные резистор  $R$  и конденсатор  $C$  подсоединены к генератору тока  $I(t)$  (рис. 11.7а), который формирует ступенчатый сигнал (рис. 11.7б).

$$I(t) = 0 \text{ при } t < 0,$$

$$I(t) = I_0 \text{ при } t > 0.$$

Определить, как изменяется со временем напряжение  $U$  на конденсаторе и ток, протекающий через конденсатор.

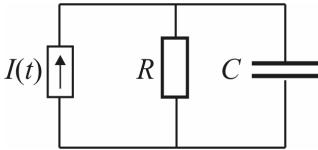


Рис. 11.7а. Схема параллельного соединения резистора  $R$ , конденсатора  $C$  и генератора тока  $I(t)$  (задача 11.3.7)

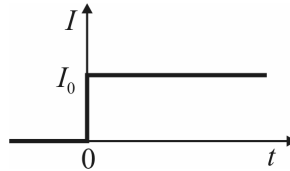


Рис. 11.7б. Ступенчатый сигнал, формируемый генератором тока (задача 11.3.7)

### Решение

Используя первое правило Кирхгофа (11.7), можем записать

$$I_0 = I_R + I_C,$$

Здесь  $I_R$  и  $I_C$  – токи, протекающие через резистор и конденсатор, а  $I_0$  – полный ток в цепи, создаваемый генератором тока.

Так как резистор и конденсатор соединены параллельно, второе правило Кирхгофа (11.8) запишется в виде

$$U_R = U_C = U.$$

Тогда, используя выражения для напряжений на резисторе и конденсаторе (11.1) и (11.2), можно записать

$$I_R = \frac{U}{R}, \quad I_C = C \frac{dU}{dt}.$$

Получим уравнение цепи

$$C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} = I_0$$

или, приводя к стандартному виду (11.9)

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC}(U - RI_0) = 0$$

Напряжение на конденсаторе не может мгновенно измениться, поэтому начальное условие в нашем случае имеет следующий вид:

$$U(0) = 0.$$

Установившееся значение напряжения на конденсаторе  $U_\infty = I_\infty R = I_0 R$ .

Используя выражение (11.10), получим

$$U(t) = U_\infty - [U_\infty - U(0)]e^{-t/\tau} = I_0 R(1 - e^{-t/\tau}), \text{ где } \tau = RC.$$

$$I_C(t) = C \frac{d}{dt} (I_0 R(1 - e^{-t/\tau})) = I_0 e^{-t/\tau}.$$

**Ответ:**  $U(t) = I_0 R(1 - e^{-t/\tau})$ ,  $I_C(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ , где  $\tau = RC$ .

**Задача 11.3.8.** Квадратная рамка со стороной  $a$  находится в однородном магнитном поле индукции  $B$ . В начальный момент плоскость рамки параллельна направлению поля. Затем её очень быстро поворачивают на  $90^\circ$ , так, что её плоскость становится перпендикулярной направлению магнитного поля. Индуктивность рамки равна  $L$ , омическое сопротивление проводника, из которого сделана рамка, равно  $R$ . Определить, как изменится ток в рамке после её поворота. До поворота ток в рамке был равен нулю.

### Решение

1. При быстром повороте рамки из-за изменения величины потока магнитной индукции внешнего поля через плоскость рамки согласно закону электромагнитной индукции возникает ЭДС индукции

$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$  и, как следствие, появляется индукционный ток

$I(t)$ .

В процессе поворота рамки полный поток магнитной индукции  $\Phi(t)$  через плоскость рамки складывается из потока  $\Phi_B(t)$ , обусловленного наличием внешнего магнитного поля, и потока  $\Phi_I(t)$ , создаваемого индукционным током

$$\Phi(t) = \Phi_B(t) + \Phi_I(t),$$

где  $\Phi_B(t) = Ba^2 \sin \alpha(t)$ ,  $\alpha(t)$  – угол между плоскостью рамки и направлением магнитного поля, который изменяется от  $\alpha = 0$  (до поворота рамки) до  $\alpha = \pi/2$  (после поворота), а  $\Phi_I(t) = LI(t)$ , где  $L$  – индуктивность рамки.

Определим величину индукционного тока сразу после поворота.

Так как  $\mathcal{E}(t)dt = I(t)R = -d\Phi$ , то, проинтегрировав правую и левую часть этого уравнения на интервале времени от 0 до  $\Delta t$ , где  $\Delta t$  – время поворота, получим:

$$R \int_0^{\Delta t} I(t)dt = -[\Phi(\Delta t) - \Phi(0)].$$

Индукционный ток  $I(t)$  всегда ограничен по своей величине и не может принимать бесконечно больших значений (это одно из следствий закона Ленца). Поэтому при очень быстром повороте рамки

( $\Delta t \rightarrow 0$ ) интеграл  $\int_0^{\Delta t} I(t)dt$  стремится к нулю, откуда следует

$$\Phi(\Delta t) - \Phi(0) \approx 0.$$

До поворота рамки  $\Phi(0) = 0$ , так как ток в рамке отсутствовал, а плоскость рамки была параллельна направлению магнитного поля. Отсюда следует, что

$$\Phi(\Delta t) = \Phi_B(\Delta t) + LI(\Delta t) = Ba^2 + LI(\Delta t) = 0.$$

Таким образом, сила индукционного тока сразу после поворота рамки равна (с точностью до знака)

$$I(\Delta t) = \frac{Ba^2}{L}.$$

2) После поворота рамки поток, вызванный внешним полем, не изменяется со временем и равен  $\Phi_B = Ba^2$ .

Поэтому ЭДС индукции в рамке после окончания поворота существует только за счёт изменения силы тока (ЭДС самоиндукции)

$$\mathcal{E} = RI = -L \frac{dI}{dt}.$$

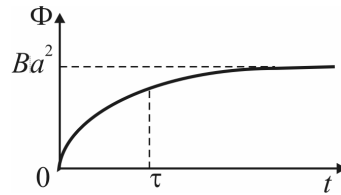


Рис. 11.8. Зависимость магнитного потока через рамку от времени после окончания её поворота (задача 11.3.8)

Для расчёта зависимости индукционного тока от времени после поворота рамки преобразуем это уравнение к стандартному виду (11.9):

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0.$$

За начало отсчёта времени примем теперь конец интервала времени  $\Delta t$ , за который поворот рамки был завершён. Зная найденное выше начальное значение силы тока  $I(0) = I(\Delta t)$ , далее, аналогично базовой задаче **11.3.3**, получим зависимость силы тока от времени:

$$I(t) = \frac{Ba^2}{L} e^{-t/\tau}, \text{ где } \tau = \frac{L}{R}.$$

**Ответ:**  $I(t) = \frac{Ba^2}{L} e^{-\frac{R}{L}t}.$

*Замечание 1.* После окончания поворота рамки магнитный поток через её плоскость изменяется по закону

$$\Phi(t) = Ba^2 - LI(t) = Ba^2(1 - e^{-t/\tau}), \text{ где } \tau = \frac{L}{R} \text{ (см. рис. 11.8)}.$$

*Замечание 2.* Термин «очень быстро» в условии задачи имеет относительный характер. Для того, чтобы приведённое выше решение было справедливым, необходимо чтобы время, за которое совершается поворот рамки, было намного меньше времени релаксации  $\Delta t \ll \tau = \frac{L}{R}$ . В случае сверхпроводящей рамки ( $R = 0$ ) время релаксации  $\tau \rightarrow \infty$ . В этом случае решение остаётся справедливым и при сколь угодно медленном повороте рамки.

**Задача 11.3.9.** Определить зависимость от времени напряжения  $U_2(t)$  на конденсаторе  $C_2$  в цепи, представленной на *рис. 11.9a*, если генератор напряжения  $\xi(t)$  формирует ступенчатый сигнал (*рис. 11.9б*)

$$\xi(t) = 0 \quad \text{при } t < 0,$$

$$\xi(t) = \xi_0 \quad \text{при } t > 0.$$

При  $t < 0$  напряжения и токи в цепи равны нулю. При расчёте положить  $C_1 = C_2 = C$ ,  $R_1 = R_2 = R$ .

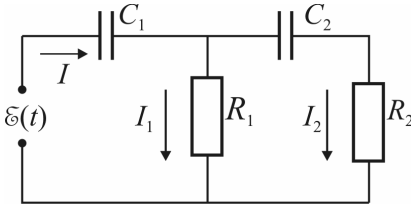


Рис. 11.9а. Соединение элементов цепи в задаче 11.3.9

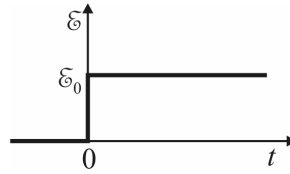


Рис. 11.9б. Ступенчатый сигнал, формируемый генератором напряжения

### Решение

Для контура  $(\varepsilon, C_1, C_2, R_2)$ , согласно второму правилу Кирхгофа (11.8), запишем.

$$\frac{Q_1}{C} + U_2 + R_2 I_2 = \varepsilon(t).$$

Чтобы получить уравнение относительно неизвестной  $U_2$ , вначале продифференцируем полученное уравнение

$$\frac{1}{C} \frac{dQ_1}{dt} + \frac{dU_2}{dt} + R \frac{dI_2}{dt} = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}.$$

Выразим напряжения на элементах цепи через  $U_2$  и учтём, что при  $t > 0$  производная  $\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$  для ступенчатого сигнала равна нулю.

Используя первое правило Кирхгофа (11.7) и соотношение (11.2), получим:

$$I = I_1 + I_2, \\ I = \frac{dQ_1}{dt}, \quad I_2 = \frac{dQ_2}{dt} = C \frac{dU_2}{dt},$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  – заряды на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$ ;  $I, I_1, I_2$  – токи в цепи (см. рис. 11.9 а).

Так как резистор  $R_1$  и последовательная цепочка  $R_2 C_2$  соединены параллельно, то напряжения на них одинаковы:

$$R I_1 = U_2 + R I_2.$$

Используем взаимосвязь между током  $I_2$  и напряжением  $U_2$ :

$$I_1 = \frac{U_2}{R} + C \frac{dU_2}{dt}.$$

Таким образом, получим:

$$\frac{dQ_1}{dt} = I_1 + I_2 = \frac{U_2}{R} + C \frac{dU_2}{dt} = \frac{U_2}{R} + 2C \frac{dU_2}{dt};$$

$$\frac{dI_2}{dt} = C \frac{d^2U_2}{dt^2}.$$

Для уравнения цепи имеем:

$$RC \frac{d^2U_2}{dt^2} + 3 \frac{dU_2}{dt} + \frac{1}{RC} U_2 = 0.$$

Разделим обе части уравнения на  $RC$

$$\frac{d^2U_2}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{dU_2}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} U_2 = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (11.11) если ввести обозначения:

$$\beta = \frac{3}{2RC}, \quad \Omega = \frac{1}{RC}.$$

Решение можно представить в виде (11.12)

$$U_2(t) = A_1 e^{-\beta_1 t} + B_1 e^{-\beta_2 t}, \quad \text{где } \beta_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \Omega^2}.$$

Для нахождения констант  $A_1$  и  $B_1$  **определим начальные условия.**

Сразу после «скачка» напряжения  $\mathcal{E}(t)$  от нуля до  $\mathcal{E}_0$  напряжения на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$  равны нулю. Тогда в этот момент

$$\mathcal{E}_0 = R_2 I_2 = RC \left. \frac{dU_2}{dt} \right|_{t=0}.$$

и начальные условия имеют вид:

$$\begin{cases} U_2(0) = 0; \\ U_2'(0) = \frac{\mathcal{E}_0}{RC}. \end{cases}$$

откуда получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = A_1 + B_1; \\ \frac{\mathcal{E}_0}{RC} = -\beta_1 A_1 - \beta_2 B_1, \end{cases}$$

решениями которой являются  $A_1 = -B_1 = -\frac{\mathcal{E}_0}{2RC\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}} = -\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{5}}.$

Используя функцию гиперболический синус  $\text{sh}(\gamma t) = \frac{e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}}{2}$ , результат можно представить в виде:

$$\begin{aligned} U_2(t) &= -\frac{\xi_0}{\sqrt{5}} \exp[(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \Omega^2})t] + \frac{\xi_0}{\sqrt{5}} \exp[(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \Omega^2})t] = \\ &= \frac{\xi_0}{\sqrt{5}} e^{-\beta t} \cdot 2 \frac{e^{t\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}} - e^{-t\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}}}{2} = 2 \frac{\xi_0}{\sqrt{5}} e^{-\beta t} \text{sh}(t\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\beta = \frac{3}{2RC}$ ,  $\sqrt{\beta^2 - \Omega^2} = \frac{\sqrt{5}}{2RC}$  окончательно получим:

$$U_2(t) = \frac{2\xi_0}{\sqrt{5}} \exp\left(-\frac{3}{2RC}t\right) \text{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC}t\right).$$

**Ответ:** 
$$U_2(t) = \frac{2\xi_0}{\sqrt{5}} \exp\left(-\frac{3}{2RC}t\right) \text{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC}t\right).$$

## Задачи типа 11.2

*Задачи на определение временных зависимостей зарядов, напряжений и токов в  $RLC$ -цепях*

Базовыми задачами этого раздела являются задачи **11.3.11** и **11.3.12**.

**Задача 11.3.10 (базовая задача).** Конденсатор емкости  $C$  заряжается от источника с постоянной ЭДС  $\xi_0$  через индуктивность  $L$  и сопротивление  $R$  (рис. 11.10), причем  $R^2 = 4L/C$ . Определить, как изменяется со временем напряжение на конденсаторе.

### Решение

Второе правило Кирхгофа (11.8) для последовательной  $RLC$ -цепи имеет вид

$$RI + U = \xi_0 - L \frac{dI}{dt},$$

где  $U$  – напряжение на конденсаторе,  $I$  – ток в цепи.

Используя соотношения (11.2)

$$I = C \frac{dU}{dt}, \text{ получаем}$$

$$LC \frac{d^2U}{dt^2} + RC \frac{dU}{dt} + U = \varepsilon_0$$

или

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC} U = \frac{\varepsilon_0}{LC}.$$

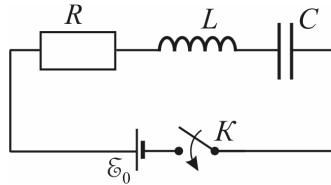


Рис. 11.10. Схема соединения элементов цепи в задаче 11.3.10

Введем обозначения  $\beta = \frac{R}{2L}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , тогда это уравнение окончательно принимает вид (11.13):

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\beta \frac{dU}{dt} + \omega_0^2(U - \varepsilon_0) = 0.$$

Учитывая, что  $R^2 = \frac{4L}{C}$ , получаем  $\beta^2 = \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$ , то есть реализуется случай  $\beta = \omega_0$ . В этом случае решение уравнения цепи будет иметь вид (11.19):

$$U(t) = \varepsilon_0 + (A + Bt)e^{-t/\tau},$$

где  $\tau = 1/\beta = 2L/R$ , а  $A$  и  $B$  – константы.

Для определения констант используем начальные условия

$$U(0) = \varepsilon_0 + A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\varepsilon_0,$$

$$I(0) = 0 = C \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=0} = \left( -\frac{1}{\tau} (A + Bt)e^{-t/\tau} + Be^{-t/\tau} \right) \Big|_{t=0} = B - \frac{A}{\tau}$$

Откуда имеем  $B = A/\tau = -\varepsilon_0/\tau$ .

Окончательный ответ запишется в виде

$$U(t) = \varepsilon_0 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right], \text{ где } \tau = \frac{2L}{R}$$

$$\text{Ответ: } U(t) = \varepsilon_0 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right], \text{ где } \tau = \frac{2L}{R}.$$



**Задача 11.3.11.** Резистор  $r$ , конденсатор  $C$ , катушка индуктивности  $L$  ( $\sqrt{L/C} \gg r$ ) и источник постоянного напряжения  $\varepsilon_0$  соединены в последовательную цепь (рис. 11.11).

Определить зависимость от времени напряжения на конденсаторе после замыкания ключа  $K$ .

Первоначально напряжение на конденсаторе и сила тока в цепи были равны нулю.

### Решение

Используя второе правило Кирхгофа (11.8) и взаимосвязь между током в цепи  $I$  и напряжениями на резисторе, конденсаторе и индуктивности (11.1)–(11.4), можем записать:

$$rI + \frac{1}{C} \int Idt = \varepsilon_0 - L \frac{dI}{dt}.$$

В качестве независимой переменной возьмём напряжение на конденсаторе  $U_C = \frac{1}{C} \int Idt$ , то есть ту величину, которую надо определить по условиям задачи. Так как элементы схемы соединены последовательно, сила тока на всех участках цепи одинакова и равна  $I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}$ . Тогда уравнение цепи можно записать в виде

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + rC \frac{dU_C}{dt} + U_C = \varepsilon_0.$$

Введя обозначения  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $\beta = \frac{r}{2L}$  приведём это уравнение к виду (11.13).

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + 2\beta \frac{dU_C}{dt} + \omega_0^2 (U_C - \varepsilon_0) = 0.$$

Стационарное значение напряжения на конденсаторе  $U_{C\infty}$  найдем, положив равными нулю все производные в этом уравнении, откуда следует

$$U_{C\infty} = \varepsilon_0.$$

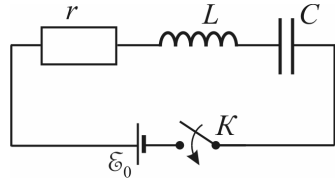


Рис. 11.11. Зарядка конденсатора в последовательной  $rLC$ -цепи (задача 11.3.11)

По условию задачи  $r \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$ , то есть  $\beta \ll \omega_0$ . Поэтому в цепи реализуются затухающие колебания и решение уравнения цепи в этом случае имеет вид (11.17)

$$U_C(t) = U_{C\infty} + e^{-\beta t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t),$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  (см. теоретический материал). Константы  $a$  и  $b$ , входящие в это уравнение, определяются из начальных условий:

$$U_C(0) = U_{C\infty} + a = 0,$$

$$\frac{dU_C}{dt}(0) = -\beta a + \omega b = 0.$$

Отсюда получаем

$$a = -U_{C\infty} = -\xi_0,$$

$$b = \frac{\beta a}{\omega} = \frac{\beta}{\omega} \xi_0.$$

Подставляя эти коэффициенты в решение, находим ответ:

$$U_C(t) = \xi_0 \left( 1 - e^{-\beta t} \left[ \cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right] \right).$$

**Ответ:**  $U_C(t) = \xi_0 \left( 1 - e^{-\beta t} \left[ \cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right] \right).$

*Дополнение.* Определим добротность  $Q$  последовательной  $rLC$ -цепи. Так как  $\beta \ll \omega_0$ , то согласно формуле (11.24)

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \frac{2L}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

**Задача 11.3.12.** Резистор  $r$ , конденсатор  $C$ , заряженный до напряжения  $U_0$  и катушка индуктивности  $L$  соединены в последовательную цепь (рис. 11.12).

Определить зависимость от времени напряжения на конденсаторе после замыкания ключа  $K$ .

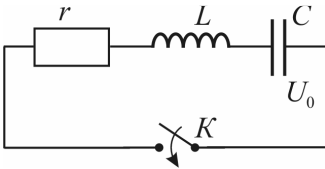
**Решение**

Рис. 11.12. Разрядка конденсатора в последовательной  $rLC$ -цепи (задача 11.3.12)

Аналогично задаче 11.3.11 уравнение цепи можно записать в виде

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + 2\beta \frac{dU_C}{dt} + \omega_0^2 U_C = 0.$$

Запишем начальные условия:

$$U_C(t=0) = U_0,$$

$$\frac{dU_C}{dt}(t=0) = 0.$$

Используя решение уравнения цепи в виде (11.17), получим

$$U_C(t) = U_0 e^{-\beta t} \left( \cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right).$$

**Ответ:**  $U_C(t) = U_0 e^{-\beta t} \left( \cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right).$

**Задача 11.3.13.** В схеме, представленной на рис. 11.13, источник напряжения формирует прямоугольный импульс

$$\varepsilon(t) = 0 \text{ при } t < 0, t > T_n;$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \text{ при } 0 < t < T_n.$$

Длительность импульса  $T_n$  существенно больше времени релаксации.

1) Определить, при каких значениях  $R$ ,  $L$  и  $C$  в схеме будут наблюдаться затухающие колебания.

2) Определить зависимость от времени напряжения  $U_C(t)$  на конденсаторе в режиме затухающих колебаний.

**Решение**

Запишем следующие соотношения:

$I = I_1 + I_2$ . (первое правило Кирхгофа (11.7));

$RI + U_C = \varepsilon_0$  (второе правило Кирхгофа (11.8)),

$$I_2 = C \frac{dU_C}{dt}.$$

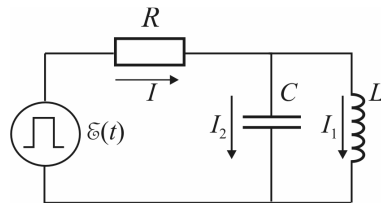


Рис. 11.13. Схема цепи в задаче 11.3.13

Напряжения на ёмкости и индуктивности одинаковы:

$$U_C = U_L = L \frac{dI_1}{dt},$$

поэтому

$$I_1 = \frac{1}{L} \int U_C dt.$$

Тогда из второго правила Кирхгофа получим следующее уравнение

$$\mathcal{E}_0 = U_C + R \left( C \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{L} \int U_C dt \right).$$

Продифференцируем по времени это соотношение и приведём его к стандартному виду (11.13)

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + 2\beta \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U_C = 0,$$

где  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $\beta = \frac{1}{2RC}$ .

1) Затухающие колебания могут быть только при  $\omega_0 > \beta$ , т.е.

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} > \frac{1}{2RC}, \text{ что соответствует условию } R > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

2) Затухающие колебания будут иметь следующий вид:

При  $0 < t < T_n$

Начальные условия ( $t = 0$ ):

$$U_C(0) = 0,$$

$$\frac{dU_C}{dt}(0) = \frac{1}{C} I(0) = \frac{\mathcal{E}_0}{RC},$$

т.к. сразу после включения генератора ток  $I = I_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$ .

Записывая решение уравнения затухающих колебаний в виде (11.17), получим:

$$U_C(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega RC} e^{-\beta t} \sin \omega t, \text{ где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

При  $t \geq T_n$

Определим начальные условия ( $t = T_n$ ).

$$U_C(t = T_n) = 0,$$

так как к моменту времени  $t = T_{и}$  переходной процесс закончился и напряжение на конденсаторе равно нулю.

Сразу после выключения генератора ток, который протекал через индуктивность  $L$ , ещё не изменил своей величины и направления. Этот ток равен  $I_1 = \frac{\xi_0}{R}$ , а ток  $I$ , протекающий через резистор  $R$ , равен нулю. Из первого правила Кирхгофа получим, что  $I = I_1 + I_2 = 0$ , то есть  $I_2 = -I_1$ .

$$\frac{dU_C}{dt}(t = T_{и}) = \frac{1}{C} I_2(t = T_{и}) = -\frac{\xi_0}{RC}.$$

Зависимость от времени напряжения на конденсаторе в этом случае будет согласно (11.17) иметь вид

$$U(t) = -\frac{\xi_0}{\omega RC} e^{-\beta(t-T_{и})} \sin \omega(t-T_{и}).$$

**Ответ:** 1) В системе будут затухающие колебания, если  $R > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

2) при  $0 < t < T_{и}$  :  $U(t) = \frac{\xi_0}{\omega RC} e^{-\beta t} \sin \omega t$  ;

при  $t \geq T_{и}$  :  $U(t) = -\frac{\xi_0}{\omega RC} e^{-\beta(t-T_{и})} \sin \omega(t-T_{и})$  ,

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  .

*Замечание.* Определим добротность  $Q$  этой **параллельной**  $RLC$  цепи. Согласно (11.24) при  $\omega_0 \gg \beta$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Это выражение не совпадает с формулой для добротности последовательного контура  $Q_{\text{посл}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  (см. дополнение к задаче

### 11.3.11).

Если  $Q \gg 1$ , то  $\omega \approx \omega_0$ . В этом случае начальная амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе (при  $t = 0$  и при  $t = T_{и}$ ) будет равна  $U_C|_{\text{max}} \approx \frac{\xi_0}{\omega_0 RC} = \frac{\xi_0}{Q}$ .

**Задача 11.3.14.** Конденсатор, заряженный до разности потенциалов  $U_0$ , разряжается на цепь, состоящую из сопротивления  $R$  и индуктивности  $L$ , соединенных параллельно (рис. 11.14). Найти заряды, прошедшие через них при разряде конденсатора. Омическим сопротивлением катушки индуктивности пренебречь.

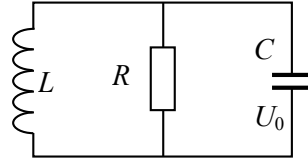


Рис. 11.14. Схема соединения элементов цепи в задаче 11.3.14

### Решение

Все элементы схемы ( $L$ ,  $R$ ,  $C$ ) соединены параллельно. Поэтому правила Кирхгофа (11.7) и (11.8) можно записать в виде

$$RI_R = L \frac{dI_L}{dt},$$

$$U_C = RI_R,$$

$$I_C = I_R + I_L.$$

Структура этих уравнений такова, что для решения поставленной задачи (определить  $Q_L$  и  $Q_R$ ) нет необходимости находить явную зависимость токов  $I_R(t)$  и  $I_L(t)$  от времени.

Действительно, проинтегрировав по времени от 0 до  $\infty$  правую и левую части первого уравнения, получим

$$RQ_R = L[I_L(\infty) - I_L(0)].$$

Учитывая, что  $I_L(\infty) = I_L(0) = 0$ , получим

$$Q_R = 0.$$

Интегрируя в тех же пределах последнее уравнение и учитывая, что  $U_C(0) = U_0$ ,  $U_C(\infty) = 0$ , получим

$$Q_L = Q_C(0) = CU_0.$$

**Ответ:**  $Q_R = 0$ ,  $Q_L = CU_0$ .

**Задача 11.3.15.** На сколько процентов отличается частота свободных колебаний в контуре с добротностью  $Q = 5$  от частоты собственных незатухающих свободных колебаний в таком же контуре, но без потерь энергии?

**Решение**

Используя формулу (11.25) теоретического материала при  $Q = 5$ , получим:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{1 - 0,01} \approx 0,995.$$

**Ответ:** отличие составит 0,5% .

*Замечание.* Даже при такой сравнительно небольшой добротности различием величин  $\omega$  и  $\omega_0$  практически можно пренебречь. Это довольно типичная ситуация. Даже при  $Q = 3$  отличие составляет менее 1,5%. Поэтому при выполнении расчетов полезно сделать оценку добротности контура, что часто может упростить дальнейшие численные расчеты.

**Задача 11.3.16.** Колебательный контур содержит последовательно соединённые емкость  $C = 0,25$  мкФ, индуктивность  $L = 1$  Гн и активное сопротивление  $R = 20$  Ом. Через какое количество колебаний  $N$  амплитуда тока в этом контуре уменьшается в  $e$  раз?

**Решение**

Используем формулы (11.21) – (11.23) теоретического материала, а также значение коэффициента затухания  $\beta$  в последовательной  $RLC$ -цепи (задача 11.3.11):

$$\left. \begin{aligned} N = \frac{1}{\theta} = \frac{\omega}{2\pi\beta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\pi\beta} \\ \beta = \frac{R}{2L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow N = \frac{\sqrt{4L} - 1}{2\pi}.$$

Для выполнения численного расчета оценим сначала величины  $\omega_0$  и  $\beta$ :

$$\omega_0 = 2000 \text{ с}^{-1}, \beta = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Поскольку  $\omega_0 \gg \beta$ , для численного расчета можно использовать приближенную формулу (11.24), из которой  $N = \frac{\omega_0}{2\pi\beta}$ . Подставляя в нее найденные численные значения, находим  $N = 32$ .

**Ответ:**  $N = 32$ .

### Задачи типа 11.3

*Расчет энергетических характеристик процессов (мощность, энергия, количество выделенного тепла и др.)*

**Метод решения.** Для решения задач этого типа требуется сначала найти напряжения и токи, т.е. решить задачу типа 11.1 или 11.2.

Кроме стандартных расчётов, требуется также использовать выражение (11.26) для мощности, которая выделяется на участке цепи.

В некоторых задачах вопрос сформулирован так, что для ответа нет необходимости решать динамическую задачу. Достаточно проинтегрировать простое интегрирование полученного уравнения.

**Задача 11.3.17.** Конденсатор ёмкости  $C$  заряжается от источника постоянного напряжения  $\mathcal{E}_0$  через сопротивление  $R$ . Определить зависимость от времени мощности  $P(t)$ , подводимой к конденсатору.

#### Решение

Мощность  $P(t)$ , подводимая к конденсатору, равна (11.26)

$$P(t) = U(t)I(t).$$

Здесь  $U$  и  $I$  – падение напряжения и ток через конденсатор.

В базовой задаче **11.3.1** получено, что при зарядке конденсатора от постоянной ЭДС, напряжение на нём меняется по закону

$$U(t) = \mathcal{E}_0(1 - e^{-t/RC}),$$

а в *замечании 1* к этой же задаче получено, что при зарядке конденсатора в последовательной  $RC$ -цепи сила тока в ней изменяется по закону

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-t/RC}.$$

Отсюда получаем  $P(t) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} (1 - e^{-t/RC}) e^{-t/RC}$ .

**Ответ:**  $P(t) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} (1 - e^{-t/RC}) e^{-t/RC}$ .

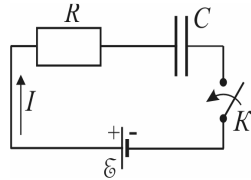


Рис. 11.15. Электрическая схема цепи к задаче **11.3.17**



*Замечание.* Возможно решение этой задачи и другим, энергетическим, способом, что позволяет не находить зависимость силы тока от времени.

При зарядке конденсатора его энергия изменяется со временем по закону  $W(t) = \frac{CU^2(t)}{2} = \frac{C\varepsilon_0^2(1 - e^{-t/RC})^2}{2}$ . А значит, для этого необходимо подводить к нему мощность

$$P(t) = \frac{dW(t)}{dt} = \frac{\varepsilon_0^2}{R} (1 - e^{-t/RC}) e^{-t/RC}.$$

**Задача 11.3.18.** В последовательном  $RLC$  контуре, добротность которого  $Q \gg 1$  и собственная частота колебаний равна  $\omega$ , возбуждены затухающие колебания (см. базовую задачу 11.3.12). Через какое время энергия, запасённая в контуре, уменьшится в  $n$  раз?

### Решение

Энергия, запасённая в последовательном контуре, равна

$$W(t) = \frac{LI^2}{2} + \frac{CU_C^2}{2},$$

где  $I$  – сила тока в цепи, а  $U_C$  – напряжение на конденсаторе. Используя результат базовой задачи 11.3.12 и условие малости затухания ( $Q \gg 1$ ,  $\omega_0 \gg \beta$ ), для напряжения и силы тока можно записать следующие приближенные соотношения:

$$U_C(t) = \varepsilon_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t; \quad I(t) = C \frac{dU_C}{dt} = \omega_0 C \varepsilon_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t.$$

Тогда для энергии, запасённой в контуре, получим

$$W(t) = \frac{C\varepsilon_0^2}{2} e^{-2\beta t} = W_0 e^{-2\beta t}.$$

Если за время  $t$  энергия уменьшится в  $n$  раз, то

$$W(t) = \frac{W_0}{n} = W_0 e^{-2\beta t}.$$

Откуда для времени  $t$  получим

$$\ln n = 2\beta t.$$

Так как затухание мало ( $\omega_0 \gg \beta$ ), то, используя соотношение (11.24) теоретического материала  $\left( Q = \frac{\omega_0}{2\beta} \right)$ , получим  $t = \frac{Q}{\omega_0} \ln n$ .

**Ответ:**  $t = \frac{Q}{\omega_0} \ln n.$

### § 11.4 Задачи для самостоятельного решения

**Задача 11.4.1.** Определить зависимость от времени заряда  $Q(t)$  на обкладках конденсатора  $C$  в схеме, приведенной на рис. 11.16 после замыкания ключа  $K$ .

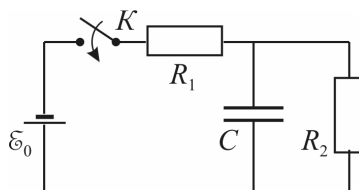


Рис. 11.16. Соединение элементов цепи в задаче 11.4.1

**Ответ:**

$$Q(t) = \varepsilon_0 C \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - \exp(-t / \tau)), \text{ где } \tau = \frac{CR_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

**Задача 11.4.2.** Определить закон изменения силы тока  $I(t)$  через источник постоянного напряжения  $\varepsilon_0$  после замыкания ключа  $K$  в схеме, приведенной на рис. 11.17.

**Ответ:**

$$I(t) = \varepsilon_0 \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right],$$

где  $\tau = \frac{1}{R_2 C}.$

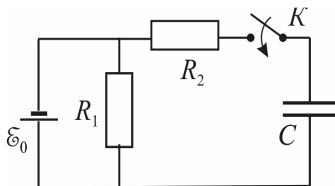


Рис. 11.17. Соединение элементов цепи в задаче 11.4.2

**Задача 11.4.3.** Определить зависимость от времени силы тока  $I_L(t)$  через катушку индуктивности  $L$  в схеме, приведенной на рис. 11.18 после замыкания ключа  $K$ .

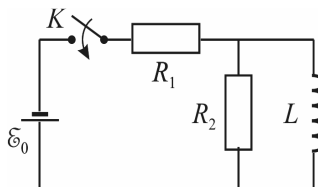


Рис. 11.18. Соединение элементов цепи в задаче 11.4.3

**Ответ:** 
$$I_L(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R_1} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right),$$

где 
$$\tau = L \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

**Задача 11.4.4.** Определить зависимость от времени напряжения на катушке индуктивности  $U_L(t)$  после замыкания ключа  $K$  в схеме, приведенной на рис. 11.19.

**Ответ:** 
$$U_L(t) = \frac{\mathcal{E}_0 R_2}{R_1 + R_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \text{ где } \tau = L \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

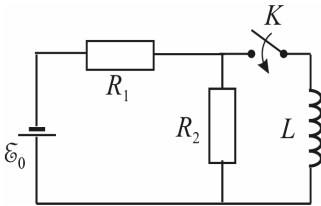


Рис. 11.19. Соединение элементов цепи в задаче 11.4.4

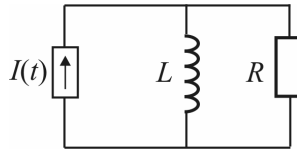


Рис. 11.20. Соединение элементов цепи в задаче 11.4.5

**Задача 11.4.5.** Определить, как изменяется со временем напряжение на катушке индуктивности в схеме, представленной на рис. 11.20 для двух случаев. Генератор тока формирует:

1) Ступенчатый сигнал

$$I(t) = 0 \text{ при } t < 0;$$

$$I(t) = I_0 \text{ при } t > 0.$$

**Ответ:**  $U_L(t) = 0$ , при  $t < 0$ .

$$U_L(t) = I_0 R \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \text{ при } t > 0, \text{ где } \tau = \frac{L}{R}.$$

2) Прямоугольный импульс

$$I(t) = 0 \text{ при } t < 0, t > T;$$

$$I(t) = I_0 \text{ при } 0 < t < T.$$

**Ответ:**  $U_L(t) = 0$ , при  $t < 0$ ,

$$U_L(t) = I_0 R \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ при } 0 < t < T,$$

$$U_L(t) = I_0 R \left[ \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{t-T}{\tau}\right) \right] \text{ при } t > T.$$

**Задача 11.4.6.** Предварительно заряженный до разности потенциалов  $U_0$  конденсатор емкости  $C$ , разряжается через сопротивление  $R$ . Найти зависимость энергии конденсатора от времени.

**Ответ:**  $W_C(t) = \frac{CU_0^2}{2} \exp\left(-\frac{2}{RC}t\right).$

**Задача 11.4.7.** Конденсатор емкости  $C$  заряжается от источника ЭДС величины  $U_0$  и внутренним сопротивлением  $r$ . Определить зависимость от времени количества теплоты, выделившейся в цепи при зарядке конденсатора.

**Ответ:**  $Q(t) = \frac{CU_0^2}{2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{2}{rC}t\right) \right).$

**Задача 11.4.8.** Две катушки, имеющие активные сопротивления  $r_1$  и  $r_2$ , индуктивности  $L_1$  и  $L_2$ , соединены параллельно и подключены к конденсатору, ёмкости  $C$ , заряженному до напряжения  $U_0$  (см. рис. 11.21). Какие заряды протекут через каждую из катушек при разрядке конденсатора?

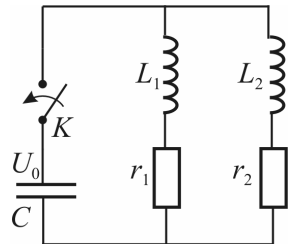


Рис. 11.21. Соединение элементов цепи в задаче 11.4.8

**Ответ:**  $Q_1 = \frac{CU_0 r_2}{r_1 + r_2}, Q_2 = \frac{CU_0 r_1}{r_1 + r_2}.$

**Задача 11.4.9.** В условиях задачи 11.3.8 определить, чему равен полный заряд  $q$ , который протечёт через поперечное сечение проводника, из которого сделана рамка, после завершения релаксационного процесса.

**Ответ:**  $q = \frac{Ba^2}{R}$ .

**Задача 11.4.10.** В схеме, представленной на *рис. 11.22*, определить зависимость от времени напряжения  $U_2(t)$  на конденсаторе  $C_2$ . Генератор напряжения  $\xi(t)$  формирует ступенчатый сигнал:

$$\xi(t) = 0 \text{ при } t < 0;$$

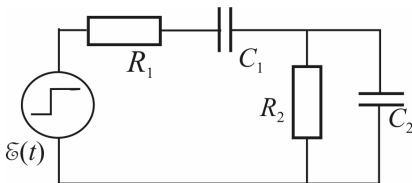
$$\xi(t) = \xi_0 \text{ при } t > 0.$$

Первоначально ( $t < 0$ ) токи и напряжения в цепи были равны нулю. При расчёте положить  $C_1 = C_2 = C$ ;  $R_1 = R_2 = R$ .

**Ответ:**

$$U_2(t) = \frac{2\xi_0}{\sqrt{5}} e^{-\beta t} \operatorname{sh}(\gamma t),$$

где  $\beta = \frac{3}{2RC}$ ,  $\gamma = \frac{\sqrt{5}}{2RC}$ ,  $\operatorname{sh}(\gamma t) = \frac{1}{2}(e^{\gamma t} - e^{-\gamma t})$  – гиперболический синус.



*Рис. 11.22.* Соединение элементов цепи в задаче 11.4.10

**Задача 11.4.11.** Конденсатор  $C$  заряжается от источника с постоянной ЭДС  $\xi_0$  через катушку с индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$ , причем  $R^2 = 4L/C$ . Определить:

- 1) Как изменяется сила тока со временем?
- 2) Через какое время сила тока достигнет максимума?
- 3) Чему равно напряжение на конденсаторе в этот момент?
- 4) Чему равно максимальное значение силы тока?

**Ответ:** 1)  $I = \frac{\xi_0}{L} t e^{-t/\tau}$ ; 2)  $t = \frac{2L}{R}$ ; 3)  $U = \xi_0 \frac{e-2}{e}$ ;

4)  $I_{\max} = \frac{2\xi_0}{eR}$ .

**Задача 11.4.12.** Найти силу тока  $I_L(t)$  в катушке индуктивности  $L$  после замыкания ключа  $K$  в схеме, приведенной на рис. 11.23. Параметры  $L$ ,  $C$ ,  $R$  удовлетворяют условию  $L > 4CR^2$ .

**Ответ:**

$$I_L(t) = \frac{E_0}{R} \left[ 1 - \frac{\beta_2 e^{-\beta_1 t} - \beta_1 e^{-\beta_2 t}}{\beta_2 - \beta_1} \right],$$

где  $\beta_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ ,  $\beta_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ ,

$$\beta = \frac{1}{2RC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

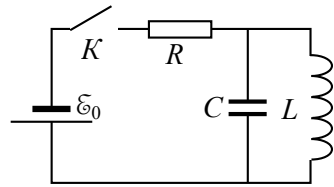


Рис. 11.23. Электрическая схема к задаче 11.4.12

**Задача 11.4.13.** Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки с индуктивностью  $L = 1$  Гн, которые соединены последовательно. Чему равно омическое сопротивление контура  $r$ , если известно, что амплитуда собственных колебаний в нём за время 0,1 секунды уменьшается в  $e = 2,718$  раз?

**Ответ:**  $r = 20$  Ом.

**Задача 11.4.14.** Для схемы, представленной на рис. 11.24, определить заряд  $q$  на конденсаторе  $C$  как функцию времени после замыкания ключа  $K$ . При расчёте считать, что добротность  $Q \gg 1$ .

**Ответ:**

$$q(t) = \frac{2}{3} C \varepsilon_0 (1 - e^{-\beta t}) \left[ \cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right],$$

где  $\beta = \frac{2r}{3L}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ .

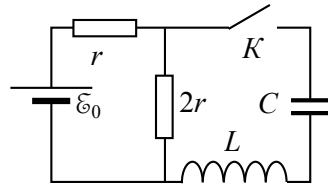


Рис. 11.24. Схема к задаче 11.4.14

**Задача 11.4.15.** Пространство между пластинами плоского конденсатора (см. рис. 11.25) заполнено двумя слоями диэлектрика. Диэлектрические проницаемости слоёв равны  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Удельные проводимости равны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Генератор тока  $I(t)$  формирует ступенчатый сигнал:

$$I(t) = 0 \text{ при } t < 0;$$

$$I(t) = I_0 \text{ при } t > 0.$$

Определить, как изменяется со временем свободный заряд  $q(t)$  на границе раздела этих диэлектриков.

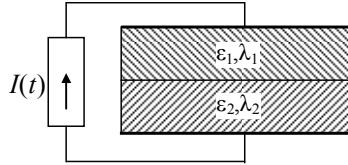


Рис. 11.25. Конденсатор с утечкой в задаче 11.4.15

**Ответ:**

$$q(t) = \varepsilon_0 I_0 \left\{ \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\lambda_2 t}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}\right) \right] - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\lambda_1 t}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}\right) \right] \right\}.$$

*Указание.* Конденсатор с утечкой можно рассматривать как параллельно соединённые конденсатор и резистор (см. задачу 11.3.7). При решении целесообразно использовать соотношение  $R\lambda C = \varepsilon\varepsilon_0$  (глава 6, (6.7)).

### Литература к главе 11

1. *Матвеев А.Н.* Электричество и магнетизм, – М.: Оникс 21 век, 2005, § 48.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. т. III Электричество, – М.: Физматлит, 2006, §§ 122-124, 126, 129-131, 134.
3. *Калашиников С.Г.* Электричество. – М.: Физматлит, 2003, §§ 207-216.
4. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Физматлит, 2003, §§ 78-80, 89.

## Глава 12

## ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

## § 12.1. Теоретический материал

**Вынужденные электрические колебания.** Если электрическая цепь в своем составе имеет одну (или несколько) ЭДС, величина которых изменяется по периодическому закону, то в цепи после окончания переходных процессов установятся вынужденные электрические колебания, характер которых определяется законом изменения включенных в цепь ЭДС. Мы будем рассматривать только такие ЭДС, величина которых изменяется по гармоническому закону, то есть

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (12.1)$$

**Уравнение цепи в случае вынужденных колебаний**

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + 2\beta \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = F_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (12.2)$$

где  $X$  – искомая величина (заряд, напряжение или сила тока), а  $F_0$  – амплитуда, пропорциональная  $\varepsilon_0$  и, в общем случае, зависящая также от частоты и параметров цепи. Решением этого неоднородного уравнения является сумма общего решения однородного уравнения (11.16), которое было рассмотрено в Главе 11,

$$X(t) = A_1 e^{-\beta t} \cos(\omega_c t + \varphi_0), \quad (12.3)$$

где  $\omega_c$  – частота собственных колебаний контура, и частного решения неоднородного уравнения, которое имеет вид

$$X(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)), \quad (12.4)$$

где  $A(\omega)$  – амплитуда вынужденных колебаний,  $\varphi(\omega)$  – сдвиг фаз между колебаниями исследуемой величины и колебаниями сигнала источника.

С течением времени свободные затухающие колебания (12.3) затухнут, и в установившемся режиме, который мы в дальнейшем и будем рассматривать, будут происходить гармонические колебания (12.4).

**Цепи переменного тока** – электрические цепи, в составе которых имеются один (или более) источник ЭДС, величина которой



изменяется по гармоническому закону (далее частоту внешней ЭДС будем обозначать символом  $\omega$ )

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Считается, что все элементы цепи (резисторы, конденсаторы, индуктивности) не изменяют своих параметров со временем. Предполагается, что к рассматриваемому моменту все переходные процессы закончились, после чего  $X_i(t)$ , т.е. все токи, напряжения и заряды, как в самой цепи, так и на отдельных её участках, также будут изменяться по гармоническому закону:

$$X_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi_i),$$

где  $A_i$  – амплитуда,  $\varphi_i$  – сдвиг фаз между колебаниями исследуемой величины и колебаниями сигнала источника. Ввиду того, что режим стационарен, амплитуды и фазы не зависят от времени, но они могут быть разными на разных элементах цепи. Частота колебаний  $\omega$  имеет одно и то же значение для всех участков цепи и совпадает с частотой  $\omega$  источника ЭДС.

Строго говоря, переменные токи могут быть и негармоническими токами. Однако, как это общепринято, под термином «переменный ток» мы будем подразумевать только гармонические (синусоидальные) токи.

**Квазистационарное приближение.** При анализе цепей переменного тока принимается, что можно пренебречь запаздыванием распространения электромагнитной волны вдоль контура. Для этого требуется, чтобы размер контура был много меньше длины электромагнитной волны. Квазистационарное приближение позволяет применять к цепям переменного тока те же уравнения, что и для цепей постоянного тока.

При расчётах и анализе линейных цепей переменного тока обычно используются два метода: метод комплексных амплитуд и метод векторных диаграмм.

**Метод комплексных амплитуд.** Это основной метод расчета любых линейных цепей переменного тока, основанный на формуле Эйлера

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

В этом методе все гармонически изменяющиеся величины вида  $A \cos(\omega t + \varphi)$  (т.е. токи, напряжения и ЭДС) заменяются на соответ-

ствующие комплексные переменные  $Ae^{i\varphi}e^{i\omega t}$ , а комплексная величина  $\hat{A} = Ae^{i\varphi}$  называется комплексной амплитудой (далее комплексные амплитуды будут обозначаться значком "^" над символом). Модуль комплексной амплитуды  $\hat{A}$  равен амплитуде  $A$  соответствующей реальной переменной физической величины, а аргумент  $\varphi$  комплексной экспоненты  $e^{i\varphi}$  определяет фазу.

Так как частота стационарных вынужденных колебаний на всех участках линейной цепи одинакова, то при подстановке решения в виде  $\hat{A}_i e^{i\omega t}$  множитель  $e^{i\omega t}$  во всех уравнениях сокращается и его можно сразу отбросить, и остаются линейные алгебраические уравнения для комплексных амплитуд  $\hat{A}_i$ .

Удобство метода комплексных амплитуд при расчете линейных цепей связано с тем, что линейные операции намного проще проводить с экспонентой, чем с синусом и косинусом. Например,  $n$ -кратное дифференцирование по времени приводит просто к умножению комплексной амплитуды на множитель  $(i\omega)^n$ , благодаря чему линейные дифференциальные уравнения переходят в алгебраические уравнения.

После проведения расчета в комплексной форме нужно вернуться к реальным физическим переменным, взяв действительную часть от полученного комплексного решения  $\hat{A}e^{i\omega t}$ .

Отметим, что и мнимая часть от  $\hat{A}e^{i\omega t}$  даст то же самое решение, но записанное в виде  $A\sin(\omega t + \varphi')$ , где, разумеется, фаза  $\varphi'$  будет уже другой. Выбор формы записи решения определяется удобством согласования с начальными условиями задачи и не является принципиальным (например, см. далее задачу 12.3.7).

При нелинейных операциях (например, возведение в степень и др.) появляются слагаемые с разными частотами, кратными  $\omega$ , и метод комплексных амплитуд теряет свои преимущества. В таких случаях, например при расчете мощности, нужно пользоваться реальными переменными.

**Закон Ома для участка цепи для комплексных переменных**

$$\hat{U} = \hat{Z}\hat{I}, \quad (12.5)$$

где  $\hat{U}$  – комплексное напряжение на участке цепи,  $\hat{Z}$  – комплексное сопротивление участка цепи,  $\hat{I}$  – комплексная амплитуда тока.

**Комплексные сопротивления элементов цепи****Резистор:** активное сопротивление

$$\hat{Z} = R \quad (12.6)$$

– действительная величина, не зависящая от частоты. Ток и напряжение на резисторе совпадают по фазе

$$\hat{U}_R = R\hat{I}_R.$$

**Катушка индуктивности:** индуктивное сопротивление

$$\hat{Z}(\omega) = i\omega L, \quad (12.7)$$

где  $L$  – величина индуктивности катушки. Напряжение на индуктивности опережает по фазе ток ( $\varphi = +\pi/2$ ):

$$\hat{U}_L = i\omega L\hat{I}_L = \omega L\hat{I}_L e^{+i\pi/2}.$$

**Конденсатор:** емкостное сопротивление

$$\hat{Z}(\omega) = \frac{1}{i\omega C}. \quad (12.8)$$

Напряжение на конденсаторе отстаёт по фазе от тока ( $\varphi = -\pi/2$ ):

$$\hat{U}_C = \frac{\hat{I}}{i\omega C} = \frac{\hat{I}}{\omega C} e^{-i\pi/2}.$$

**Правила Кирхгофа** в комплексном представлении имеют вид, полностью аналогичный правилам Кирхгофа для постоянного тока (глава 6):

1) В любой точке разветвления токов, вследствие закона сохранения заряда, выполняется

$$\sum_k \hat{I}_k = 0, \quad (12.9)$$

2) для любого замкнутого контура, выбранного в цепи,

$$\sum_k \hat{Z}_k \hat{I}_k = \sum_m \hat{\mathcal{E}}_m, \quad (12.10)$$

где  $\hat{I}_k$  – комплексная амплитуда тока,  $\hat{Z}_k$  – комплексное сопротивление  $k$ -ого участка цепи (импеданс),  $\hat{\mathcal{E}}_m = \mathcal{E}_{m0} e^{i\varphi_m}$  – комплексная амплитуда  $m$ -ой ЭДС, входящей в выбранный контур,  $\varphi_m$  – ее фаза.

Соотношение (12.10) является следствием подразумеваемого везде в данном разделе квазистационарного приближения, которое

позволяет применять к цепям переменного тока условие потенциальности электрического поля (см. § 11.1 главы 11).

Если в цепи имеется только один источник ЭДС, то его начальную фазу в формуле (12.10), то его начальную фазу можно взять равной нулю и тогда  $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0$  (действительная величина). При наличии нескольких *несинфазных* ЭДС фазу одной из них также удобно положить нулевой, а фазы остальных задать относительно нее (на пример, см. задачу **12.3.19**).

Ввиду формальной аналогии закона Ома и правил Кирхгофа для цепей переменного и постоянного тока сохраняют силу все рассмотренные в главе 6 правила учета знаков при составлении уравнений Кирхгофа, а также метод контурных токов.

Для правильного учета знаков слагаемых в уравнениях (12.9), (12.10) сначала надо выбрать (произвольным образом) направления токов во всех участках цепи, принятые за положительные. При суммировании токов в узлах в уравнениях (12.9) знаки ставятся в соответствии с этими направлениями.

При составлении уравнений (12.10) при обходе контуров напряжение на участке цепи считается положительным при его проходе по выбранному направлению тока, знак минус будет – при противоположном проходе. При наличии в цепи нескольких переменных ЭДС нужно учесть их относительные фазы, заданные в условии задачи (пример с двумя сдвинутыми по фазе ЭДС разобран ниже в задаче **12.3.19**).

В отличие от цепей постоянного тока, где отрицательный знак в полученном решении для тока означал, что его истинное направление противоположно ранее выбранному, в цепях переменного тока отрицательный знак означает сдвиг по фазе на  $180^\circ$  ( $-\hat{A} = \hat{A}e^{i\pi}$ ).

При последовательном соединении элементов цепи (ток на всех участках одинаков) общее сопротивление цепи, как это можно видеть из (12.10), равно сумме комплексных сопротивлений отдельных элементов.

При параллельном соединении элементов цепи, когда одинаково напряжение на всех элементах, удобнее использовать не комплексное сопротивление, а комплексную проводимость  $\hat{Y} = 1/\hat{Z}$ . В этом случае (параллельное соединение) проводимость всей цепи равна сумме проводимостей отдельных элементов.

Если к цепи подключен один источник ЭДС, то ток  $\hat{I}$  через источник и величина его ЭДС  $\hat{\mathcal{E}}$  связаны соотношением:

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{Z}\hat{I},$$

где величина  $\hat{Z}$  называется импедансом цепи

$$\hat{Z} = \text{Re}(\hat{Z}) + i \text{Im}(\hat{Z}) = Z_0 e^{i\varphi}, \quad Z_0 = \sqrt{(\text{Re } \hat{Z})^2 + (\text{Im } \hat{Z})^2},$$

а ее модуль  $Z_0$  – полным сопротивлением цепи. Здесь  $\text{Re}(\hat{Z})$  и  $\text{Im}(\hat{Z})$  – это действительная и мнимая части  $\hat{Z}$ .

Сдвиг фаз  $\varphi$  напряжения относительно тока определяется соотношением

$$\text{tg } \varphi = \frac{\text{Im } \hat{Z}}{\text{Re } \hat{Z}}.$$

**Метод векторных диаграмм.** В данном методе токи, напряжения и ЭДС, действующие в цепи, представляются в виде векторов. Модуль вектора равен амплитуде. Угол между векторами численно равен сдвигу фаз  $\varphi$  между ними. Обычно один из векторов выбирается в качестве исходного направления, от которого отсчитываются все сдвиги фаз, т.е. направления остальных векторов.

Метод векторных диаграмм можно рассматривать как графическую интерпретацию метода комплексных амплитуд, поскольку комплексное число – это вектор на комплексной плоскости, и алгебраические операции (сложение, вычитание) с комплексными числами эквивалентны графическим операциям с векторами.

Напомним, что векторы обозначаются прямым жирным шрифтом, абсолютные значения – *курсивом*.

В последовательной цепи удобно в качестве исходного направления выбрать вектор тока, в параллельной цепи – вектор напряжения.

Вектор напряжения *на резисторе*  $U_R = RI$  параллелен вектору тока  $\mathbf{I}$  (сдвиг фаз  $\varphi = 0$ ).

Модули векторов, отображающих напряжения *на индуктивности и ёмкости*, соответственно равны  $U_L = \omega LI$  и  $U_C = \frac{I}{\omega C}$ . Вектор

$U_L$  повернут относительно вектора  $\mathbf{I}$  на угол  $+90^\circ$  (против часовой стрелки), а вектор  $U_C$  – на угол  $(-90^\circ)$ , т.е. по часовой стрелке.

**Правила Кирхгофа в векторном представлении** удобно за-

писать так:

$$\sum_k \mathbf{I}_{k \text{ вход}} = \sum_m \mathbf{I}_{m \text{ вых}} ; \quad \sum_k \mathbf{U}_k = \sum_m \mathbf{\mathcal{E}}_n , \quad (12.11)$$

где  $\mathbf{I}_{k \text{ вход}}$  и  $\mathbf{I}_{m \text{ вых}}$  – векторы токов, входящих и выходящих из каждого узла, векторы  $\mathbf{U}_k$  – напряжение на  $k$ -ом участке выбранного замкнутого контура,  $\mathbf{\mathcal{E}}_n$  – вектор  $n$ -ой ЭДС.

В отличие от общего метода комплексных амплитуд, метод векторных диаграмм целесообразно применять только для простых цепей с малым числом элементов, поскольку при большом числе векторов диаграммы становятся слишком сложными и теряют свою наглядность.

**Мощность в цепи переменного тока.** Мгновенная мощность

$$P(t) = U(t) I(t).$$

Усредненная по периоду мощность, рассеиваемая в участке электрической цепи

$$P = U_3 I_3 \cos \varphi, \quad (12.12)$$

где  $\varphi$  – сдвиг фаз между током и напряжением в данном участке,  $U_3$  и  $I_3$  – эффективные значения напряжения и тока, являющиеся среднеквадратичными значениями соответствующих параметров за период  $T$ :

$$I_3 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} I^2(t) dt}, \quad U_3 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} U^2(t) dt}.$$

Если переменный ток является синусоидальным, то

$$I_3 = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_3 = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad (12.13)$$

где  $I_0$  и  $U_0$  – амплитудные значения тока и напряжения.

На индуктивных и емкостных элементах  $P_{L,C} = 0$  поскольку  $\cos \varphi = 0$ . Мощность выделяется только на активном сопротивлении

$$P = U_3 I_3 = I_3^2 R. \quad (12.14)$$

Мощность источника синусоидальной ЭДС с амплитудой  $\mathcal{E}_0$  и эффективной величиной ЭДС  $\mathcal{E}_3$  определяется соотношением

$$P_{\text{эдс}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 I_0 \cos \varphi = \varepsilon_3 I_3 \cos \varphi, \quad (12.15)$$

где  $\varphi$  – сдвиг фаз между ЭДС источника и током через него. Поскольку на реактивных элементах средняя мощность равна нулю, в любой цепи суммарная мощность источников ЭДС равна суммарной мощности, выделяющейся на активных сопротивлениях, входящих в цепь

$$\sum_m P_{\text{эдс } m} = \sum_k I_{\text{эк}}^2 R_k.$$

*Замечание.* В приведенные выше формулы для нахождения средней мощности входят только *действительные* переменные. Если цепь рассчитывалась методом комплексных амплитуд, то для получения мощности надо предварительно перейти от комплексных переменных к действительным.

Впрочем, мощность на участке цепи можно легко найти и через комплексные амплитуды тока и напряжения на этом участке

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\hat{U} \hat{I}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\hat{U}^* \hat{I}), \quad (12.16)$$

где  $\operatorname{Re}$  – реальная часть, (\*) означает комплексное сопряжение. Эта формула справедлива и для мощности источника ЭДС, если  $\hat{U}$  заменить на  $\hat{\varepsilon}$ .

## § 12.2. Основные типы задач (классификация)

- 12.1. Задачи с неразветвлёнными цепями.
- 12.2. Задачи с разветвлёнными цепями. Расчет фазовращателей и мостовых схем.
- 12.3. Задачи на определение мощности в цепях переменного тока.

## § 12.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 12.1

*Задачи с неразветвлёнными цепями*

**Метод решения:** 1) При расчёте тока и напряжений, дейст-

вующих в последовательной цепи, вначале рекомендуется определить комплексную амплитуду тока  $\hat{I}$ . Этот ток (см. (12.10)) равен

$$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{\sum_k \hat{Z}_k}.$$

где

$$\hat{\mathcal{E}} = \sum_m \hat{\mathcal{E}}_m$$

– суммарная ЭДС всех последовательно соединенных источников с учетом их относительных сдвигов фаз. Затем определяется амплитудное значение тока и сдвиг его фазы относительно ЭДС. Напряжение на резисторах, индуктивностях и конденсаторах рассчитывается по формулам (12.6) - (12.10).

2). При расчёте модуля полного сопротивления цепи часто бывает удобно использовать следующее выражение для модуля комплексного сопротивления:

$$Z_0 = \operatorname{Re}(\hat{Z}) \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}. \quad (12.17)$$

Этот результат легко получить, используя комплексную форму представления

$$\hat{Z} = \operatorname{Re}(\hat{Z}) + i \operatorname{Im}(\hat{Z}) = \operatorname{Re}(\hat{Z}) \left( 1 + i \frac{\operatorname{Im}(\hat{Z})}{\operatorname{Re}(\hat{Z})} \right).$$

Сдвиг фаз

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im}(Z)}{\operatorname{Re}(Z)}. \quad \text{Т.е. } \hat{Z} = \operatorname{Re}(\hat{Z}) (1 + i \operatorname{tg} \varphi).$$

Модуль этой величины равен вышеприведенному значению  $Z_0$ .

3) Вначале рекомендуется ознакомиться с решениями **базовых задач 12.3.1-12.3.3**, т.к. при решении ряда последующих используются результаты, полученные в этих задачах.

**Задача 12.3.1 (базовая задача).** Конденсатор емкостью 20 мкФ и резистор, сопротивление которого равно 159 Ом, соединены последовательно с генератором переменного напряжения (частота  $\nu = 50$  Гц, эффективное напряжение  $U_0 = 120$  В).

Определить зависимость от времени силы тока в цепи  $I(t)$  и напря-



жений на конденсаторе  $U_C(t)$  и резисторе  $U_R(t)$ .

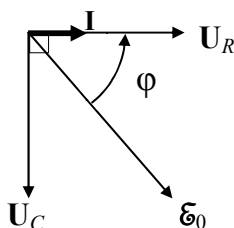
### Решение

Положим, что ЭДС зависит от времени как  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(2\pi\nu t)$ , где  $\mathcal{E}_0 = \sqrt{2} U_s \approx 170$  В – амплитуда источника ЭДС.

При решении этой задачи можно воспользоваться как методом векторных диаграмм, так и методом комплексных амплитуд.

#### 1) Решение методом векторных диаграмм (рис. 12.1)

Выберем в качестве исходного направления направление вектора тока  $\mathbf{I}$ , поскольку ток одинаков во всей цепи.



Вектор  $\mathbf{U}_R$  параллелен вектору тока  $\mathbf{I}$  и имеет длину  $U_R = IR$ .

Вектор напряжения на конденсаторе  $\mathbf{U}_C$  перпендикулярен к  $\mathbf{I}$  (сдвинут по фазе на угол  $-\frac{\pi}{2}$ ), его длина  $U_C = \frac{I}{\omega C}$ .

Все элементы цепи соединены последовательно, поэтому  $\mathcal{E}_0 = \mathbf{U}_R + \mathbf{U}_C$  (векторная сумма).

Рис. 12.1. Векторная диаграмма для последовательной  $RC$ -цепи (задача 12.3.1)

Поскольку исходной для нас является зависимость ЭДС от времени, то фазы остальных напряжений будем отсчитывать относительно вектора  $\mathcal{E}_0$ . Тогда фаза  $\varphi$  напряжения  $\mathbf{U}_R$  и тока  $\mathbf{I}$  положительна и определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_C}{U_R} = \frac{1}{\omega RC}, \text{ а фаза напряжения } U_C \text{ будет равна } \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая, что  $U_R = \mathcal{E}_0 \cos \varphi$ ,  $U_C = \mathcal{E}_0 \sin \varphi$  и используя известные из тригонометрии соотношения

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}},$$

можем записать:

$$U_R(t) = \mathcal{E}_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \cos(2\pi\nu t + \varphi), \quad I(t) = \frac{U_R(t)}{R}.$$

$$U_C(t) = \mathcal{E}_0 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \cos(2\pi\nu t + \varphi - \frac{\pi}{2}).$$

При данных в условии задачи значениях  $R$ ,  $C$  и  $\nu$  имеем  $\operatorname{tg} \varphi \approx 1$ , т.е.  $\varphi = \pi/4$  или  $45^\circ$ . Подставляя эти значения и заданные величины  $\xi_0$  и  $\nu$  в предыдущие соотношения, получаем

$$U_R(t) = 120 \cos(100\pi t + \pi/4) \text{ (В)}, \quad U_C(t) = 120 \cos(100\pi t - \pi/4) \text{ (В)}, \\ I(t) = U_R(t)/R \approx 0.75 \cos(100\pi t + \pi/4) \text{ (А)}.$$

## 2) Решение методом комплексных амплитуд

Как и в методе векторных диаграмм, для комплексных амплитуд  $\hat{\xi}_0$ ,  $\hat{U}_C$ ,  $\hat{U}_R$  можно записать следующее соотношение:

$$\hat{\xi}_0 = \hat{U}_C + \hat{U}_R, \text{ где } \hat{U}_R = \hat{I} R, \hat{U}_C = \frac{\hat{I}}{i\omega C} = \frac{\hat{I}}{\omega C} e^{-i\pi/2}.$$

Отсюда получим:  $\hat{\xi}_0 = \hat{I} \left( R + \frac{1}{i\omega C} \right) = \hat{Z} \hat{I}$ , где  $\hat{Z} = Z_0 e^{i\varphi}$  – комплексное сопротивление (импеданс) цепи. Здесь

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} = R \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega RC} < 0.$$

В отличие от предыдущего рассмотрения, в этих формулах  $\varphi$  представляет собой сдвиг фазы ЭДС *относительно фазы тока*, и поэтому  $\varphi < 0$ . Окончательный результат в комплексной записи будет иметь следующий вид:

$$\hat{I} = \frac{\xi_0}{Z_0} e^{-i\varphi} = \frac{\xi_0}{Z_0} e^{+i|\varphi|}, \quad \hat{U}_R = \hat{I} R, \quad \hat{U}_C = \frac{\xi_0}{\omega C Z_0} e^{i(-\varphi - \pi/2)} = \frac{\xi_0}{\omega C Z_0} e^{i(|\varphi| - \pi/2)}.$$

Взяв реальную часть от полученных комплексных переменных, получим тот же результат, что и при использовании метода векторных диаграмм.

**Ответ:**  $U_R(t) = 120 \cos(100\pi t + \pi/4) \text{ (В)},$   
 $U_C(t) = 120 \cos(100\pi t - \pi/4) \text{ (В)},$   
 $I(t) = U_R(t)/R \approx 0.75 \cos(100\pi t + \pi/4) \text{ (А)}.$

**Задача 12.3.2 (базовая задача).** Резистор  $R$ , конденсатор  $C$  и индуктивность  $L$  соединены в последовательную цепь (рис. 12.2а) и подключены к генератору переменного напряжения

$$\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t).$$

- 1) Определить амплитудные значения тока в цепи  $I_0$  и напряжений на конденсаторе и индуктивности ( $U_C$  и  $U_L$ ) и сдвиг фазы тока  $\varphi_I$  относительно фазы ЭДС.
- 2) При каких частотах  $\omega$  эти амплитуды будут иметь максимальные значения? Чему равны эти максимальные значения? При расчётах положить, что добротность  $Q \gg 1$ .
- 3) Исследовать случаи  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ .

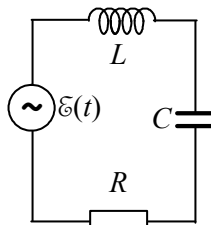


Рис. 12.2а. Последовательная RLC-цепь (задача 12.3.2)

### Решение

а) Решение методом комплексных амплитуд

#### 1. Ток в цепи

Комплексное сопротивление цепи имеет вид

$$\hat{Z} = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = Z_0 e^{i\varphi}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Здесь  $\varphi$  – сдвиг фаз между напряжением генератора и током в цепи,

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

– модуль полного сопротивления цепи (импеданса). Комплексная амплитуда  $\hat{I}$  тока в цепи равна

$$\hat{I} = \frac{\xi_0}{\hat{Z}} = \frac{\xi_0}{Z_0} e^{-i\varphi} = \frac{\xi_0}{Z_0} e^{i\varphi_I},$$

где сдвиг фаз  $\varphi_I$  тока относительно напряжения генератора определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \operatorname{tg}(-\varphi) = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}.$$

Отсюда сразу получаем, что амплитуда тока в цепи равна

$$I_0 = \frac{\xi_0}{Z_0} = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Максимальное значение амплитуды тока, а значит, и напряжения на сопротивлении  $R$ , достигается на резонансной частоте

$$\omega_{pI} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ и равно } I_{p0} = \frac{\xi_0}{R}.$$

При  $\omega \rightarrow 0$  амплитуда тока также стремится к нулю, а сдвиг фаз  $\varphi_I \rightarrow +\pi/2$  (ток опережает напряжение). Если  $\omega \rightarrow \infty$ , то ток  $I \rightarrow 0$ , а сдвиг фаз  $\varphi_I \rightarrow -\pi/2$  (ток отстает от напряжения).

## 2. Напряжение на конденсаторе

Комплексная амплитуда  $\hat{U}_C$  напряжения на конденсаторе равна:

$$\hat{U}_C = \frac{\hat{I}}{i\omega C} = \frac{1}{i\omega C} \frac{\xi_0}{\hat{Z}} = \frac{\xi_0}{\omega CZ_0} e^{i(-\phi-\pi/2)} = \frac{\xi_0}{\omega CZ_0} e^{i(\phi_I-\pi/2)}.$$

Фаза напряжения на конденсаторе  $\varphi_C = \varphi_I - \pi/2$  отстает от фазы тока на  $90^\circ$ .

Для удобства дальнейшего анализа преобразуем величину  $(i\omega C \hat{Z})$ , подставив в нее  $\hat{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ :

$$i\omega C \hat{Z} = (1 - \omega^2 LC) + i\omega rC = \frac{1}{\omega_0^2} [(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\beta\omega].$$

Здесь  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $\beta = R/2L$ . Теперь зависимость амплитуды напряжения на конденсаторе от частоты  $\omega$  может быть представлена в следующем виде

$$U_C = \frac{\omega_0^2 \xi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

Максимальное значение  $U_C$  достигается при резонансной частоте  $\omega_{pC}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$ , где  $Q$  – добротность контура.

При  $\omega = \omega_{pC}$  резонансная амплитуда напряжения на конденсаторе

равна

$$U_{pC} = \frac{\omega_0^2 \varepsilon_0}{\sqrt{4\beta^2 (\omega_0^2 - \beta^2)}}.$$

Если  $Q \gg 1$ , то  $U_{pC} \approx Q\varepsilon_0$ .

В области низких частот напряжение на конденсаторе равно напряжению генератора  $U_C = \varepsilon_0$ , и совпадает с ним по фазе ( $\varphi_C = 0$ ). В области высоких частот ( $\omega \rightarrow \infty$ )  $U_C \rightarrow 0$ , а сдвиг фаз  $\varphi_C \rightarrow (-\pi)$ .

### 3. Напряжение на катушке индуктивности

Комплексная амплитуда  $\hat{U}_L$  напряжения на индуктивности равна

$$\hat{U}_L = i\omega L \hat{I} = \varepsilon_0 \frac{\omega L}{Z_0} e^{i(\varphi_I + \frac{\pi}{2})}.$$

Фаза напряжения на катушке  $\varphi_L = \varphi_I + \pi/2$  опережает фазу тока на  $90^\circ$ .

Проводя расчёты, подобные расчётам в пункте 2 настоящей задачи, и опуская промежуточные выкладки, получим:

$$U_L = \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

Максимальное значение  $U_L$  достигается при резонансной частоте

$$\omega_{pL} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

и равно

$$U_{pL} = U_L(\omega_{pL}) = \frac{\varepsilon_0 \omega_0}{2\beta \left(1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}\right)} = \frac{Q\varepsilon_0}{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Если  $Q \gg 1$ , то  $U_{pL} \approx Q\varepsilon_0$ .

В области высоких частот ( $\omega \gg \omega_0$ ) индуктивное сопротивление велико по сравнению с сопротивлением конденсатора и активным сопротивлением, поэтому напряжение на индуктивности фактически равно напряжению генератора, т.е.  $U_L = \varepsilon_0$ , и совпадает с ним по фа-

зе. В области низких частот напряжение на катушке индуктивности близко к нулю.

При малом затухании все три резонансные частоты  $\varphi_{pL}$ ,  $\varphi_{pC}$  и  $\varphi_{pL}$  практически совпадают. Поскольку амплитуды напряжений на всех элементах при этом максимальны, это называется **резонансом напряжений** [1, §50]

*б) Решение методом векторных диаграмм*

Векторная диаграмма для последовательной  $RLC$  цепи представлена на *рис. 12.2б* (см. также задачу **12.3.6**). Здесь:  $U_R = rI_0$ ,  $U_L = \omega LI_0$ ,  $U_C = I_0/(\omega C)$ , где  $I_0$  – амплитуда тока в цепи.

Векторы  $\mathfrak{E}_0$ ,  $U_R$ ,  $(U_L + U_C)$  составляют прямоугольный треугольник. Поэтому можно записать:

$$\mathfrak{E}_0^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = (U_L - U_C)/U_R.$$

Учитывая взаимосвязь между амплитудой тока в цепи и амплитудами напряжений на резисторе, конденсаторе и индуктивности (12.6)-(12.8), получим:

$$I_0 = \frac{\mathfrak{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad U_L = \omega LI_0,$$

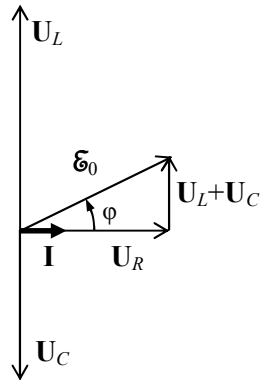
$$U_C = \frac{I_0}{\omega C}.$$

Сдвиг фазы напряжения генератора  $\mathfrak{E}(t)$  относительно тока в цепи равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

В примере, показанном на *рис.12.2*  $\varphi > 0$ , а сдвиг фазы тока относительно напряжения генератора  $\varphi_I = -\varphi$  отрицателен, т.е. ток  $I(t)$  запаздывает по фазе относительно напряжения генератора  $\mathfrak{E}(t)$ .

Дальнейший расчёт, в соответствии с вопросами 2 и 3 условия за-



*Рис. 12.2б.* Векторная диаграмма для последовательной  $RLC$ -цепи

дачи, можно провести так же, как это сделано выше.

$$\text{Ответ: } 1) I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, U_C = \frac{\omega_0^2 \mathcal{E}_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}},$$

$$U_L = \frac{\omega^2 \mathcal{E}_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \operatorname{tg} \varphi_I = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R};$$

$$2) I_{p0} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}; U_{pC} \approx U_{pL} \approx Q\mathcal{E}_0, \omega_{рез} \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

$$3) \text{ При } \omega \rightarrow 0: I \rightarrow 0, \varphi_I \rightarrow +\pi/2; U_C \approx \mathcal{E}_0, U_R \approx U_L \approx 0.$$

$$\omega \rightarrow \omega_{рез}: I_{p0} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}, \varphi_I \rightarrow 0, U_R \approx \mathcal{E}_0, U_{pC} \approx U_{pL} \approx Q\mathcal{E}_0;$$

$$\omega \rightarrow \infty: I \rightarrow 0, \varphi_I \rightarrow -\pi/2; U_L \approx \mathcal{E}_0, U_R \approx U_C \approx 0.$$

**Задача 12.3.3 (базовая задача).** Конденсатор и резистор соединены последовательно и включены в цепь переменного тока с напряжением  $\mathcal{E}_s = 50$  В и частотой  $\nu = 50$  Гц. Какую емкость должен иметь конденсатор для того, чтобы через резистор протекал ток  $I = 0,1$  А и напряжение на резисторе было равно  $U_R = 30$  В? Напряжения и токи понимаются как эффективные.

### Решение

При решении этой задачи можно использовать два способа. Первый способ основан на непосредственном использовании результатов задачи 12.3.1. Полученные там соотношения для амплитуд тока и напряжения можно поделить на  $\sqrt{2}$  и сразу записать их для эффективных значений:

$$U_R = \mathcal{E}_s \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega RC}, \text{ где } R = \frac{U_R}{I}, \omega = 2\pi\nu.$$

$$\text{Отсюда следует } C = \frac{I}{\omega U_R \operatorname{tg} \varphi}, \text{ где } \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}_0}{U_R}\right)^2 - 1}.$$

Окончательно получаем

$$C = \frac{1}{2\pi\nu} \frac{I}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - U_R^2}}.$$

Подстановка численных значений дает  $C = 7,96$  мкФ.

Во втором способе решения используется тот факт, что на векторной диаграмме векторы амплитуд  $\mathcal{E}_0$ ,  $U_{0R}$  и  $U_{0C}$  образуют прямоугольный треугольник ( $\mathcal{E}_0$  – гипотенуза,  $U_{0R}$  и  $U_{0C}$  – катеты, см. задачу 12.3.1). Тогда

$$U_{0C} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 - U_{0R}^2},$$

или для эффективных значений

$$U_C = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 - U_R^2}.$$

Напряжение на конденсаторе  $U_C$  и ток в цепи  $I$  связаны соотношением  $U_C = \frac{I}{\omega C}$ , откуда следует:  $U_C = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 - U_R^2} = \frac{I}{\omega C}$ .

Отсюда получаем тот же ответ

$$C = \frac{1}{\omega} \frac{I}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - U_R^2}}.$$

**Ответ:**  $C = \frac{1}{2\pi\nu} \frac{I}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - U_R^2}} = 7,96$  мкФ.

**Задача 12.3.4.** В цепь переменного тока включены последовательно генератор с эффективным напряжением  $\mathcal{E}_0 = 220$  В, конденсатор емкости  $C$ , катушка индуктивности  $L$  и резистор  $R$ . Найти напряжение  $U_R$  на резисторе, если известно, что напряжение на конденсаторе  $U_C = 2U_R$  и напряжение на катушке индуктивности  $U_L = 3U_R$  (напряжения рассматриваются как эффективные).

### Решение

В последовательной цепи напряжение на индуктивности  $U_L$  опережает по фазе ток в цепи (и напряжение на резисторе  $U_R$ ) на угол  $+90^\circ$  (рис. 12.2б). Напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока (сдвиг фаз равен  $-90^\circ$ ). Таким образом,  $U_L$  и  $U_C$  находятся в противофазе. Соотношения между эффективными величинами на-



пряжений те же, что и для амплитудных величин, поэтому напряжение на участке  $LC$

$$(U_L + U_C) = 3U_R - 2U_R = U_R$$

и опережает ток по фазе на  $90^\circ$ . Отсюда получаем:

$$\varepsilon_s^2 = (U_L + U_C)^2 + U_R^2 = 2U_R^2, U_R = \frac{\varepsilon_s}{\sqrt{2}}.$$

**Ответ:**  $U_R = \frac{\varepsilon_s}{\sqrt{2}}.$

**Задача 12.3.5.** В последовательном  $RLC$  контуре (см. задачу 12.3.2) генератор напряжения формирует сигнал следующего вида:

$$\varepsilon(t) = 0 \quad \text{при } t < 0,$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t \quad \text{при } t > 0.$$

Здесь  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , где  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $\beta = \frac{R}{2L}$ .

Определить, как изменяется со временем напряжение  $U(t)$  на конденсаторе  $C$ . Вначале ( $t < 0$ ), ток в цепи и напряжение на конденсаторе были равны нулю.

При расчёте положить, что добротность  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \gg 1$ .

### Решение

Дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания в данной цепи, имеет вид

$$LC \frac{d^2 U}{dt^2} + RC \frac{dU}{dt} + U = \varepsilon(t),$$

или, для  $t > 0$ ,

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + 2\beta \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = \omega_0^2 \varepsilon_0 \sin \omega t,$$

где  $U$  – напряжение на конденсаторе,  $\beta = \frac{R}{2L}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (см.: глава

11, задача 11.3.10). Решение этого уравнения можно представить в виде

$$U(\omega, t) = U_1(t) + U_2(\omega, t),$$

где  $U_1(t)$  – решение однородного уравнения (т.е. с нулевой правой частью), а  $U_2(\omega, t)$  – частное решение неоднородного уравнения.

Решение однородного уравнения дает затухающие собственные колебания (см. задачу **11.3.10**):

$$U_1(t) = e^{-\beta t} (a \sin \omega_c t + b \cos \omega_c t),$$

где  $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота собственных колебаний.

Частное решение данного неоднородного уравнения – это установившиеся вынужденные колебания, комплексная амплитуда которых на конденсаторе  $\hat{U}_C$  равна (см. задачу **12.3.2**)

$$\hat{U}_C = \frac{\xi_0}{i\omega C\hat{Z}}, \text{ где } \hat{Z} = r + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Поскольку добротность контура велика,  $\omega_c \approx \omega_0$ . Учитывая, что по условию  $\omega = \omega_c \approx \omega_0$ , получаем  $\hat{Z} = r$ , откуда следует

$$\hat{U}_C = \frac{\xi_0}{i\omega CR} = \frac{\xi_0}{\omega CR} e^{-i\pi/2}.$$

Ввиду того, что по условию  $\xi(t) = \xi_0 \sin \omega t = \text{Im}(\xi_0 e^{i\omega t})$ , то для согласования начальных фаз решение также удобно взять в виде мнимой части от комплексного напряжения на конденсаторе:

$$U_2(\omega, t) = \text{Im}(\hat{U}_C e^{i\omega t}) = \frac{\xi_0}{\omega CR} \sin(\omega t - \pi/2) = -\frac{\xi_0}{\omega CR} \cos \omega t.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$U(\omega, t) = e^{-\beta t} (a \sin \omega t + b \cos \omega t) - \frac{\xi_0}{\omega CR} \cos \omega t.$$

Константы  $a$  и  $b$  найдем из начальных условий, учитывая, что при  $t = 0$  напряжение и сила тока в цепи были равны нулю

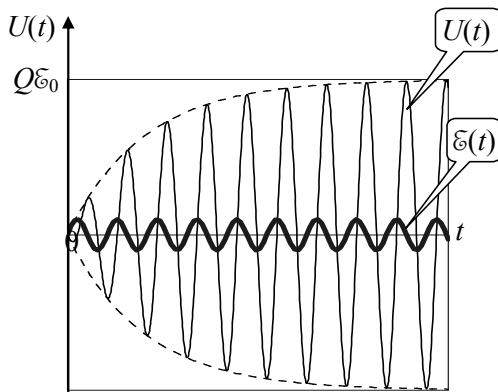
$$\begin{cases} U(0) = 0: & b - \frac{\xi_0}{\omega CR} = 0, \\ U'(0) = 0: & a = 0. \end{cases}$$

Подставляя  $a$  и  $b$ , получаем:

$$U(t) = -\frac{\xi_0}{\omega CR} (1 - e^{-\beta t}) \cos \omega t = -Q\xi_0 (1 - e^{-\beta t}) \cos \omega t.$$

Приближение  $U(t)$  к стационарному резонансному значению, равному  $Q\xi_0$ , определяется временем релаксации контура  $\tau = 1/\beta$ . График зависимости  $U(t)$  показан на *рис. 12.3*.

*Рис.12.3.* Установление резонансного напряжения на конденсаторе  $U(t)$  в последовательном колебательном контуре (задача 12.3.5)



**Ответ:**  $U(t) = -Q\xi_0(1 - e^{-\beta t}) \cos \omega t$ .

## Задачи типа 12.2

### Задачи с разветвлёнными цепями

**Метод решения:** При решении задач этого раздела в качестве независимых переменных рекомендуется выбрать токи, действующие на разных участках разветвлённой цепи. Обязательно надо выбрать и указать на схеме направления токов, выбранные за положительные. Затем, используя правила Кирхгофа (12.4, 12.5), надо составить систему уравнений для токов.

Число уравнений должно быть равно числу неизвестных. После решения этой системы уравнений рассчитывается напряжение на том участке цепи, который указан в условии задачи. Окончательный результат должен быть представлен в действительной форме.

**Задача 12.3.6 (базовая задача).** Конденсатор емкостью 20 мкФ и резистор, сопротивление которого равно 159 Ом, соединены параллельно (*рис. 12.4 а*) с генератором переменного напряжения (частота  $\nu = 50$  Гц, эффективное напряжение  $U_0 = 120$  В).

Определить зависимость от времени силы тока в цепи  $I(t)$  и то-

ков через конденсатор  $I_C(t)$  и резистор  $I_R(t)$ .

### Решение

Положим, что ЭДС зависит от времени как  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$ , где  $\varepsilon_0 = \sqrt{2} U_s \approx 170 \text{ В}$  – амплитуда источника ЭДС,  $\omega = 2\pi\nu = 100\pi$  – круговая частота.

1) Решение методом векторных диаграмм (рис. 12.4б)

Выберем в качестве исходного направление вектора ЭДС  $\varepsilon_0$ , поскольку напряжение одинаково на обоих элементах цепи.

Вектор  $I_R$  параллелен вектору  $\varepsilon_0$  и имеет длину  $I_R = \varepsilon_0/R$ . Поэтому  $I_R(t) = (\varepsilon_0/R)\cos(\omega t)$ .

Ввиду того, что ток через конденсатор опережает на  $\pi/2$  напряжение  $\varepsilon_0$ , приложенное к нему, вектор тока  $I_C$  перпендикулярен к  $\varepsilon_0$  и повернут против часовой стрелки, а его длина

$$I_C = \frac{\varepsilon_0}{|Z_C|} = \varepsilon_0 \omega C. \text{ Отсюда следует}$$

$$I_C(t) = \varepsilon_0 \omega C \cos(\omega t + \pi/2) = -\varepsilon_0 \omega C \sin \omega t.$$

Так как конденсатор и резистор соединены параллельно, то по первому правилу Кирхгофа полный ток равен сумме токов через конденсатор и резистор  $I = I_R + I_C$  (векторная сумма).

Как видно из рис.12.4б, фаза  $\varphi$  полного тока  $I$  относительно  $\varepsilon_0$  положительна и определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_C}{I_R} = \omega RC.$$

Амплитуду полного тока можно записать в виде

$$I_0 = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} \text{ или, что удобнее}$$

$$I_0 = \frac{I_R}{\cos \varphi} = \frac{\varepsilon_0}{R} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

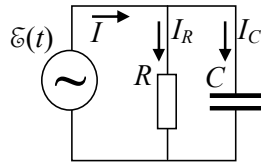


Рис. 12.4а. Параллельная RC-цепь (задача 12.3.6)

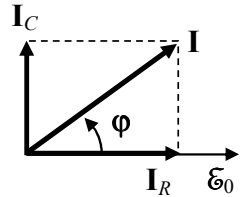


Рис. 12.4 б. Векторная диаграмма для параллельной RC цепи (задача 12.3.6)

Зависимость полного тока от времени будет  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ .

При заданных в условии задачи значениях  $R$ ,  $C$  и  $\nu$  имеем  $\operatorname{tg} \varphi \approx 1$ , т.е.  $\varphi = \pi/4$  или  $45^\circ$ . Подставляя эти значения и величины  $\mathcal{E}_0$  и  $\nu$  в предыдущие соотношения, получаем

$$I_R(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos(2\pi\nu t) \approx 1,07 \cos(100\pi t) \text{ (A)},$$

$$I_C(t) = -\mathcal{E}_0 2\pi\nu C \sin(2\pi\nu t) \approx -1,07 \sin(100\pi t) \text{ (A)},$$

$$I(t) = I_0 \cos(2\pi\nu t + \pi/4) \approx 1,51 \cos(100\pi t + \pi/4) \text{ (A)}.$$

## 2) Решение методом комплексных амплитуд

Как и в методе векторных диаграмм, для комплексных амплитуд токов  $\hat{I}_0$ ,  $\hat{I}_C$  и  $\hat{I}_R$  можно записать следующие соотношения:

$$\hat{I}_0 = \hat{I}_C + \hat{I}_R, \text{ где } \hat{I}_R = \mathcal{E}_0/R, \hat{I}_C = \mathcal{E}_0 i\omega C = \mathcal{E}_0 \omega C e^{i\pi/2}.$$

Амплитуда ЭДС взята в действительном виде, поскольку она одна, фаза ее не имеет значения и может быть положена нулевой.

Отсюда получим:  $\hat{I}_0 = \mathcal{E}_0 \left( \frac{1}{R} + i\omega C \right) = \mathcal{E}_0 \hat{Y}$ , где  $\hat{Y} = Y_0 e^{i\varphi}$  – комплексная проводимость цепи. Здесь

$$\operatorname{tg} \varphi = \omega RC, \quad Y_0 = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} = \frac{1}{R} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

Окончательный результат для полного тока в комплексной записи будет иметь следующий вид:

$$\hat{I}_0 = \mathcal{E}_0 Y_0 e^{i\varphi}.$$

Умножая полученные комплексные амплитуды на  $e^{i\omega t}$  и беря действительную часть от этих комплексных решений, получим тот же результат, что и при использовании метода векторных диаграмм.

**Ответ:**  $I_R(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos(2\pi\nu t) \approx 1,07 \cos(100\pi t) \text{ (A)};$

$$I_C(t) = -\mathcal{E}_0 2\pi\nu C \sin(2\pi\nu t) \approx -1,07 \sin(100\pi t) \text{ (A)};$$

$$I(t) = I_0 \cos(2\pi\nu t + \pi/4) \approx 1,51 \cos(100\pi t + \pi/4) \text{ (A)}.$$

**Задача 12.3.7.** На участке цепи, изображенном на рис. 12.5а, заданы величины  $L$ ,  $R$ ,  $C$  и сила тока через участок  $RC$   $I_2 = I_0 \cos \omega t$ . Найти напряжение  $U(t)$ , ток через катушку  $I_1(t)$  и сдвиг фазы  $\varphi$  между  $U(t)$  и напряжением  $U_C$  на конденсаторе.

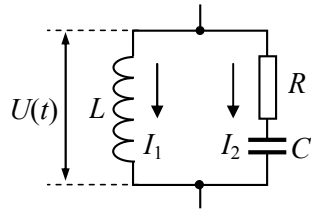


Рис. 12.5а. Схема электрической  $LCR$  цепи к задаче 12.3.7

**Решение**

Напряжение  $U(t)$  можно сразу найти, зная ток  $I_2(t)$  и импеданс правой части цепи. В комплексных амплитудах:

$$\hat{U} = \left( R + \frac{1}{i\omega C} \right) \hat{I}_2 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} e^{i\varphi_0} \hat{I}_2 = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}{\omega C} e^{-i|\varphi_0|} \hat{I}_2,$$

где  $\hat{I}_2 = I_0$ ,  $\varphi_0$  – угол фазового сдвига напряжения  $U(t)$  относительно тока  $I_2(t)$ , определяемый из соотношения  $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{1}{\omega RC} < 0$ . Беря действительную часть от  $\hat{U} e^{i\omega t}$ , находим напряжение  $U(t)$ :

$$U(t) = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}{\omega C} I_0 \cos(\omega t - |\varphi_0|).$$

Теперь можно найти силу тока в левой части цепи

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}}{i\omega L} = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}{\omega^2 LC} e^{i(-|\varphi_0| - \pi/2)} \hat{I}_2.$$

Действительная часть от  $\hat{I}_1 e^{i\omega t}$  дает ток  $I_1(t)$ :

$$I_1 = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}{\omega^2 LC} I_0 \cos(\omega t - |\varphi_0| - \pi/2).$$

Чтобы найти сдвиг фазы  $\varphi$  между  $U(t)$  и напряжением  $U_C(t)$ , запишем выражение для комплексной амплитуды  $\hat{U}_C$ :

$$\hat{U}_C = \frac{1}{i\omega C} \hat{I}_2 = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} \hat{I}_2.$$

Разность фаз между найденной выше комплексной амплитудой  $\hat{U}$  и  $\hat{U}_C$  составляет  $\varphi = -|\varphi_0| - \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - |\varphi_0|$ .

Эту задачу можно легко решить и с использованием метода векторных диаграмм.

Векторная диаграмма, соответствующая поставленной задаче, представлена на рис. 12.5б.

В качестве исходного вектора для отсчета углов фазового сдвига, как и выше, берем вектор силы тока  $I_2$ . Вектор напряжения на резисторе  $U_R$  параллелен вектору  $I_2$  и имеет модуль  $U_R = I_0 R$ . Вектор напряжения на конденсаторе  $U_C$  перпендикулярен к  $I_2$  (повернут на  $-\frac{\pi}{2}$ ) и его дли-

на  $U_C = \frac{I_0}{\omega C}$ .

Векторы  $U_R$ ,  $U_C$  образуют прямоугольный треугольник. Поэтому амплитуда напряжения  $U(t)$  равна

$$U_0 = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = I_0 \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}.$$

Модуль угла сдвига фаз между  $U(t)$  и  $I_2(t)$  определяется равенством

$$\operatorname{tg}|\varphi_0| = \frac{U_C}{U_R} = \frac{1}{\omega RC}.$$

Сам угол  $\varphi_0$  отрицателен, поскольку напряжение  $U(t)$  запаздывает по фазе относительно тока  $I_2(t)$ :  $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{1}{\omega RC} < 0$ .

Модуль угла сдвига фаз  $\varphi$  между  $U(t)$  и напряжением на конденсаторе  $U_C(t)$  определяется соотношением  $\operatorname{tg}|\varphi| = U_R/U_C = \omega RC = \operatorname{ctg}|\varphi_0|$ . Напряжение  $U_C(t)$  запаздывает по фазе относительно  $\xi(t)$ , поэтому  $\varphi < 0$  и  $\operatorname{tg} \varphi = -\omega RC$ .

Амплитуда тока  $I_1(t)$  равна  $I_{10} = \frac{U_L}{\omega L} = \frac{U_0}{\omega L}$ . Ток  $I_1(t)$  в катушке индуктивности отстает от напряжения на ней на  $\pi/2$ , поэтому вектор  $I_1$  перпендикулярен к вектору  $\xi$  и повернут относительно него на  $-\pi/2$ . Как видно из рис. 12.4, угол между векторами  $I_1$  и  $I_2$  по модулю равен  $|\varphi_1| = (\pi/2 + |\varphi_0|)$ . Сдвиг фаз между токами  $I_1(t)$  и  $I_2(t)$  с

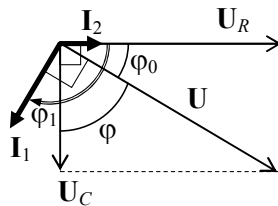


Рис. 12.5б. Векторная диаграмма напряжений и токов (задача 12.3.7)

учетом отставания тока  $I_1(t)$  отрицателен и равен  $\varphi_1 = -(\pi/2 + |\varphi_0|)$ .

Окончательный ответ, с учётом знака сдвига фаз, будет иметь следующий вид:

$$\text{Ответ: } U(t) = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}{\omega C} I_0 \cos(\omega t - |\varphi_0|), \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{1}{\omega RC};$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}{\omega^2 LC} I_0 \cos(\omega t - |\varphi_0| - \pi/2).$$

**Задача 12.3.8.** Определить амплитуду и фазу напряжения  $U(t)$  на конденсаторе  $C_2$  (рис. 12.6). Напряжение генератора изменяется по закону  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ . При расчёте положить  $C_1 = C_2 = C_3 = C$ .

*Общая схема решения.* Вначале определим ток  $\hat{I}_1$ , протекающий через цепь  $RC_2$ .

Затем, используя соотношение  $\hat{U} = \frac{\hat{I}_1}{i\omega C_2}$ ,

определим напряжение на конденсаторе  $C_2$ . При расчёте будем использовать метод комплексных амплитуд.

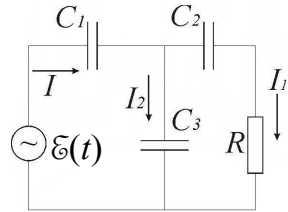


Рис. 12.6. Разветвленная  $RC$ -цепь к задаче 12.3.8

### Решение

Зададим произвольным образом положительные направления токов в ветвях цепи (стрелки на рис. 12.6). Используя правила Кирхгофа, запишем следующие соотношения:

$$\begin{cases} \hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2, & (\text{узел } C_1, C_2, C_3); \\ \hat{\mathcal{E}} = \frac{\hat{I}}{i\omega C_1} + \frac{\hat{I}_2}{i\omega C_3}, & (\text{контур } \mathcal{E}, C_1, C_3); \\ (R + \frac{1}{i\omega C_2}) \hat{I}_1 - \frac{\hat{I}_2}{i\omega C_3} = 0 & (\text{контур } C_2, R, C_3). \end{cases}$$

Исключив ток  $\hat{I}$  и учитывая, что  $C_{1-3} = C$ , эти уравнения можно представить в следующем виде:

$$\hat{\mathcal{E}}_0 = \frac{\hat{I}_1 + 2\hat{I}_2}{i\omega C}; \quad \hat{I}_2 = (1 + i\omega RC) \hat{I}_1; \quad U = \frac{\hat{I}_1}{i\omega C}.$$

Решая эту систему уравнений, получим:



$$\hat{U} = \frac{\hat{\xi}}{3 + 2i\omega RC} = \frac{\xi_0}{\sqrt{9 + 4(\omega RC)^2}} e^{-i|\varphi|}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{2}{3} \omega RC$$

или, в действительных переменных:

$$U(t) = \frac{\xi_0}{\sqrt{9 + 4(\omega RC)^2}} \cos(\omega t - |\varphi|).$$

**Ответ:**  $U(t) = \frac{\xi_0}{\sqrt{9 + 4(\omega RC)^2}} \cos(\omega t - |\varphi|), \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{2}{3} \omega RC.$

**Задача 12.3.9.** Найти напряжение  $U(t)$  на конденсаторе (рис. 12.7), если параметры схемы таковы, что это напряжение сдвинуто по фазе на угол  $45^\circ$  относительно напряжения генератора  $\xi(t) = \xi_0 \cos \omega t$ .

### Решение

При решении этой задачи можно действовать по стандартной методике, используя правила Кирхгофа (см. задачу 12.3.8). Однако будет проще свести данную цепь к последовательной  $RC$ -цепи.

Обозначим через  $\hat{Z}$  комплексное сопротивление параллельно соединённых элементов  $R$  и  $C$ . Тогда падение напряжения на этой цепи (его и нужно определить по условию задачи) будет равно

$$\hat{U} = \hat{Z} \hat{I} = \hat{Z} \frac{\xi_0}{R + \hat{Z}} = \frac{\xi_0}{1 + R/\hat{Z}},$$

где  $\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{R} + i\omega C$  (т.к.  $R$  и  $C$  соединены параллельно). Начальное значение фазы сигнала генератора можно положить равным нулю, поэтому  $\hat{\xi}$  равно  $\xi_0$  – амплитуде сигнала генератора. Учитывая это, получим

$$\hat{U} = \frac{\xi_0}{2 + i\omega RC} = \frac{\xi_0}{\sqrt{4 + (\omega RC)^2}} e^{i\varphi},$$

где  $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{2} \omega RC$ . По условию задачи  $\operatorname{tg} \varphi = \pm 1$ . Хотя знак фазы не был указан, теперь видно, что он должен быть отрицательным. Тогда  $\omega RC = 2$ ,  $\varphi = -\pi/4$  и

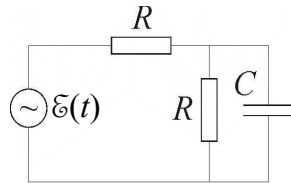


Рис. 12.7. Электрическая схема цепи к задаче 12.3.9

$$\hat{U} = \frac{\xi_0}{2\sqrt{2}} e^{-i\pi/4}.$$

Амплитуда напряжения на конденсаторе равна  $U_0 = |\hat{U}| = \frac{\xi_0}{2\sqrt{2}}$ .

Запишем полную зависимость этого напряжения от времени

$$U(t) = \operatorname{Re}(\hat{U} e^{i\omega t}) = \frac{\xi_0}{2\sqrt{2}} \cos(\omega t - \pi/4).$$

**Ответ:**  $U(t) = \frac{\xi_0}{2\sqrt{2}} \cos(\omega t - \pi/4).$

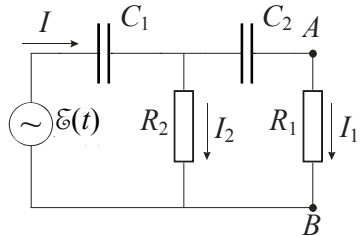
**Задача 12.3.10.** В схеме, показанной на *рис. 12.8*,  $C_1 = C_2 = C$ ,  $R_1 = R_2 = R$ . Сдвиг фаз между напряжением  $\xi$  генератора переменного напряжения (круговая частота равна  $\omega$ ) и напряжением  $U_{AB}$  равен  $90^\circ$ .

1) При каких значениях  $R$ ,  $C$ ,  $\omega$  это возможно?

2) Чему при этом будет равно отношение амплитуд  $\xi$  и  $U_{AB}$ ?

**Решение**

Зададим (произвольно) направления токов во всех участках схемы (см. *рис. 12.8*). Далее запишем уравнения Кирхгофа, выбрав в качестве переменных токи  $\hat{I}$ ,  $\hat{I}_1$  и  $\hat{I}_2$ .



*Рис. 12.8.* Схема электрической цепи к задаче 12.3.10

$$\begin{cases} \hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2; & (\text{для узла } C_1, C_2, R_2); \\ \frac{\hat{I}}{i\omega C_1} + R_2 \hat{I}_2 = \hat{\xi} & (\text{для контура } \xi, C_1, R_2); \\ \left(R_1 + \frac{1}{i\omega C_2}\right) \hat{I}_1 - R_2 \hat{I}_2 = 0 & (\text{для контура } C_2, R_1, R_2). \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, найдем ток  $\hat{I}_1$ , а затем напряжение  $\hat{U}_{AB} = \hat{I}_1 R$ :

$$\hat{\xi}_0 = \left\{ \frac{1}{i\omega C} + \frac{\left(R + \frac{1}{i\omega C}\right)^2}{R} \right\} \hat{I}_1,$$

$$\hat{U}_{AB} = R\hat{I}_1,$$

$$\text{или } \hat{\mathcal{E}}_0 = \left\{ 1 - \frac{1}{(\omega RC)^2} - i \frac{3}{\omega RC} \right\} \hat{U}_{AB} = \hat{A} \hat{U}_{AB}$$

Разность фаз  $\hat{\mathcal{E}}$  и  $\hat{U}_{AB}$  определяется фазой комплексного множителя  $\hat{A}$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} \hat{A}}{\operatorname{Re} \hat{A}} = - \frac{3}{\omega RC \left( 1 - \frac{1}{(\omega RC)^2} \right)}.$$

По условиям задачи  $\operatorname{tg} \varphi = \infty$ , откуда следует, что  $\omega RC = 1$ . При этом условии  $\hat{\mathcal{E}} = -3i\hat{U}_{AB} = 3\hat{U}_{AB} e^{-i\pi/2}$ . Отношение амплитуд  $\mathcal{E}/U_{AB} = 3$ , а напряжение  $\mathcal{E}$  отстает по фазе от напряжения  $U_{AB}$  на  $\frac{\pi}{2}$ .

**Ответ:** 1)  $\omega RC = 1$ ; 2)  $\frac{\mathcal{E}}{U_{AB}} = 3$ ;

**Задача 12.3.11.** На рис. 12.9 представлена схема цепи. Через  $I(t)$  обозначен генератор тока  $I(t) = I_0 \cos \omega t$ ,  $I_0$  – амплитуда тока.

1) Рассчитать комплексное  $\hat{Z}$  и полное  $Z_0$  сопротивление цепи (между точками  $A$  и  $B$ ).

2) Найти резонансную частоту  $\omega_p$ , т.е. то значение частоты, при котором полное сопротивление  $Z_0$  имеет экстремальное значение и рассчитать  $Z_0$  при этой частоте.

3) Определить амплитуду напряжения на конденсаторе и амплитуду силы тока в  $Lr$  цепи при резонансе.

4) Найти сдвиг фаз между токами, протекающими через конденсатор и катушку индуктивности при резонансе.

При расчётах в пунктах 2-4 считать, что добротность колебательного контура  $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} \gg 1$ .

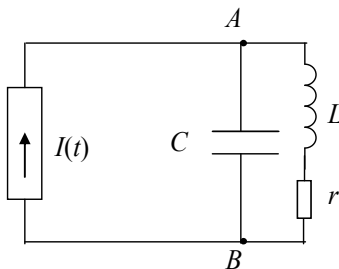


Рис. 12.9. Схема электрической цепи к задаче 12.3.11

**Решение**

1) Так как элементы цепи соединены параллельно, удобно вначале найти комплексную проводимость цепи

$$\hat{Y} = i\omega C + \frac{1}{r + i\omega L}.$$

Тогда комплексное сопротивление цепи равно

$$\hat{Z} = \frac{1}{\hat{Y}} = \frac{r + i\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + i\omega rC},$$

а полное сопротивление цепи

$$Z_0 = |\hat{Z}| = \sqrt{\frac{r^2 + \omega^2 L^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega rC)^2}}.$$

2) При  $Q \gg 1$  сопротивление цепи  $Z_0$  имеет максимальное значение при  $\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , а реактивное сопротивление катушки на частоте  $\omega_0$  много больше активного сопротивления  $r$ , поэтому  $r + i\omega L \approx i\omega L$ . При таких упрощениях полное сопротивление при резонансе может быть представлено в следующем виде

$$Z_0^{\text{рез}} = \frac{L}{rC} = rQ^2.$$

3) При резонансной частоте  $\omega_p \approx \omega_0$  импеданс и амплитуда напряжения между точками  $A$  и  $B$  достигает максимума. Амплитуды токов, текущих через конденсатор и катушку, при этом могут быть очень велики по сравнению с  $I_0$ . Но эти токи почти противофазны, и их векторная сумма равна  $I_0$ . Такой резонанс называется **резонансом токов** [1, §50].

Комплексная амплитуда силы тока в  $Lr$  цепи равна

$$\hat{I}_L = \frac{I_0 Z}{r + i\omega L}.$$

Отсюда, учитывая результаты пункта 2 данной задачи, получаем, что при резонансе токов эта величина становится равной

$$\hat{I}_L = \frac{I_0}{i\omega_p rC},$$

а амплитуда тока равна

$$I_L^{\text{рез}} = \frac{I_0}{\omega_0 rC} = QI_0.$$

Амплитуда напряжения на конденсаторе при резонансе равна

$$U_C^{\text{рез}} = I_0 Z_0^{\text{рез}} = rQ^2 I_0,$$

а амплитуда тока через конденсатор

$$I_C^{\text{рез}} = \omega_0 C U_C^{\text{рез}} = Q I_0.$$

4) Поскольку напряжение на конденсаторе равно напряжению на  $Lr$ -цепи, то

$$\hat{I}_C \frac{1}{i\omega C} = \hat{I}_L (r + i\omega L).$$

Отсюда находим  $\hat{I}_C = \hat{I}_L (i\omega Cr - \omega^2 LC)$ . Разность фаз  $\varphi$  между токами  $I_C$  и  $I_L$  равна аргументу комплексного множителя в скобках и при резонансе составляет

$$\text{tg}\varphi = -\frac{r}{\omega L} = -r\sqrt{\frac{C}{L}} = -\frac{1}{Q}.$$

Таким образом, при большой добротности сдвиг фаз  $\varphi \approx \pi$ , т.е. токи через  $C$  и  $Lr$ -цепи почти противофазны.

**Ответ:** 1)  $\hat{Z} = \frac{1}{\hat{Y}} = \frac{r + i\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + i\omega r C}$ ,  $Z_0 = \sqrt{\frac{r^2 + \omega^2 L^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega r C)^2}}$ .

2)  $\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ;  $Z_0^{\text{рез}} = \frac{L}{rC} = rQ^2$ .

3)  $I_L^{\text{рез}} = Q I_0$ ,  $U_C^{\text{рез}} = rQ^2 I_0$ .

4)  $\text{tg}\varphi = -\frac{1}{Q}$ .

**Задача 12.3.12.** Схема цепи изображена на рис. 12.10. Здесь  $\xi(t) = \xi_0 \cos \omega t$ . Определить:

1) При какой частоте генератора  $\omega$  сила тока  $I$  в цепи минимальна? Чему равна амплитуда силы тока при этой частоте?

2) При какой частоте сила тока  $I$  максимальна? Чему равна при этом амплитуда силы тока?

Из решения исключить очевидные случаи ( $\omega \rightarrow 0$ ) и ( $\omega \rightarrow \infty$ ).

При расчёте положить  $C_1 = C_2 = C$ ;  $R \gg \sqrt{L/C}$ ,  $R \gg r$

**Решение**

1) Сила тока в цепи  $C_2L$  минимальна при  $\omega_{p1} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC_2}$  (резонанс токов, см. предыдущую задачу **12.3.11**). Сопротивление конденсатора  $C_1$  на этой частоте равно  $1/(\omega_0 C) = \sqrt{L/C}$  и

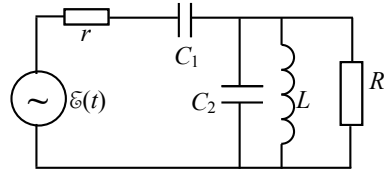


Рис. 12.10. Схема электрической цепи к задаче **12.3.12**

существенно меньше  $R$  (см. условие задачи). Амплитуда силы тока через источник ЭДС будет равна  $I_0 = \varepsilon_0/R$ , т.к.  $r \ll R$ , а сопротивление цепи  $LC_2$  (параллельное соединение) на частоте  $\omega_0$  равно бесконечности. Очевидно, что при этом ток совпадает с  $\varepsilon(t)$  по фазе.

2) Для определения второй резонансной частоты вычислим комплексное сопротивление всей цепи. Для упрощения расчетов пренебрежем влиянием резистора  $R$ , т.е. положим  $R = \infty$ . Влияние этого резистора необходимо учитывать только при частотах  $\omega$ , близких к  $\omega_0$ , когда сопротивление параллельного контура  $C_2L$  становится большим. В таком приближении комплексное сопротивление всей цепи равно

$$\hat{Z} = r + \frac{i(\omega^2 L(C_1 + C_2) - 1)}{\omega C_2(1 - \omega^2 LC_2)}.$$

Из этого соотношения видно, что  $|\hat{Z}|$  имеет минимум  $|\hat{Z}|_{\min} = r$ , который получается на второй резонансной частоте

$$\omega_{p2} = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}.$$

Амплитуда силы тока при этой частоте равна

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{r},$$

и ток совпадает с  $\varepsilon(t)$  по фазе. Этот случай соответствует *резонансу напряжений*, т.к. амплитуды напряжений на всех участках цепи  $r$ ,  $C_1$ ,  $R$ ,  $C_2$  и  $L$  будут максимальны.

Убедимся теперь в обоснованности использованного приближения  $R \rightarrow \infty$ . Действительно, импеданс цепочки  $LC_2$  на частоте  $\omega_{p2}$

будет равен  $\sqrt{2L/C}$ , что существенно меньше  $R$  по условию задачи.

- Ответ:** 1) Сила тока минимальна при  $\omega_{p1} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  
 $I_{0\min} = \mathcal{E}_0/R$ .  
 2) Сила тока максимальна при  $\omega_{p2} = 1/\sqrt{L(C_1 + C_2)}$ ,  
 $I_{0\max} = \mathcal{E}_0/r$ .

### Расчет фазовращателей и мостовых схем

**Задача 12.3.13.** На рис. 12.11а представлена схема простейшего фазовращателя ( $R_1 = R_2 = R$ ,  $C_1 = C_2 = C$ ). Определить амплитуду  $U_{AB}$  и фазу  $\varphi_0$  выходного напряжения, действующего между точками  $A$  и  $B$ , относительно входного напряжения.

#### Решение

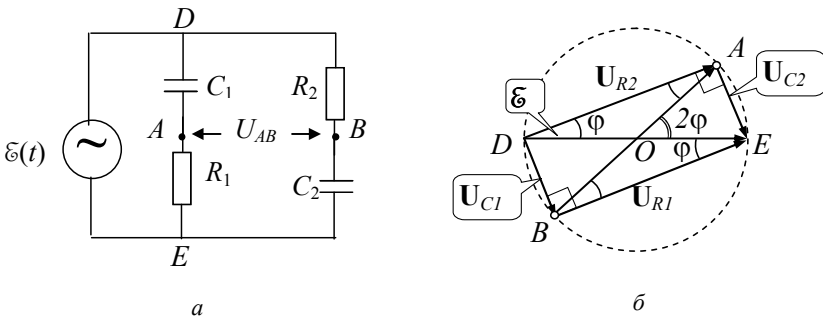


Рис. 12.11. а – электрическая схема фазовращателя на основе  $RC$ -цепей; б – векторная диаграмма напряжений фазовращателя (задача 12.3.13)

Рассмотрим векторную диаграмму напряжений (рис. 12.11б). В каждой из параллельных цепей векторы напряжений на соответствующем конденсаторе и на резисторе всегда взаимно перпендикулярны, т.к. напряжение на конденсаторе отстает от напряжения на сопротивлении на  $90^\circ$ . Поскольку в сумме эти два вектора составляют постоянный вектор  $\mathcal{E}$ , то точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности с диаметром  $\mathcal{E}$ , а  $U_{AB} = \mathcal{E}$ , поскольку прямая  $AB$  проходит через центр этой окружности и также является ее диаметром.

Угол  $\varphi$  между вектором  $\mathcal{E}$  и вектором напряжения на резисторе

$U_{RI}$  определяется соотношением  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{CI}}{U_{RI}} = \frac{1}{\omega RC}$ . Угол  $AOE$  поворота вектора выходного напряжения  $U_{AB}$  относительно входного  $\mathcal{E}$  вдвое больше угла  $ABE$  и равен  $\varphi_0 = 2\varphi$ .

Этот же результат легко получить и *методом комплексных амплитуд*. Ток, протекающий через каждую из  $RC$ -цепей, одинаков и равен

$$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}_0}{R - \frac{i}{\omega C}}.$$

Напряжения в точках  $A$  и  $B$  относительно нижнего проводника схемы, соответственно, равны  $\hat{U}_A = R\hat{I}$ ,  $\hat{U}_B = \frac{\hat{I}}{i\omega C}$ . Выходное напряжение равно

$$\hat{U}_{AB} = \hat{U}_A - \hat{U}_B = \hat{\mathcal{E}}_0 \frac{R + \frac{i}{\omega C}}{R - \frac{i}{\omega C}} = \hat{\mathcal{E}}_0 e^{i\varphi_0}.$$

Модуль дроби в данном выражении равен 1, поэтому амплитуда выходного напряжения равна  $\mathcal{E}_0$ . Сдвиг фаз равен  $\varphi_0 = 2\varphi$ , где  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega RC}$ .

**Ответ:**  $U_{AB} = \mathcal{E}_0$ ;  $\varphi_0 = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega RC}$ .

**Задача 12.3.14.** Мостовая схема, изображённая на *рис. 12.12 а*, используется для измерения индуктивности. Мост считается сбалансированным, когда разность потенциалов (напряжение) между точками  $A$  и  $B$  равна нулю. Найти индуктивность  $L$  как функцию  $R$  и  $C$ , используя условие баланса ( $U_{AB} = 0$ ).

### Решение

Для достижения баланса в произвольном мосте (*рис. 12.12 б*) необходимо выполнение следующего условия. Так как напряжение на цепи ( $\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2$ ) и ( $\hat{Z}_3 + \hat{Z}_4$ ) равны, то для равенства напряжений в точках  $A$  и  $B$  необходимо, чтобы



$$\hat{I}_1 \hat{Z}_1 = \hat{I}_2 \hat{Z}_2 \text{ и } \hat{I}_1 \hat{Z}_2 = \hat{I}_2 \hat{Z}_4,$$

где  $I_1$  и  $I_2$  – токи в левой и правой цепи. Из этих соотношений следует условие баланса моста

$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_4 = \hat{Z}_2 \hat{Z}_3.$$

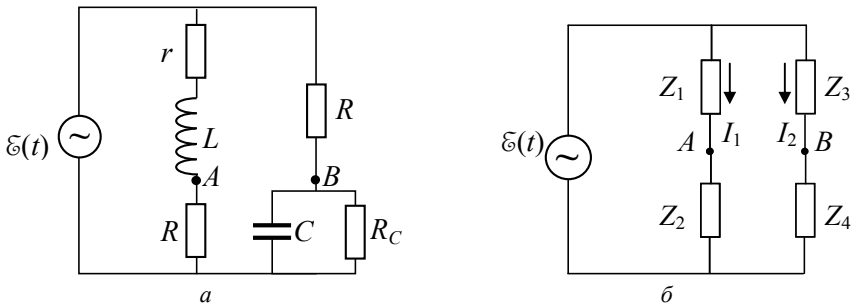


Рис. 12.12 а – схема электрического моста; б – обобщённое представление мостовых схем, кроме  $T$ -мостов (к задаче 12.3.14)

В нашем случае  $\hat{Z}_1 = r + i\omega L$ ,  $\hat{Z}_2 = \hat{Z}_3 = R$ ,  $\hat{Z}_4 = \frac{1}{i\omega C + 1/R}$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \hat{Z}_2 \hat{Z}_3 &= R^2, \quad \hat{Z}_1 \hat{Z}_4 = \frac{r + i\omega L}{i\omega C + 1/R} = \frac{rR_C(1 + i\omega L/r)}{1 + i\omega CR_C} = \\ &= \hat{Z}_2 \hat{Z}_3 = R^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\frac{\omega L}{r} = \omega CR_C$ .

Таким образом,  $L = rCR_C$ , где  $rR_C = R^2$ . И, окончательно,  $L = CR^2$ .

**Ответ:**  $L = CR^2$ .

### Задачи типа 12.3

#### Определение мощности в цепях переменного тока

**Метод решения.** Мощность на участке цепи переменного тока определяется соотношением (12.7)  $P = U_3 I_3 \cos \varphi$ . Здесь  $U_3$  и  $I_3$  – эффективные значения напряжения на данном участке и тока через него, а  $\varphi$  – сдвиг фаз между током и напряжением. Для решения задач этого раздела необходимо найти соответствующие напряжения и токи, что рассматривалось в задачах раздела 12.2.1. В данном разделе эффективные значения будут далее обозначаться без индекса, амплитудные значения – с нижним индексом "0". Это же относится к модулям векторов на векторных диаграммах. Комплексные амплитуды, как и ранее, обозначаются значком "^" над символом.

**Задача 12.3.15.** Катушка с индуктивностью  $L = 0,318$  Гн и активным сопротивлением  $R = 100$  Ом подключена к источнику синусоидального напряжения с частотой 50 Гц, эффективное значение которого  $\mathcal{E} = 120$  В. Определить мощность, выделяемую в цепи.

#### Решение

Полная мощность, выделяемая в цепи переменного тока, равна мощности источника ЭДС  $P = \mathcal{E} I \cos \varphi$ . Здесь  $\mathcal{E}$  и  $I$  – эффективные значения ЭДС и силы тока, а  $\varphi$  – сдвиг фазы между этими величинами. В последовательной цепи импеданс равен  $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ , сила тока  $I = \mathcal{E}/Z$ , а сдвиг фаз между ЭДС и током  $\cos \varphi = R/Z$ . Используя эти соотношения, получаем мощность

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

В рассматриваемом случае  $P = 72$  Вт.

Ввиду того, что вся мощность выделяется только на активном сопротивлении, ее можно также найти из выражения  $P = I^2 R$ .

**Ответ:**  $P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} = 72$  Вт.

**Задача 12.3.16.** Катушка с индуктивностью  $L$  и активным сопротивлением  $r$  соединена последовательно с резистором (сопротивление равно  $R$ ) и подключена к источнику переменного напряжения частоты  $\omega$  и с эффективным напряжением  $\mathcal{E}$ . При каком зна-

чении сопротивления  $R$  в цепи будет выделяться максимальная тепловая мощность и чему она равна?

**Решение**

В последовательной цепи будет течь ток с комплексной амплитудой

$$\hat{I} = \frac{\mathcal{E}_0}{R + r + i\omega L} = \frac{\mathcal{E}_0}{R + r} \cdot \frac{1}{1 + i \operatorname{tg} \varphi},$$

где  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R + r}$  – сдвиг фаз напряжения и тока в цепи,  $\mathcal{E}_0 = \sqrt{2}\mathcal{E}$  – амплитуда ЭДС источника тока. Полная мощность, выделяемая в цепи, равна:

$$\begin{aligned} P = I^2(R + r) &= \frac{1}{2} |\hat{I}|^2 (R + r) = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r} \cos^2 \varphi = \\ &= \frac{\mathcal{E}^2}{\omega L} \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \varphi = \frac{\mathcal{E}^2}{2\omega L} \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Максимум  $P$  достигается при  $\varphi = \pi/4$ , в этом случае  $\operatorname{tg} \varphi = 1$ . Отсюда получаем, что максимальная тепловая мощность достигается при  $R = \omega L - r$ .

**Ответ:**  $R = \omega L - r$ ;  $P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{2\omega L}$ .

*Дополнение.* Для решения можно использовать результат предыдущей задачи

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R_{\Sigma}}{R_{\Sigma}^2 + \omega^2 L^2},$$

где  $R_{\Sigma} = R + r$  – полное активное сопротивление цепи. Приравнявая нулю производную  $\frac{\partial P}{\partial R_{\Sigma}}$ , находим, что мощность имеет максимум при  $R_{\Sigma} = \omega L$ , откуда следует  $R = \omega L - r$ .

**Задача 12.3.17.** Цепь, состоящую из последовательно соединённых сопротивления  $R$  и катушки индуктивности с неизвестным активным сопротивлением  $r$ , подключили к источнику синусоидального напряжения с ЭДС  $\mathcal{E}$ . Найти тепловую мощность, выде-

ляющуюся в катушке, если эффективные значения напряжений на сопротивлении и катушке равны, соответственно,  $U_R$  и  $U_L$ .

### Решение

Мощность, которую надо определить, равна  $P = U_L I \cos \varphi$ . Ток в цепи равен  $I = \frac{U_R}{R}$ . Отсюда  $P = \frac{U_R U_L}{R} \cos \varphi$ .

Чтобы найти косинус сдвига фаз между током и напряжением на катушке индуктивности  $\cos \varphi$ , рассмотрим векторную диаграмму данной цепи (рис. 12.13).

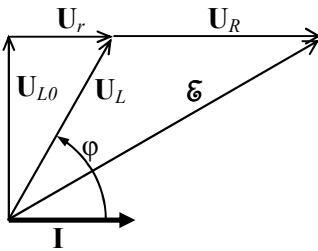


Рис. 12.13. Векторная диаграмма напряжений к задаче 12.3.17

Выберем за исходное направление вектор тока  $I$ . Вектор напряжения на катушке  $U_L$  складывается из вектора  $U_r$  напряжения на ее активном сопротивлении  $r$ , который параллелен  $I$ , и вектора  $U_{L0}$  напряжения на ее чисто индуктивном компоненте, который перпендикулярен  $I$ , поскольку  $U_{L0}$  опережает  $I$  на  $\pi/2$ .

Вектор  $U_L$  в сумме с вектором  $U_R$  напряжения на сопротивлении  $R$  должен равняться вектору ЭДС, приложенной к цепи:  $\mathcal{E} = U_L + U_R$ . Возведём в квадрат правую и левую части этого равенства:

$$\mathcal{E}^2 = U_L^2 + U_R^2 + 2(U_L U_R) = U_L^2 + U_R^2 + 2U_L U_R \cos \varphi.$$

Выражая отсюда  $\cos \varphi$  и подставляя в выражение для мощности, окончательно получаем:  $P_L = \frac{1}{2R} (\mathcal{E}^2 - U_L^2 - U_R^2)$ .

**Ответ:**  $P_L = \frac{1}{2R} (\mathcal{E}^2 - U_L^2 - U_R^2)$ .

**Задача 12.3.18.** К источнику синусоидального напряжения с амплитудой  $\mathcal{E}_0$  подключили последовательно соединённые сопротивление  $R$  и катушку с активным сопротивлением. Найти мощность, потребляемую катушкой, если разность фаз между током в цепи и напряжением источника равна  $\varphi$ , а падение напряжения на сопротивлении  $R$  и катушке равны по величине

**Решение**

1) *Способ 1. Решение методом векторных диаграмм*

Используем результат, полученный в задаче **12.3.17**:

$$P_L = \frac{1}{2R} (\mathcal{E}^2 - U_L^2 - U_R^2) = \frac{1}{2R} (\mathcal{E}^2 - 2U^2).$$

где учтено, что в нашем случае  $U_L = U_R = U$ , а  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0/\sqrt{2}$ . Для определения  $U$  используем векторное равенство  $\mathbf{U}_L = \mathbf{\mathcal{E}} - \mathbf{U}_R$  (рис. 12.13) и тот факт, что напряжение на резисторе и ток в цепи совпадают по фазе. Тогда

$$U_L^2 = \mathcal{E}^2 + U_R^2 - 2\mathbf{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{U}_R = \mathcal{E}^2 + U_R^2 - 2\mathcal{E}U_R \cos\varphi,$$

где  $\varphi$  – сдвиг фаз между током и напряжением источника. Используя условие  $U_L = U_R = U$ , получим:  $U = \frac{\mathcal{E}}{2 \cos\varphi}$ . Окончательно, опуская промежуточные выкладки, получим:

$$P_L = \frac{\mathcal{E}_0^2}{4R} \left( 1 - \frac{1}{2 \cos^2 \varphi} \right) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{8R} (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi).$$

2) *Способ 2. Аналитическое решение.*

Пусть  $r$  – неизвестное активное сопротивление катушки,  $\omega$  – круговая частота тока,  $L$  – индуктивность. Поскольку напряжения на сопротивлении  $R$  и катушке равны по величине, их импедансы также равны:

$$R = \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}.$$

Сдвиг фаз между напряжением и током в последовательной  $LR$  цепи определяется очевидным соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R + r}.$$

Решая совместно систему этих двух уравнений, находим

$$r = R \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad \omega L = R \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Учитывая, что импеданс всей цепи равен  $Z = \sqrt{(R + r)^2 + \omega^2 L^2}$ ,

а ток  $I = \frac{\mathcal{E}}{Z}$ , мощность, выделяемая на катушке, будет равна

$$P = I^2 r = \frac{\mathcal{E}^2 r}{(R+r)^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{8R} (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi).$$

**Ответ:**  $P_L = \frac{\mathcal{E}_0^2}{8R} (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi).$

**Задача 12.3.19.** Найти суммарную среднюю мощность обоих источников переменной ЭДС для схемы с элементами  $R, L, C$ , показанной на рис. 12.14. ЭДС источников равны  $\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_{10} \cos \omega t$ ;  $\mathcal{E}_2(t) = \mathcal{E}_{20} \sin \omega t$ ,  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ , стрелки на источниках указывают положительное направление ЭДС.

**Решение**

Введем комплексные амплитуды ЭДС, положив начальную фазу первой ЭДС равной нулю. Тогда, учитывая, что  $\mathcal{E}_2$  отстает от  $\mathcal{E}_1$  на  $\pi/2$ , запишем:

$$\hat{\mathcal{E}}_1 = \mathcal{E}_{10}, \quad \hat{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_{20} e^{-i\pi/2} = -i\mathcal{E}_{20}.$$

Используем метод контурных токов. Выберем направления контурных токов в левой и правой половине контура (пунктир на рис. 12.14) и запишем уравнения Кирхгофа, обходя контуры по направлению токов

$$i\omega L \hat{I}_1 + \frac{1}{i\omega C} (\hat{I}_1 + \hat{I}_2) = \mathcal{E}_{10}, \quad R \hat{I}_2 + \frac{1}{i\omega C} (\hat{I}_1 + \hat{I}_2) = -i\mathcal{E}_{20}.$$

Учитывая, что, по условию задачи,  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ , из первого уравнения сразу получаем

$$\hat{I}_2 = i\omega C \mathcal{E}_{10}.$$

Суммарная мощность  $P$  обоих источников ЭДС выделяется в виде тепла на резисторе  $R$ :

$$P = P_1 + P_2 = P_R = \frac{1}{2} |\hat{I}_2|^2 R = \frac{1}{2} (\omega C \mathcal{E}_{10})^2 R.$$

**Ответ:**  $P = \frac{1}{2} (\omega C \mathcal{E}_{10})^2 R.$

*Дополнение.* Найдем среднюю мощность  $P_{1,2}$  каждого источника

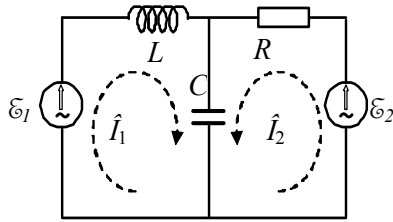


Рис. 12.14. Электрическая схема цепи к задаче 12.3.19

ЭДС. Согласно (12.16), мощность второго источника равна

$$P_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{U}_2 \hat{I}_2^*) = -\frac{1}{2} \omega C \epsilon_{10} \epsilon_{20}.$$

Мощность первого источника  $P_1$  можно найти из закона сохранения энергии

$$P_1 + P_2 = P_R = \frac{1}{2} (\omega C \epsilon_{10})^2 R,$$

откуда следует

$$P_1 = P_R - P_2 = \frac{1}{2} \omega C [\epsilon_{10} \epsilon_{20} + \omega C \epsilon_{10}^2 R].$$

Средняя мощность  $P_2$  получилась отрицательной, поскольку при заданных фазовом сдвиге источников ЭДС направление тока через второй источник противоположно знаку его ЭДС за счет работы первого источника, мощность которого всегда положительна.

Мощность первого источника  $P_1$  можно определить и непосредственно, найдя ток  $\hat{I}_1$  из второго уравнения приведенной выше системы:

$$\hat{I}_1 = \omega C \left[ \epsilon_{20} + \omega C \epsilon_{10} \left( R + \frac{1}{i\omega C} \right) \right],$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{\epsilon}_1 \hat{I}_1^*) = \frac{1}{2} \omega C [\epsilon_{10} \epsilon_{20} + \omega C \epsilon_{10}^2 R].$$

## § 12.4 Задачи для самостоятельного решения

**Задача 12.4.1.** Резистор (сопротивление  $R = 100$  Ом) и катушка индуктивности ( $L = 0,318$  Гн) соединены последовательно и включены в цепь переменного тока (эффективное напряжение  $U_s = 120$  В, частота  $\nu = 50$  Гц). Определить зависимость от времени тока в цепи  $I(t)$  и напряжений на индуктивности  $U_L(t)$  и резисторе  $U_R(t)$ .

**Ответ:**  $U_R(t) = 120 \cos(314t - \pi/4)$  (В),

$$U_L(t) = 120 \cos(314t + \pi/4)$$
 (В),

$$I(t) = 1,2 \cos(314t - \pi/4)$$
 (А).

**Задача 12.4.2.** Определить полное сопротивление цепи  $Z_0$  и тангенс сдвига фаз  $\operatorname{tg} \phi$  между напряжением источника переменного

тока (частота  $\omega$ ) и полным током в цепи, если резистор  $R$  и катушка индуктивности  $L$  подключены к источнику параллельно.

$$\text{Ответ: } Z_0 = \frac{R}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \operatorname{tg} \varphi = + \frac{\omega L}{R};$$

**Задача 12.4.3.** Катушка с сопротивлением 10 Ом и индуктивностью  $L$  включена в цепь переменного тока с частотой 50 Гц. Определить индуктивность катушки, если известно, что сдвиг фаз между током и напряжением равен  $60^\circ$ .

$$\text{Ответ: } L = 0,055 \text{ Гн.}$$

**Задача 12.4.4.** Индуктивность  $L = 0,0184$  Гн и резистор  $R$  соединены параллельно и включены в цепь переменного тока частотой 50 Гц. Найти величину  $R$ , если известно, что сдвиг фаз между током и напряжением равен  $60^\circ$ .

$$\text{Ответ: } R = 10 \text{ Ом.}$$

**Задача 12.4.5.** Конденсатор с емкостью 1 мкФ и резистор с сопротивлением 1000 Ом включены в цепь переменного тока (частота 50 Гц). Найти полное сопротивление цепи, если конденсатор и резистор включены:

1) последовательно; 2) параллельно.

$$\text{Ответ: } 1) Z_0 = 3340 \text{ Ом; } 2) Z_0 = 954 \text{ Ом.}$$

**Задача 12.4.6.** Имеются две цепи. В первой генератор переменного напряжения, индуктивность  $L$  и резистор  $R$  соединены последовательно. Во второй – источник переменного напряжения с той же частотой, конденсатор (емкость –  $C$ ) и резистор  $R$  соединены параллельно. При каком соотношении между  $L$ ,  $C$  и  $R$  сдвиг фаз между током и напряжением генератора в обоих случаях будет одинаков по абсолютной величине?

$$\text{Ответ: } L = CR^2.$$

**Задача 12.4.7.** Источник переменного напряжения ( $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ ,  $\mathcal{E}_0 = 200$  В), конденсатор и резистор ( $R = 50$  Ом) соединены в последовательную цепь. Определить разность фаз между током и напряжением источника, если амплитуда тока в цепи равна 2 А.

$$\text{Ответ: } \text{Ток отстает на угол } \varphi = 60^\circ.$$



**Задача 12.4.8.** Резистор  $R$  и индуктивность  $L$  соединены параллельно и включены в цепь переменного тока с эффективным напряжением  $\mathcal{E} = 400$  В и частотой  $\nu = 50$  Гц.

Найти сопротивление  $R$  и индуктивность  $L$ , если известно, что мощность  $P$ , поглощаемая в этой цепи, равна 400 Вт. Сдвиг фаз между током и ЭДС источника равен  $45^\circ$ .

**Ответ:** 1)  $R = \frac{\mathcal{E}^2}{P} = 400$  Ом. 2)  $L = \frac{R}{2\pi\nu \operatorname{tg} \varphi} = 1,27$  Гн.

**Задача 12.4.9.** В цепь переменного тока с эффективным напряжением  $\mathcal{E} = 200$  В и частотой 50 Гц включена катушка, обладающая как индуктивностью, так и активным сопротивлением. Сдвиг фаз между током и напряжением равен  $15^\circ$ . Определить индуктивность катушки, если известно, что она поглощает мощность  $P = 400$  Вт.

**Ответ:**  $L = \frac{\mathcal{E}^2}{2\omega P} \sin 2\varphi = 0,08$  Гн.

**Задача 12.4.10.** Последовательный  $RLC$  контур ( $R = 100$  Ом,  $L = 1$  Гн,  $C = 1$  мкФ) подключён к генератору переменного напряжения (частота  $\nu = 50$  Гц). Найти сдвиг фаз между током и напряжением на концах всей цепи.

**Ответ:**  $\varphi = 88^\circ$ . Ток опережает по фазе напряжение.

**Задача 12.4.11.** В последовательный контур включён генератор переменного напряжения с амплитудой 1,5 В. Амплитуда напряжения на конденсаторе при резонансе равна 30 В. Определить добротность контура.

**Ответ:**  $Q = 20$ .

**Задача 12.4.12.** Определить добротность  $Q$  последовательного  $rLC$  контура ( $r = 10$  Ом,  $C = 1000$  пФ), если его резонансная частота  $\nu_p = 159,2$  кГц.

**Ответ:**  $Q = \frac{1}{2\pi\nu_p RC} = 100$ .

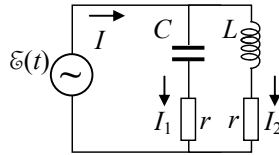
**Задача 12.4.13.** Определить ёмкость  $C$ , которую надо включить последовательно с катушкой (активное сопротивление  $r = 10$  Ом, индуктивность  $L = 3,185$  мГн), для того, чтобы цепь была настроена в резонанс при частоте  $\nu_0 = 50$  кГц. Найти добротность контура  $Q$  и напряжение на конденсаторе  $U_C$  при резонансе, если к контуру приложено напряжение с амплитудой  $E_0 = 1$  В.

**Ответ:**  $C = 3185$  пФ,  $Q = 100$ ,  $U_C = 100$  В.

**Задача 12.4.14.** В последовательном  $rLC$  контуре при частоте генератора  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ( $\omega_2 > \omega_1$ ) амплитуды силы тока оказались равными и в  $n$  раз меньше амплитуды тока при резонансе. Найти добротность  $Q$  этого контура.

**Ответ:**  $Q = \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{\omega_2 - \omega_1} \sqrt{n^2 - 1}$ .

**Задача 12.4.15.** Схема цепи, в которой может наблюдаться резонанс токов, представлена на *рис. 12.15*. Здесь  $\xi(t) = \xi_0 \cos \omega t$ ,  $\xi_0 = 100$  В. Параметры этого параллельного контура равны:  $r = 5$  Ом,  $L = 100$  мкГн,  $C = 100$  пФ.



*Рис. 12.15.* Электрическая схема цепи к задаче 12.4.15

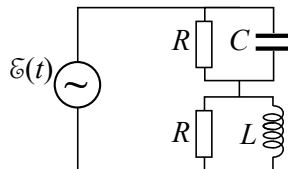
1) Найти резонансную частоту  $\Omega_p$ , добротность  $Q$  и полное сопротивление  $Z_0$  при резонансе.

2) Рассчитать амплитуды токов  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  при резонансе.

**Ответ:** 1)  $\Omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^7 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ ;  $Q = \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{L}{C}} = 100$ ;

$Z_0 = 2rQ^2 = 10^5$  Ом.

**Задача 12.4.16.** 1) Покажите, что ток  $I$  в цепи, изображённой на *рис. 12.16*, не зависит от частоты  $\omega$ , если  $R$ ,  $L$  и  $C$  подобраны так, что  $RC = L/R$ .  $\xi(t) = \xi_0 \cos \omega t$ .



*Рис. 12.16.* Схема RLC-цепи к задаче 12.4.16

2). Какова разность фаз  $\varphi$  между напряжением на конденсаторе  $U_C$  и  $\xi(t)$

при  $RC = L/R$  ?

**Ответ:**  $\operatorname{tg} \varphi = -\omega RC = -\omega L/R$ .  $U_C$  отстает от  $\xi(t)$ .

**Задача 12.4.17.** Сдвиг фаз между напряжением  $\xi(t)$  генератора переменного напряжения и напряжением  $U_{AB}$  равен  $90^\circ$  (рис. 12.17).

1) При каких значениях  $R$ ,  $L$ ,  $\omega$  это возможно?

2) Чему при этом будет равно отношение амплитуд  $U_{AB}$  и  $\xi$ ?

**Ответ:** 1)  $R = \omega L$ ; 2)  $\xi/U_{AB} = 3$ .

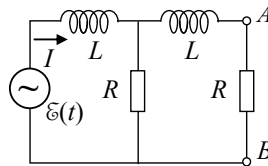


Рис. 12.17. Электрическая схема цепи к задаче 12.4.17

**Задача 12.4.18.** В схеме, изображенной на рис. 12.18, сдвиг фаз между ЭДС источника переменного напряжения ( $\xi = \xi_0 \cos \omega t$ ) и током через него равен нулю. Определить частоту колебаний  $\omega$ .

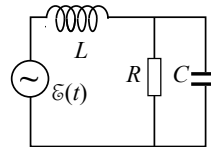


Рис. 12.18. Электрическая схема цепи к задаче 12.4.18

**Ответ:**  $\omega^2 = \frac{1}{LC} \left( \frac{L}{CR^2} - 1 \right)$ .

**Задача 12.4.19.** Найти среднюю по времени мощность, суммарно развиваемую всеми тремя источниками переменной ЭДС на частоте  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  (рис. 12.19).

ЭДС источников:

$\xi_1(t) = \xi_3(t) = \xi_0 \cos \omega t$ ;  $\xi_2(t) = \xi_0 \sin \omega t$ .

Стрелки у источников указывают положительное направление ЭДС.

**Ответ:**  $P = (\omega C U_0)^2 R$ .

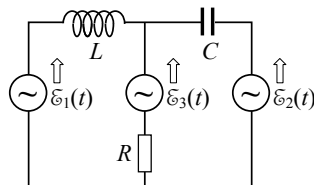


Рис. 12.19. Электрическая схема цепи к задаче 12.4.19

**Задача 12.4.20.** Покажите, что напряжение  $U_{AB}$  между точками  $A$  и  $B$  (рис. 12.20) равно нулю при одновременном выполнении следующих условий:  $(r_1/r_2) = (R_1/R_2) + (C_1/C_2)$ ;

**Ответ:**  $\omega = (R_1 R_2 C_1 C_2)^{-1/2}$ .

**Задача 12.4.21.** На вход схемы, изображённой на рис. 12.21, подается синусоидальная ЭДС (частота  $\omega$ , амплитуда  $\mathcal{E}_0$ ). Определить амплитуду и сдвиг фазы выходного напряжения между точками  $B$  и  $A$  ( $U_{BA} = \varphi_B - \varphi_A$ ) относительно фазы ЭДС в зависимости от величины сопротивления  $R$ .

**Ответ:**

1) Амплитуды входного и выходного напряжений совпадают.

2) Сдвиг фаз равен  $2\varphi$ , где  $\operatorname{tg} \varphi = \omega L/R$  ( $U_{BA}$  опережает ЭДС).

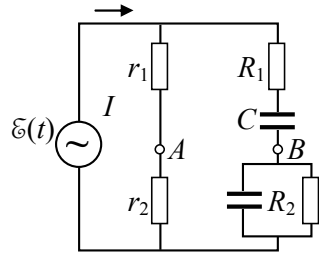


Рис. 12.20. Электрическая схема моста к задаче 12.4.20

выходного напряжения

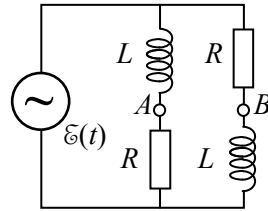


Рис. 12.21. Схема фазовращателя на основе  $RL$ -цепей (задача 12.4.21)

## Литература к главе 12

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм – М.: Оникс 21 век, 2005, §§ 48-51.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. – М., Физматлит, 2006, §§ 127-132, 137.
3. Калашиников С.Г. Электричество. – М.: Физматлит, 2003, §§217-228.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Физматлит, 2003, § 77-80.