Кинематика

Система отсчета

Механическое движение – перемещение материальных тел в пространстве.

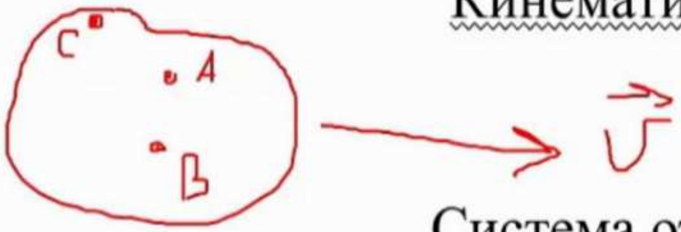
Материальная точка – тело, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

Абсолютно твердое тело – тело, не подверженное деформации (рассстояние м/у любой парой его точек не изменяется в процессе движения).

Любое движение твердого тела сводится к комбинации двух основных видов движения:

Поступательное – все точки тела движутся с одинаковыми скоростями по параллельным траекториям

Кинематика



Система отсчета

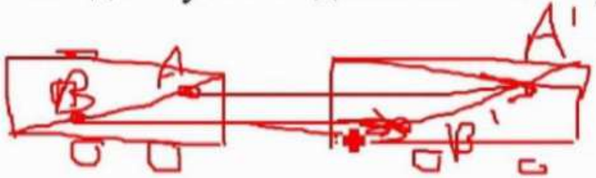
Механическое движение – перемещение материальных тел в пространстве.

Материальная точка – тело, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

Абсолютно твердое тело – тело, не подверженное деформации (рассстояние м/у любой парой его точек не изменяется в процессе движения).

Любое движение твердого тела сводится к комбинации двух основных видов движения:

Поступательное – все точки тела движутся с одинаковыми скоростями по параллельным траекториям



Вращательное – все точки тела вращаются по окружностям вокруг некоторой оси.

Если ориентация оси вращения изменяется во времени, вращение носит сложный характер.

Механическое движение относительно – состояние движения (или покоя) любого физического объекта определяется только по отношению к другим телам.

Тело отсчета (т.о.) – тело, относительно которого определяется движение физических объектов (т.о. – условно неподвижно)

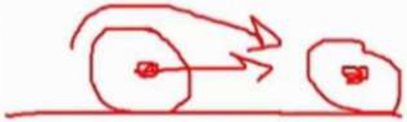
Часы– физическое устройство периодического действия, позволяющее отсчитывать промежутки времени м/у событиями.

Система координат (с.к.)– геометрическая система, позволяющая определять положение точек посредством задания трех переменных (координат).

Вращательное – все точки тела вращаются по окружностям вокруг некоторой оси.

закрепл.

Если ориентация оси вращения изменяется во времени, вращение носит сложный характер.



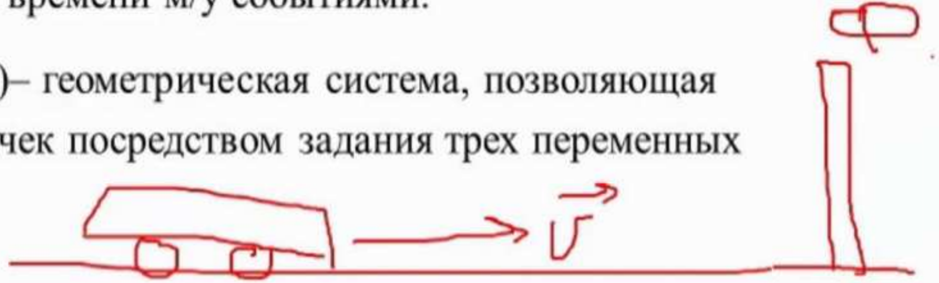
Механическое движение относительно – состояние движения (или покоя) любого физического объекта определяется только по отношению к другим телам.

Система отсчёта

1) *Тело отсчета* (т.о.) – тело, относительно которого определяется движение физических объектов (т.о. – условно неподвижно)

2) *Часы*– физическое устройство периодического действия, позволяющее отсчитывать промежутки времени м/у событиями.

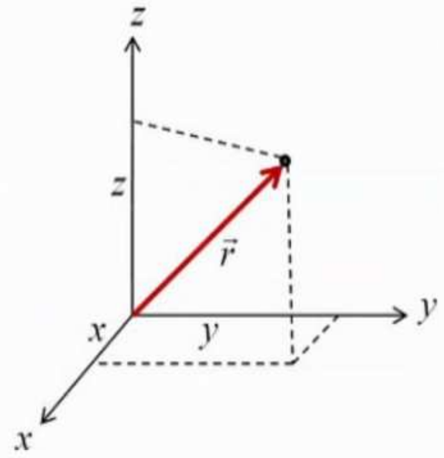
3) *Система координат* (с.к.)– геометрическая система, позволяющая определять положение точек посредством задания трех переменных (координат).



Совокупность тела отсчета и неподвижных относительно него часов и сист. координат образует *систему отсчета* (с.о.).

Декартова с.к.

Задаются три взаимно перпендикулярные пространственные оси



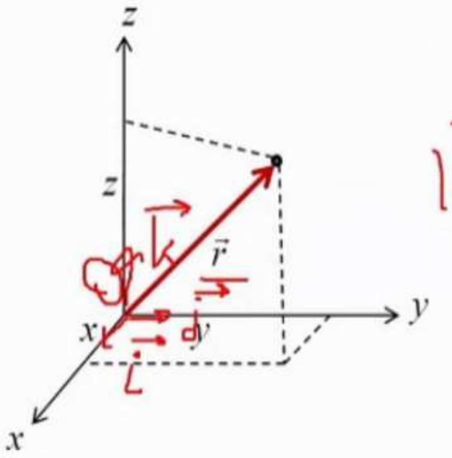
Положение каждой точки может быть определено радиус-вектором $\vec{r}$ (вектор, соединяющий начал координат с точкой) или тремя координатами – (проекциями радиус – вектора):

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

Совокупность тела отсчета и неподвижных относительно него часов и сист. координат образует *систему отсчета* (с.о.).

Декартова с.к.

Задаются три взаимно перпендикулярные пространственные оси



$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

Положение каждой точки может быть определено радиус-вектором $\vec{r}$ (вектор, соединяющий начал координат с точкой) или тремя координатами – (проекциями радиус – вектора):

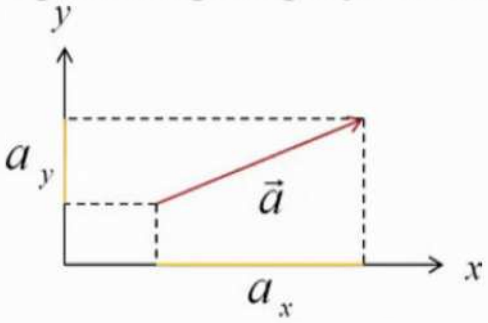
$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы, ориентированные вдоль координатных осей x,y,z (координатные орты)

Терминология : точка $\vec{r}$ - точка, задаваемая радиус вектором $\vec{r}$

Правила обращения с векторами

Вектор – отрезок, характеризующийся величиной и направлением



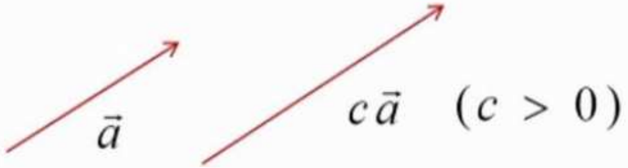
Величина (длина или модуль) вектора $a = |\vec{a}|$ - длина отрезка.

Проекция вектора на координатную ось – длина отрезка, образованного основаниями перпендикуляров, опущенных на ось из концов вектора.

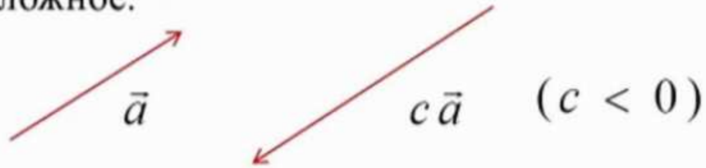
Проекция вектора на ось положительна, если вектор образует острый угол с положительным направлением оси, отрицательна – если угол тупой и равна нулю, если угол прямой.

Векторы можно умножать на число и складывать друг с другом.

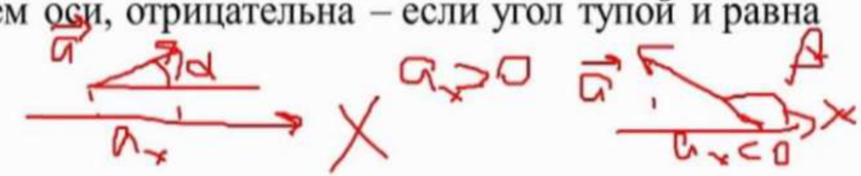
При умножении вектора на число изменяется его длина.



Если число *c* отрицательно, то вектор изменяет направление на противоположное:

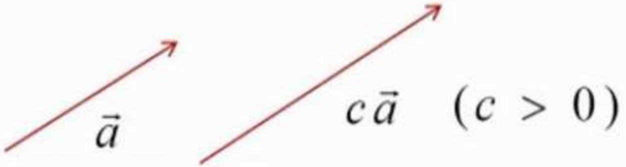


Проекция вектора на ось положительна, если вектор образует острый угол с положительным направлением оси, отрицательна – если угол тупой и равна нулю, если угол прямой.

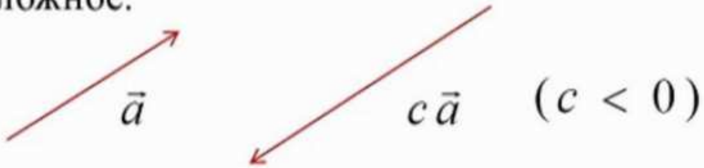


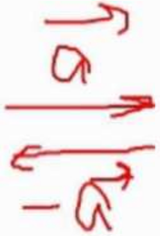
Векторы можно умножать на число и складывать друг с другом.

При умножении вектора на число изменяется его длина.



Если число *c* отрицательно, то вектор изменяет направление на противоположное:

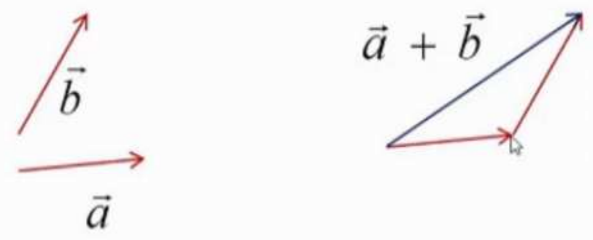




При умножении вектора на число каждая из его декартовых проекций умножается на это число:

$$c\vec{a} = \vec{i}ca_x + \vec{j}ca_y + \vec{k}ca_z$$

Складываются векторы по правилу треугольника или параллелограмма:



При сложении векторов складываются их одноименные проекции:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{i}(a_x + b_x) + \vec{j}(a_y + b_y) + \vec{k}(a_z + b_z)$$

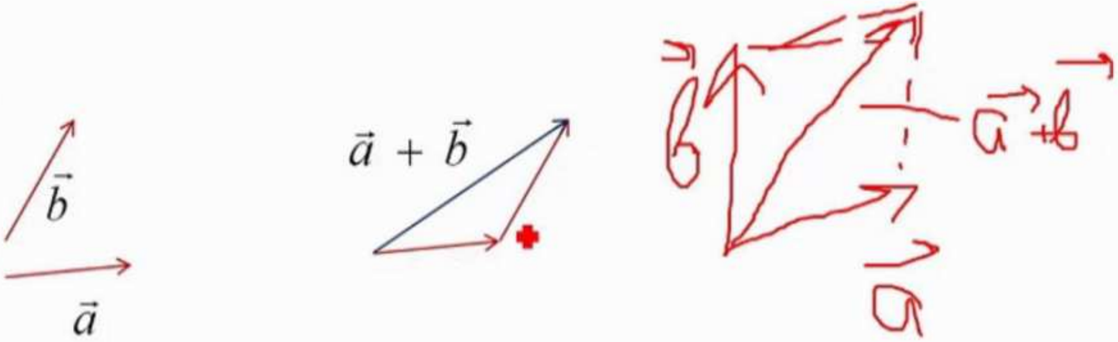
Предупреждение: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \neq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$

Векторы складываются по длине только если они параллельны.

При умножении вектора на число каждая из его декартовых проекций умножается на это число:

$$c\vec{a} = \vec{i}ca_x + \vec{j}ca_y + \vec{k}ca_z$$

Складываются векторы по правилу треугольника или параллелограмма:



При сложении векторов складываются их одноименные проекции:

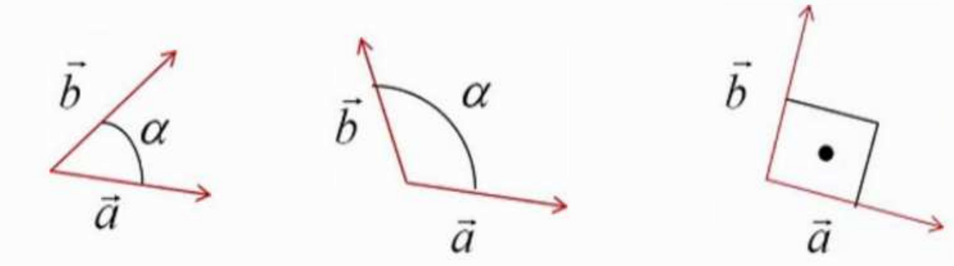
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{i}(a_x + b_x) + \vec{j}(a_y + b_y) + \vec{k}(a_z + b_z)$$

Предупреждение: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \neq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$

Векторы складываются по длине только если они параллельны.

Скалярное произведение векторов – число (скаляр), равное произведению модулей векторов на косинус угла м/у ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha$$



$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ $\qquad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ $\qquad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Скалярное произведение положительно, если векторы составляют острый угол и отрицательно, если угол – тупой. Скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов равно нулю.

Кинематика материальной точки (поступательное движение)

При движении мат. точки изменяется ее радиус- вектор. Если положение м.т. в каждый момент времени известно, то говорят, что задан *кинематический закон движения*:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Движение точки в трехмерном пространстве закон движения в векторной форме эквивалентен трем скалярным законам для каждой из координат точки:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

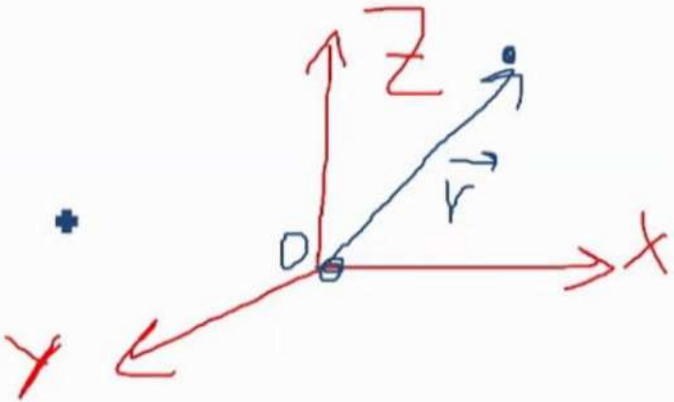
Кинематика материальной точки (поступательное движение)

При движении мат. точки изменяется ее радиус- вектор. Если положение м.т. в каждый момент времени известно, то говорят, что задан *кинематический закон движения*:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Движение точки в трехмерном пространстве закон движения в векторной форме эквивалентен трем скалярным законам для каждой из координат точки:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \; \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

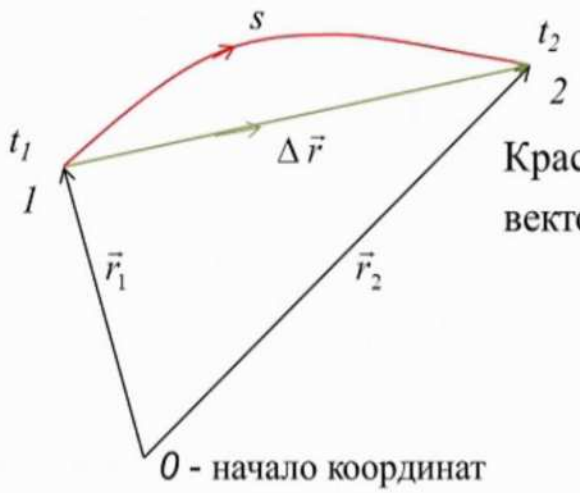


Траектория движения – воображаемая линия, которую описывает точка в процессе движения.

Перемещение– вектор, соединяющий начальную и конечную точки траектории.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

Пройденный путь – скалярная положительная величина, равная длине траектории.



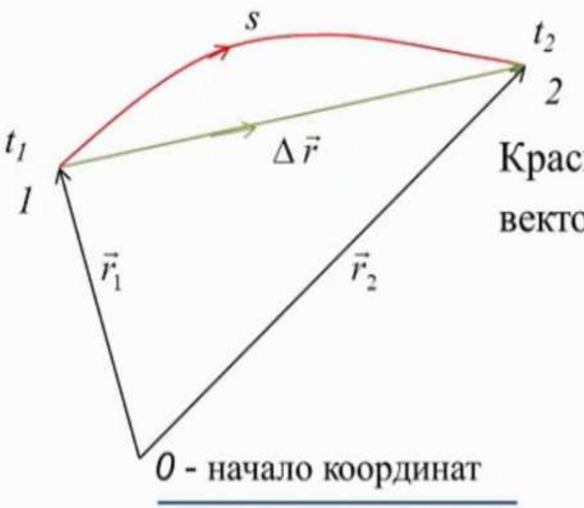
Красная линия – траектория, зеленый вектор - перемещение.

Траектория движения – воображаемая линия, которую описывает точка в процессе движения.

Перемещение– вектор, соединяющий начальную и конечную точки траектории.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}\,(t_2) - \vec{r}\,(t_1)$$

Пройденный путь – скалярная положительная величина, равная длине траектории.



Красная линия – траектория, зеленый вектор - перемещение.

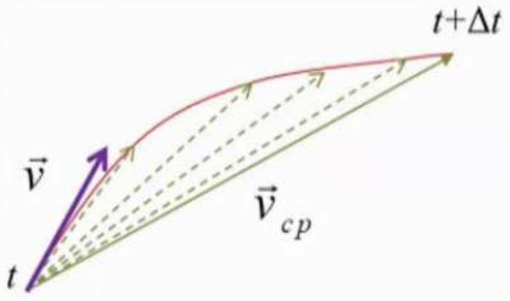
$$|\Delta \vec{r}\,| \leq S$$

Скорость

Отношение перемещения точки к интервалу времени $\Delta t = t_2 - t_1$, в течение которого это перемещение совершилось, называется *средней скоростью* движения:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Скорость по направлению совпадает с перемещением!



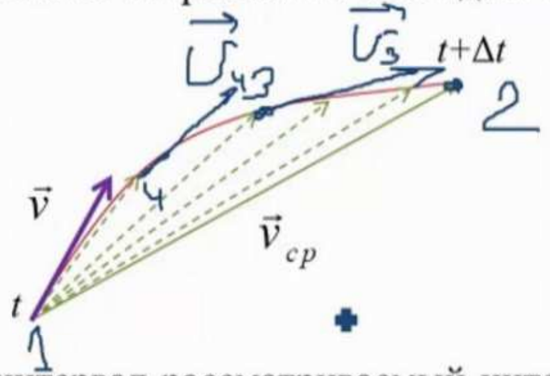
Если интервал рассматриваемый интервал времени движения Δt уменьшать, вектор средней скорости может изменяться как по величине, так и по направлению. При $\Delta t \to 0$ $\vec{v}_{cp}$ перестает изменяться по величине и занимает положение касательной к траектории.

Скорость

Отношение перемещения точки к интервалу времени $\Delta t = t_2 - t_1$, в течение которого это перемещение совершилось, называется *средней скоростью* движения:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Скорость по направлению совпадает с перемещением!



Если интервал рассматриваемый интервал времени движения Δt уменьшать, вектор средней скорости может изменяться как по величине, так и по направлению. При $\Delta t \to 0$ $\vec{v}_{cp}$ перестает изменяться по величине и занимает положение касательной к траектории.

Предел отношения перемещения к интервалу времени, в течение которого это перемещение происходит, называется *мгновенной скоростью:*

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

В математике такой предел называют производной – мгновенная скорость есть производная перемещения по времени.

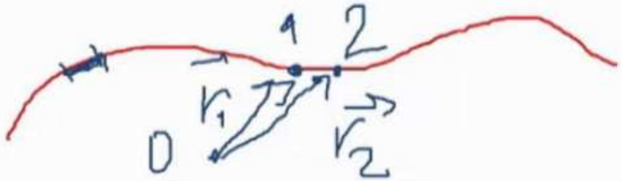
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Величину $d\vec{r}$ следует рассматривать как бесконечно малое перемещение за бесконечно малое время:

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

Предел отношения перемещения к интервалу времени, в течение которого это перемещение происходит, называется *мгновенной скоростью:*

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



В математике такой предел называют производной – мгновенная скорость есть производная перемещения по времени.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Величину $d\vec{r}$ следует рассматривать как бесконечно малое перемещение за бесконечно малое время:

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

dx

dy

Векторное определение скорости эквивалентно трем скалярным:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} : \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

x,y,z – переменные координаты точки; dx,dy,dz – проекции вектора перемещения $d\vec{r}$ на декартовы оси; v_x, v_y, v_z - проекции скорости.

Модуль скорости определяет путь, проходимый телом в единицу времени:

$$v = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$$

Векторное определение скорости эквивалентно трем скалярным:

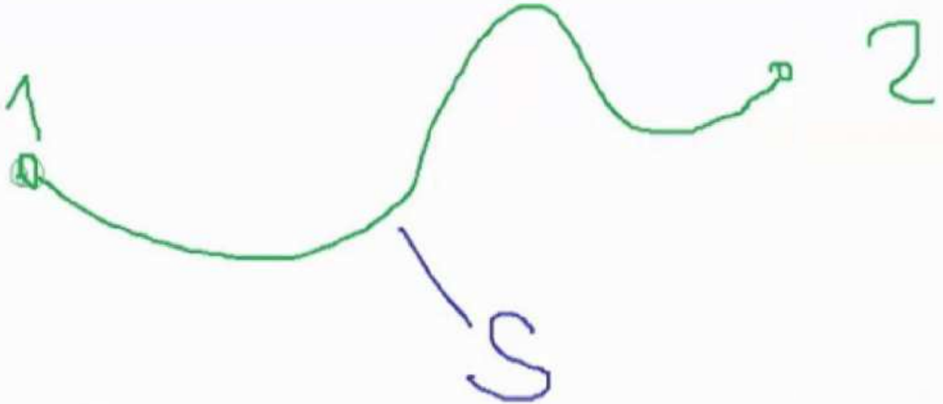
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} : \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

x,y,z – переменные координаты точки; *dx,dy,dz* – проекции вектора перемещения $d\vec{r}$ на декартовы оси; v_x, v_y, v_z - проекции скорости.

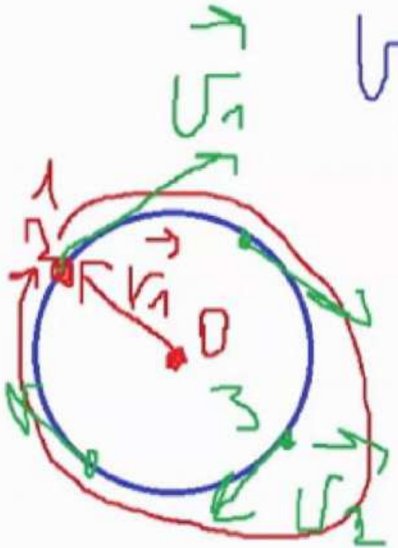
Модуль скорости определяет путь, проходимый телом в единицу времени:

$$v = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$$

Средняя путевая скорость



путь - длина траектории



$$v_{ср.п.} = \frac{S}{\Delta t}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

т.2 = т.1

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 0$$

$ds = v\,dt$ - путь, пройденный за время *dt*

Если скорость не изменяется по величине $v = |\vec{v}| = const$, то движение является *равномерным* (за равные промежутки времени тело проходит одинаковые расстояния)

Если не изменяется направление скорости (или изменяется на противополож-ное) -движение *прямолинейно.*

Движение с постоянным вектором скорости является равномерным и прямолинейным.

<u>Ускорение</u> – скорость изменения скорости:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$d\vec{v} = \vec{a}\,dt$ - приращение скорости за время *dt*

Ускорение отлично от нуля, если скорость изменяется по величине или по направлению.

$ds = v\,dt$ - путь, пройденный за время dt

Если скорость не изменяется по величине $v = |\vec{v}| = const$, то движение является *равномерным* (за равные промежутки времени тело проходит одинаковые расстояния)

Если не изменяется направление скорости (или изменяется на противоположное) -движение *прямолинейно.*

Движение с постоянным вектором скорости является равномерным и прямолинейным.

Ускорение – скорость изменения скорости:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

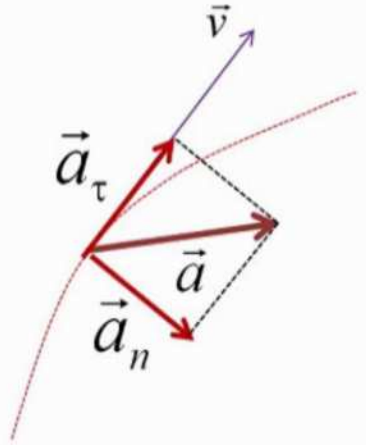
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$d\vec{v} = \vec{a}\,dt$ - приращение скорости за время dt

- Ускорение отлично от нуля, если скорость изменяется по величине или по направлению.

Проекция вектора ускорения на направление скорости называется *тангенциальным* ускорением, а на направление, перпендикулярное скорости, - *нормальным* ускорением.

Примером последнего является центростремительное ускорение (при движении по окружности).



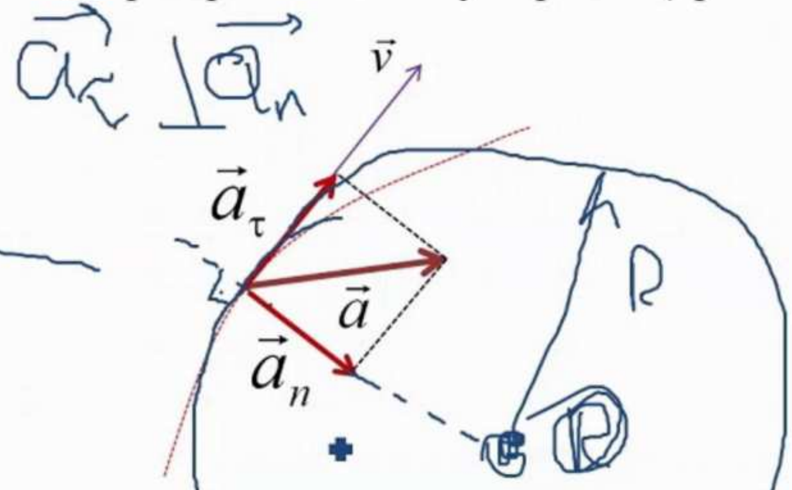
Тангенциальное ускорение a_τ обуславливает изменение модуля скорости :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

Если $a_\tau > 0$ скорость увеличивается, если $a_\tau < 0$ - уменьшается.

Проекция вектора ускорения на направление скорости называется *тангенциальным* ускорением, а на направление, перпендикулярное скорости, - *нормальным* ускорением.

Примером последнего является центростремительное ускорение (при движении по окружности).



Тангенциальное ускорение a_τ обуславливает изменение модуля скорости :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

Если $a_\tau > 0$ скорость увеличивается, если $a_\tau < 0$ - уменьшается.

Нормальное ускорение a_n обуславливает изменение направления движения и приводит к искривлению траектории.

Траекторию движения тела в достаточно малой окрестности каждой точки можно заменить (аппроксимировать) дугой окружности с некоторым радиусом R. Тогда нормальное ускорение становится центростремительным:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

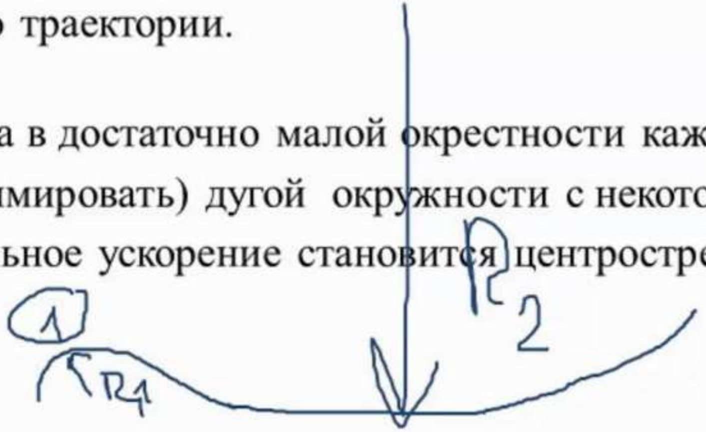
Радиус окружности, аппроксимирующей траекторию движения вблизи данной точки называют *радиусом кривизны* траектории.

$$R = \frac{v^2}{a_n}$$

Если траектория движения отличается от окружности или прямой, радиус кривизны – переменная величина (меняется от точки к точке)

Нормальное ускорение a_n обуславливает изменение направления движения и приводит к искривлению траектории.

Траекторию движения тела в достаточно малой окрестности каждой точки можно заменить (аппроксимировать) дугой окружности с некоторым радиусом R. Тогда нормальное ускорение становится центростремительным:



$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Радиус окружности, аппроксимирующей траекторию движения вблизи данной точки называют *радиусом кривизны* траектории.

$$R = \frac{v^2}{a_n}$$

Если траектория движения отличается от окружности или прямой, радиус кривизны – переменная величина (меняется от точки к точке)

Динамика материальной точки

(поступательное движение)

Принцип относительности

Инерциальные системы отсчета

Законы движения одного и того же тела выглядят по разному в разных системах отсчета.

В динамике выделяется целый класс систем отсчета, в которых законы движения имеют наиболее простой характер.

Инерциальные системы отсчета (ИСО) – такие с.о., в которых пространство и время однородны, и трехмерное пространство обладает свойством изотропности.

Однородность пространства и времени – равноправие всех простр. точек и всех моментов времени.

Изотропность – равноправие всех направлений в простр-е.

В ИСО выполняется *Закон инерции Галлилея:*

всякое движущееся тело стремится продолжать свое движение по прямой с постоянной скоростью.

Все свободные тела движутся равномерно и прямолинейно.

Всякая система отсчёта, движущаяся относительно ИСО равномерно, прямолинейно и без вращения, также является ИСО.

Принцип относительности: все ИСО равноправны, и все законы физики инвариантны относительно перехода из одной ИСО в другую. Проявления законов физики выглядят одинаково, и записи этих законов имеют одинаковую форму в разных ИСО.

Однородность пространства и времени – равноправие всех простр. точек и всех моментов времени.

Изотропность – равноправие всех направлений в простр-е.

В ИСО выполняется *Закон инерции Галлилея:*

всякое движущееся тело стремится продолжать свое движение по прямой с постоянной скоростью.

Все свободные тела движутся равномерно и прямолинейно.

Всякая система отсчёта, движущаяся относительно ИСО равномерно, прямолинейно и без вращения, также является ИСО.

Принцип относительности: все ИСО равноправны, и все законы физики инвариантны относительно перехода из одной ИСО в другую. Проявления законов физики выглядят одинаково, и записи этих законов имеют одинаковую форму в разных ИСО.

Законы Ньютона

I закон (закон инерции):

Свободное тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения (не испытывает ускорения).

Свободное тело конечных размеров – *замкнутая система* мат. точек.

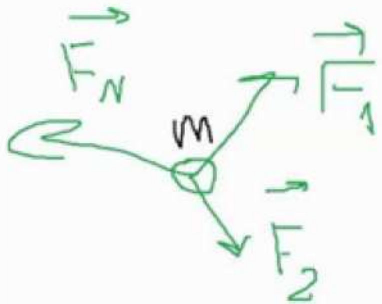
Система тел замкнута, если на тела не действуют внешние силы.

В пределах компактного объема, заключающего замкнутую систему мат. точек, ∃ геометрич. точка (центр инерции, центр масс), движению которой можно сопоставить постоянную по величине и направлению скорость ($\vec{v}_C$).

Рассмотрим сист. из 2 мат. точ. $\vec{r}_1, \vec{r}_2$

Центр инерции – на отрезке, соединяющем точки.

2-й закон Ньютона



$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N \; -$$

равнодействующая сил, приложенных к телу

масса - мера инертности

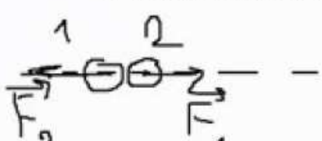
$$m\vec{v} = \vec{p} \text{ - импульс}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}}$$

Если m=const

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\cdot\vec{v})}{dt} = m\cdot\vec{a} \qquad \boxed{\sum \vec{F} = m\cdot\vec{a}}$$

3-й закон Ньютона



$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

Закон сохранения импульса.

Движение центра масс

Рассмотрим систему из N матер. точек.

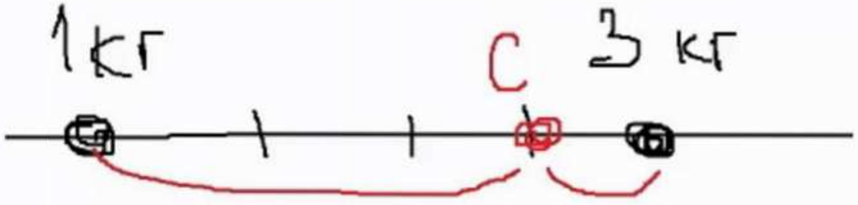
Центр масс (инерции) системы – геометрич. точка с радиус-вектором:

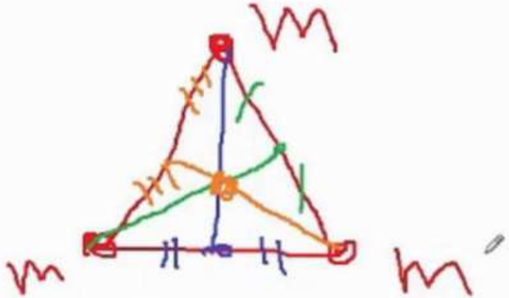
$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

m_i – масса i-ой мат. точки, $\vec{r}_i$ – ее радиус-вектор.

$M = \sum m_i$ – полная масса системы

$$M\vec{r}_C = \sum m_i\vec{r}_i$$


1кг
C
3 кг


m
m
m

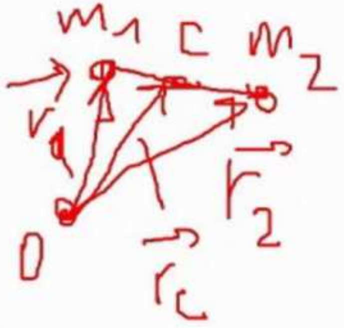
Закон сохранения импульса.

Движение центра масс

Рассмотрим систему из N матер. точек.

Центр масс (инерции) системы – геометрич. точка с радиус-вектором:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}$$



m_i – масса i-ой мат. точки, $\vec{r}_i$ – ее радиус-вектор.

$$M = \sum m_i \quad \text{– полная масса системы}$$

$$M\vec{r}_C = \sum m_i\vec{r}_i$$

Дифференцируем по времени:

$$M\vec{V}_C = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i$$

$$\vec{V}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt}$$ – скорость центра масс

Произведение $M\vec{V}_C$ называется импульсом системы.

$$M\vec{V}_C = \vec{P} = \sum \vec{p}_i$$

Импульс системы тел равен векторной сумме импульсов каждого тела в отдельности.

Дифференцируем по времени:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_C = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$ ($\vec{a}_C$ – ускорение ц.м.)

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$$ – равнодействующая для *i*- ой мат. точки

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_i$$

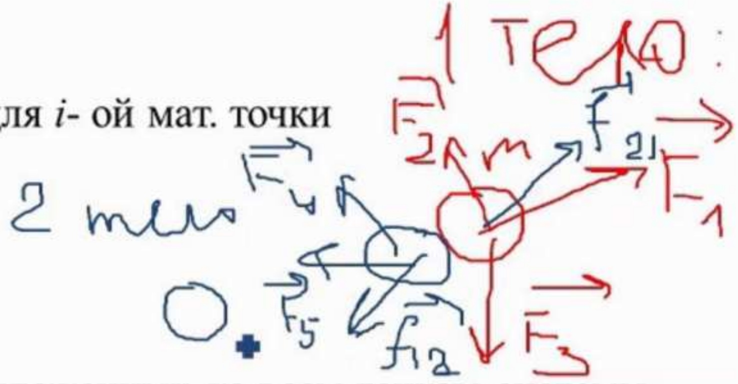
В правой части – сумма всех сил, приложенных ко всем точкам системы.

$$\sum \vec{F}_i = \underbrace{\sum \vec{F}^{(\text{внут})}}_{\text{Сумма всех внутренних сил}} + \underbrace{\sum \vec{F}^{(\text{внеш})}}_{\text{Сумма всех внешних сил}}$$

Внутренние силы – силы взаимодействия м/у телами системы

Внешние силы – силы, действующие на тела системы извне.

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$$ – равнодействующая для *i*- ой мат. точки



$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_i$$

В правой части – сумма всех сил, приложенных ко всем точкам системы.

$$\sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}^{(\text{внут})} + \sum \vec{F}^{(\text{внеш})}$$

Сумма всех внутренних сил

Сумма всех внешних сил

Внутренние силы – силы взаимодействия м/у телами системы

Внешние силы – силы, действующие на тела системы извне.

В силу III закона Ньютона внутренние силы при суммировании попарно компенсируются:

$$\sum \vec{F}^{(\text{внут})} = 0$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_C = \sum \vec{F}^{(\text{внеш})}$$

Центр масс системы тел движется как материальная точка с массой, равной суммарной массе системы, под действием всех внешних сил, приложенных ко *всем* телам системы.

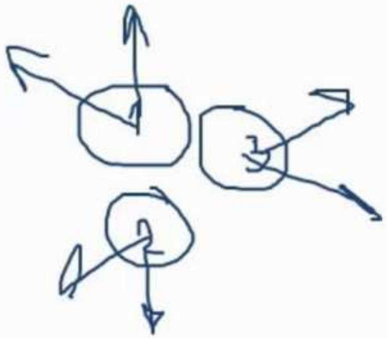
<u>Сохранение импульса</u>

Система тел называется *замкнутой*, если внешние силы отсутствуют, либо их действие скомпенсировано:

$$\sum \vec{F}^{(\text{внеш})} = 0$$

В силу III закона Ньютона внутренние силы при суммировании попарно компенсируются:

$$\sum \vec{F}^{(\text{внут})} = 0$$



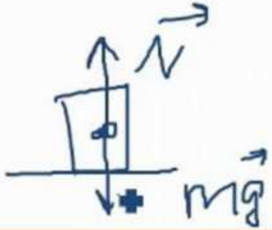
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_C = \sum \vec{F}^{(\text{внеш})}$$

Центр масс системы тел движется как материальная точка с массой, равной суммарной массе системы, под действием всех внешних сил, приложенных ко *всем* телам системы.

Сохранение импульса

Система тел называется *замкнутой*, если внешние силы отсутствуют, либо их действие скомпенсировано:

$$\sum \vec{F}^{(\text{внеш})} = 0$$



Тогда

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

Полный импульс замкнутой системы тел остается неизменным во времени:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

(сумма по всем телам системы)

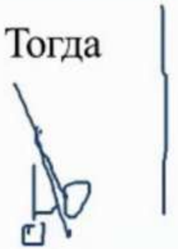
Уравнение движения ц.м. справедливо для ∀ проекции:

$$\frac{dP_x}{dt} = \sum F_x^{(\text{внеш})}$$

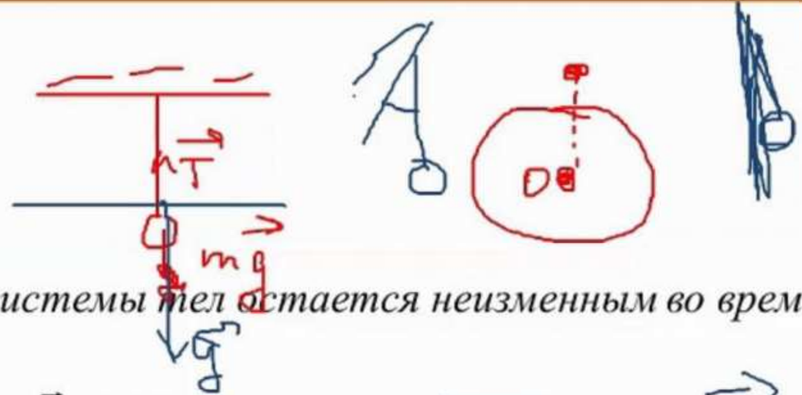
Если суммарная проекция всех внешних сил на некоторую ось обращается в 0, то сохраняется проекция полного импульса системы на эту ось:

$$\sum F_x^{(\text{внеш})} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_x = \sum p_{ix} = \sum m_i v_{ix} = \text{const}$$

Тогда

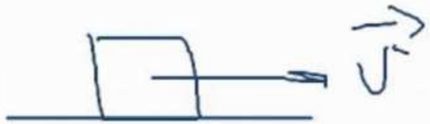


$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$



Полный импульс замкнутой системы тел остается неизменным во времени:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

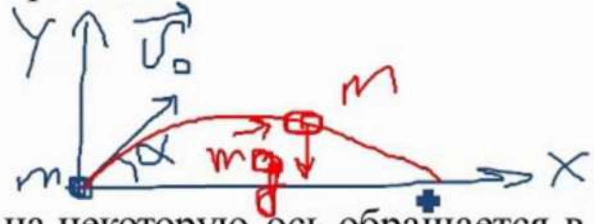


(сумма по всем телам системы)

$m\vec{v} = \vec{p}$

Уравнение движения ц.м. справедливо для ∀ проекции:

$$\frac{dP_x}{dt} = \sum F_x^{(\text{внеш})}$$



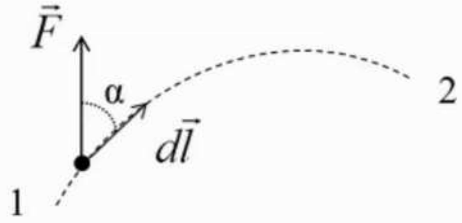
Если суммарная проекция всех внешних сил на некоторую ось обращается в 0, то сохраняется проекция полного импульса системы на эту ось:

$$\sum F_x^{(\text{внеш})} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_x = \sum p_{ix} = \sum m_i v_{ix} = \text{const}$$

Работа и механическая энергия

Работа силы

Рассмотрим б/малое (элементарное) перемещение $d\vec{l}$ м .т. под действием силы $\vec{F}$:



Работой силы по элементарному перемещению называется скалярная величина:

$$dA = F \cdot dl \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

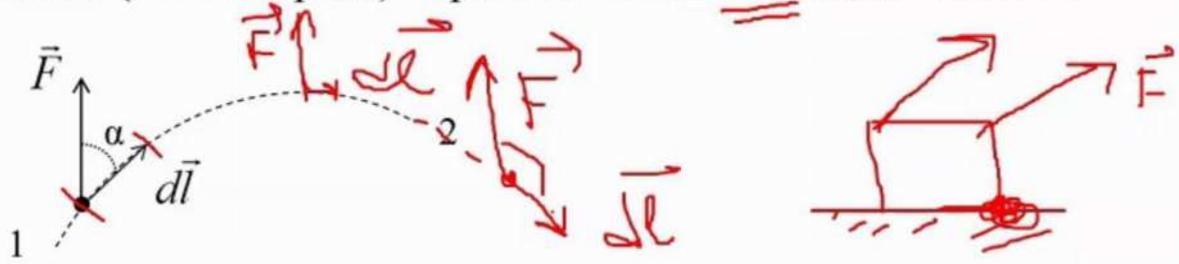
(скалярное произведение)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$$

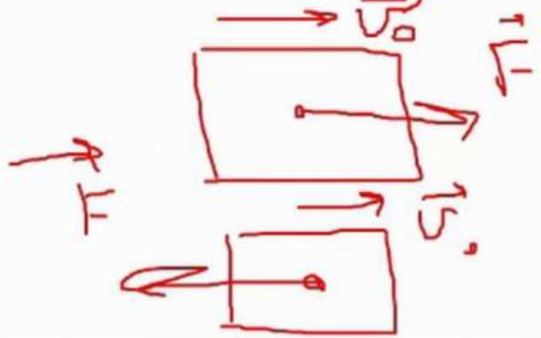
Работа и механическая энергия

Работа силы

Рассмотрим б/малое (элементарное) перемещение $d\vec{l}$ м .т. под действием силы $\vec{F}$:



Работой силы по элементарному перемещению называется скалярная величина:



$$dA = F \cdot dl \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

(скалярное произведение)

$$dA > 0 \quad \text{если } \alpha < \pi/2$$ (α – острый)

$$dA < 0 \quad \text{если } \alpha > \pi/2$$ (α – тупой)

$$dA = 0 \quad \text{если } \alpha = \pi/2$$ (α – прямой)

Работа *силы над телом*, совершающим конечное перемещение 1→2:

$$A = \int dA = \int_1^2 F \cdot dl \cdot \cos\alpha = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Если $\vec{F}$ – равнодействующая: $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$

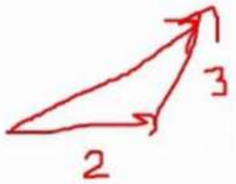
то

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{l} = \sum \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{l} = \sum A_i$$

$$dA > 0 \quad \text{если } \alpha < \pi/2 \qquad (\alpha - \text{острый})$$

2 + 3 = 5

$$dA < 0 \quad \text{если } \alpha > \pi/2 \qquad (\alpha - \text{тупой})$$



$$dA = 0 \quad \text{если } \alpha = \pi/2 \qquad (\alpha - \text{прямой})$$

Работа *силы над телом*, совершающим конечное перемещение 1→2:

$$A = \int dA = \int_1^2 F \cdot dl \cdot \cos\alpha = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Если $\vec{F}$ – равнодействующая: $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$

то

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{l} = \sum \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{l} = \sum A_i$$

Работа нескольких сил равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой силой в отдельности.

Мощностью силы называется работа в единицу времени

$$P = \frac{dA}{dt}$$

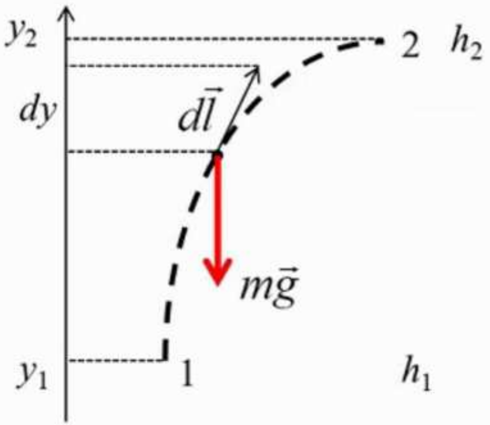
$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v}$$ – мгновенная скорость м.т.

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Работа силы тяжести

Ось y (ось высоты h) – вертикально вверх.



На участке $d\vec{l}$:

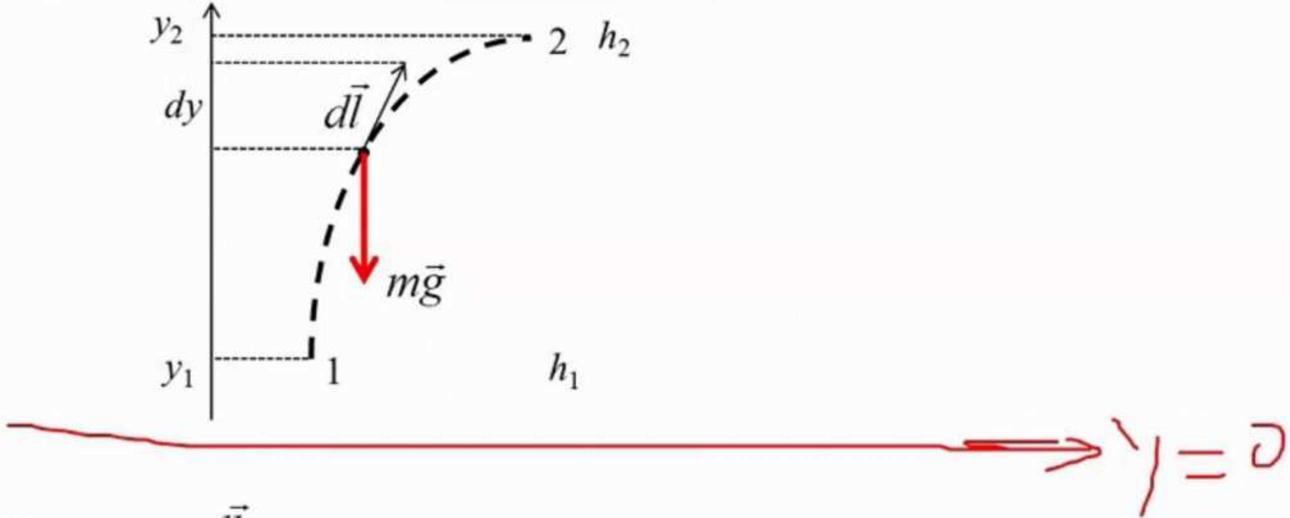
$$dA = m\vec{g} \cdot d\vec{l} = mg_y dy = -mgdy$$

Работа по перемещению вдоль конечной траектории:

$$A_{12} = -mg\Delta y = mg(y_1 - y_2)$$

Работа силы тяжести

Ось y (ось высоты h) – вертикально вверх.



На участке $d\vec{l}$:

$$dA = m\vec{g}\cdot d\vec{l} = mg_y dy = -mgdy$$

Работа по перемещению вдоль конечной траектории:

$$A_{12} = -mg\Delta y = mg(y_1 - y_2)$$

$A_{12} > 0$ если $y_1 < y_2$ (тело опускается)

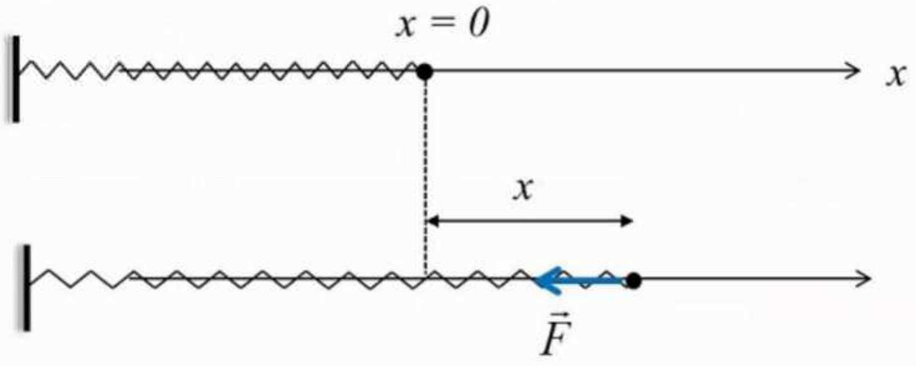
$A_{12} < 0$ если $y_1 > y_2$ (тело поднимается)

Мощность силы тяжести:

$$P = -mgv_y$$

(v_y – вертикальная проекция скорости)

Работа упругой силы



$x = 0$ – положение равновесия

$x > 0$ – пружина растянута

$x < 0$ – пружина сжата

$$F_x = -kx$$

При элементарном перемещении dx:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F_x dx = -kx dx$$

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x \;\Rightarrow\; 2xdx = dx^2$$

$$dA = -kxdx = -\frac{1}{2}kd(x^2)$$

При конечном перемещении $x_1 \rightarrow x_2$:

$$A_{12} = -\frac{1}{2}k\Delta(x^2) = \frac{k(x_1^2 - x_2^2)}{2}$$

Работа упругой силы положительна если $|x_1| > |x_2|$ (деформация уменьшается).

Работа силы трения

Сила трения покоя работы не совершает, т.к. трущиеся поверхности остаются в состоянии относительного покоя.

Сила трения скольжения всегда направлена против перемещения:

$$\vec{F}_{\text{тр}} \cdot d\vec{l} = -F_{\text{тр}} dl = -\mu N dS \qquad (\alpha = \pi)$$

dS – величина вектора перемещения

Если $N = \text{const}$, то на конечном отрезке

$$A_{\text{тр}} = -\mu N S$$

(S – пройденный путь)

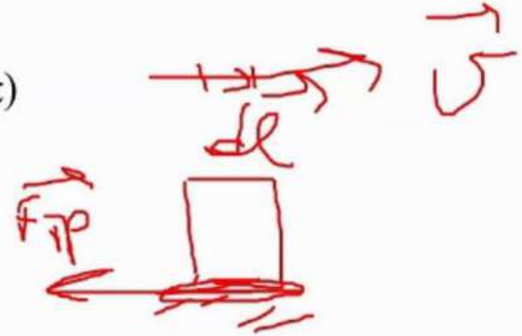
Силы, полная работа которых всегда отрицательна, называются *диссипативными*.

Работа силы трения

Сила трения покоя работы не совершает, т.к. трущиеся поверхности остаются в состоянии относительного покоя.

Сила трения скольжения всегда направлена против перемещения:

$$\vec{F}_{\text{тр}} \cdot d\vec{l} = -F_{\text{тр}} dl = -\mu N dS \qquad (\alpha = \pi)$$



dS – величина вектора перемещения

Если $N = \text{const}$, то на конечном отрезке

$$A_{\text{тр}} = -\mu N S$$

(S – пройденный путь)

Силы, полная работа которых всегда отрицательна, называются *диссипативными*.

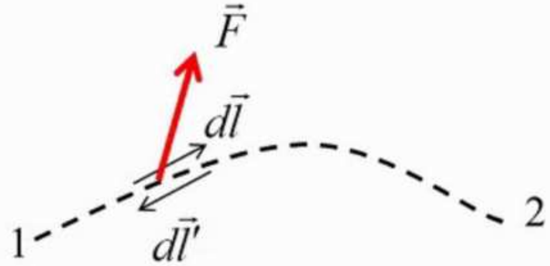
Потенциальная энергия

Сила, действующая на мат. точку называется *консервативной* или *потенциальной,* если

1. Величина и направление силы зависит только от мгновенного положения м.т. в пространстве

2. Работа силы по перемещению м.т. зависит только от положения нач. и конечной точек траектории движения и не зависит от ее формы.

При движении по одной и той же траектории $A_{12} = A_{21}$:



$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = -\vec{F} \cdot d\vec{l}'$$

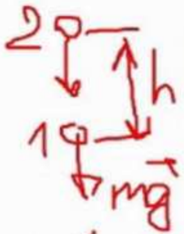
Из условия 2 следует, что работа консервативной силы по любой замкнутой траектории равна 0.

Потенциальная энергия

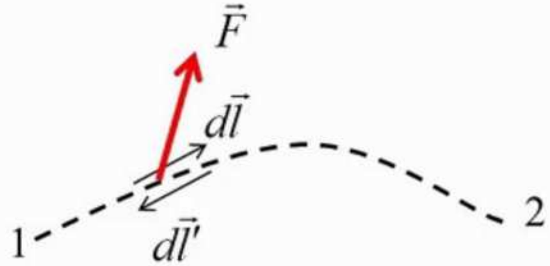
Сила, действующая на мат. точку называется *консервативной* или *потенциальной,* если

1. Величина и направление силы зависит только от мгновенного положения м.т. в пространстве

2. Работа силы по перемещению м.т. зависит только от положения нач. и конечной точек траектории движения и не зависит от ее формы.



При движении по одной и той же траектории $A_{12} = A_{21}$:



$$\vec F \cdot d\vec l = -\vec F \cdot d\vec l'$$

$A_{1\to 2} < 0$
$= -mgh$

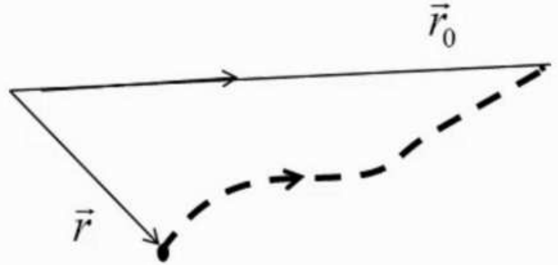
$A_{2\to 1} = mgh > 0$

Из условия 2 следует, что работа консервативной силы по любой замкнутой траектории равна 0.

Область действия консервативной силы образует *потенциальное* поле.

К потенциальным относятся гравитационное поле, в т.ч. поле тяжести Земли, поле сил упругой деформации, электростатическое (кулоновское) поле.

Потенциальной энергией мат. точки в потенциальном поле называется работа, совершаемая силами поля при перемещении точки из заданного положения в произвольно выбранную точку нулевой потенциальной энергии.



$$W_п\left(\vec{r}_0\right) = 0$$

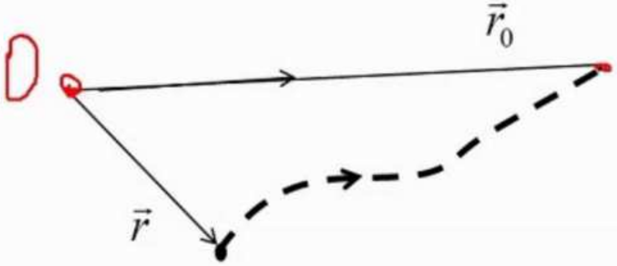
$$W_п\left(\vec{r}\right)$$

$$W_п\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

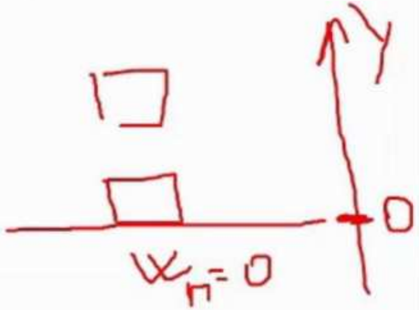
Область действия консервативной силы образует *потенциальное* поле.

К потенциальным относятся гравитационное поле, в т.ч. поле тяжести Земли, поле сил упругой деформации, электростатическое (кулоновское) поле.

Потенциальной энергией мат. точки в потенциальном поле называется работа, совершаемая силами поля при перемещении точки из заданного положения в произвольно выбранную точку нулевой потенциальной энергии.

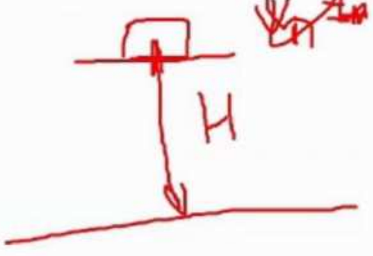


$$W_п(\vec{r}_0) = 0$$



$$W_п(\vec{r})$$

$$W_п(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



$$W_п = mgH$$

Механическая энергия, закон сохранения мех. энергии

Кинетическая энергия тела – это работа, которую надо совершить для того, чтобы разогнать тело из состояния покоя до заданной скорости.

$\vec{F}$ – равнодействующая сил, вызывающих ускорение.

Мощность сил:

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$dA = Pdt = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt$ – работа за время dt

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$dA = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \dfrac{m}{2}d(v^2)$ – работа по приращению скорости от v до $v+dv$

$$\left(d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}\right)$$

Механическая энергия, закон сохранения мех. энергии

Кинетическая энергия тела – это работа, которую надо совершить для того, чтобы разогнать тело из состояния покоя до заданной скорости.

$\vec{F}$ – равнодействующая сил, вызывающих ускорение.

Мощность сил:

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$dA = Pdt = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt$ – работа за время dt

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$dA = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{m}{2}d(v^2)$ – работа по приращению скорости от v до $v+dv$

$$\left(d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}\right)$$

$\vec{F} = m\vec{a}$

$d(x^2) = 2x\,dx$

$x \cdot dx = \frac{1}{2}d(x^2)$

Работа по ускорению $v_1 \to v_2$:

$$A = \frac{m}{2}\Delta(v^2) = \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Если $v_1 = 0$, $v_2 = v$, то A – кинетическая энергия тела, движущегося со скоростью v.

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

p – импульс тела.

<u>Механическая энергия</u>

Из определения – приращение кинет. энергии тела равно суммарной работе всех сил, приложенных к телу.

$$\Delta W_{\text{к}} = \sum A_{\text{всех сил}}$$

Работа по ускорению $v_1 \rightarrow v_2$:

$$W_к = \frac{mv^2}{2}$$

$$A = \frac{m}{2}\Delta(v^2) = \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Если $v_1 = 0$, $v_2 = v$, то A – кинетическая энергия тела, движущегося со скоростью v.

$$p = mv$$

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

$$p^2 = m^2v^2$$

p – импульс тела.

$$W_к = \frac{p^2}{2m}$$

Механическая энергия

Из определения – приращение кинет. энергии тела равно суммарной работе всех сил, приложенных к телу.

$$\Delta W_к = \sum A_{\text{всех сил}}$$

$$\Delta W_{\text{к}} = \sum A^{(\text{конс})} + \sum A^{(\text{неконс})}$$

Полная работа всех консервативных сил

Полная работа всех неконсервативных сил

Суммар. работа конс. сил равна убыли потен. энергии тела в поле этих сил:

$$\sum A^{(\text{конс})} = -\Delta W_{\text{п}}$$

$$\Delta W_{\text{к}} + \Delta W_{\text{п}} = \sum A^{(\text{неконс})}$$

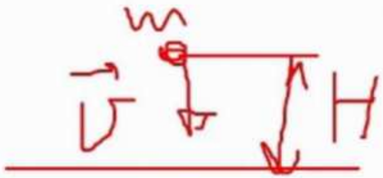
Механическая энергия тела – это сумма его кинет. и потен. энергий:

$$W_{\text{мех}} = W_{\text{к}} + W_{\text{п}}$$

$$\Delta W_{\text{к}} = \sum A^{(\text{конс})} + \sum A^{(\text{неконс})}$$

Полная работа всех консервативных сил

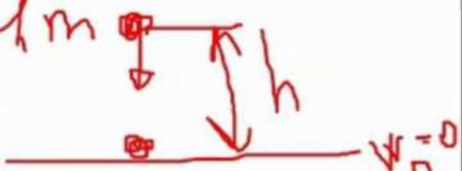
Полная работа всех неконсервативных сил



$W_{мех} = \frac{mv^2}{2} + mgH$

Суммар. работа конс. сил равна убыли потен. энергии тела в поле этих сил:

$W_п = mgh$



$$\sum A^{(\text{конс})} = -\Delta W_{\text{п}}$$

$$\Delta W_{\text{к}} + \Delta W_{\text{п}} = \sum A^{(\text{неконс})}$$

$\Delta W_п = 0 - mgh = -mgh$

$A_{тяж} = mgh$

Механическая энергия тела – это сумма его кинет. и потен. энергий:

$$W_{\text{мех}} = W_{\text{к}} + W_{\text{п}}$$

$$\Delta W_{\text{мех}} = \sum A^{(\text{неконс})}$$

Изменение механической энергии тела в процессе движения равно полной работе неконсервативных сил, действующих на тело.

Если неконсервативные силы не совершают работы, механическая энергия тела сохраняется.

$$\Delta W_{\text{мех}} = 0\ ,\ W_{\text{мех}} = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \text{const}$$

Закон сохранения механической энергии:

Механическая энергия системы сохраняется если суммарная работа всех неконсервативных сил (как внешних, так и внутренних!) равна нулю.

Механическая система, тела которой не испытывают воздействия неконсервативных сил, называются консервативными.

Механическая энергия консервативной системы сохраняется.

$$\Delta W_{\text{мех}} = \sum A^{(\text{неконс})}$$

Изменение механической энергии тела в процессе движения равно полной работе неконсервативных сил, действующих на тело.

Если неконсервативные силы не совершают работы, механическая энергия тела сохраняется.

$$\Delta W_{\text{мех}} = 0 \ , \ W_{\text{мех}} = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \text{const}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$$

$\vec{p} = \text{const}$, когда $\sum \vec{F} = 0$

Закон сохранения механической энергии:

Механическая энергия системы сохраняется если суммарная работа всех неконсервативных сил (как внешних, так и внутренних!) равна нулю.

Механическая система, тела которой не испытывают воздействия неконсервативных сил, называются консервативными.

Механическая энергия консервативной системы сохраняется.

Мякишев, 10 класс, профильный уровень (часть 1 Механика)

Савельев И.В. Курс общей физики, часть 1

Иродов И.Е. Том 1 Механика?

Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики