□

1

- Аксиома индукции (-)
- Формула бинома Ньютона (-)

2

- Определение предела последовательности (-)
- Теорема единственности
- Теорема об ограниченности

3

- Арифметические свойства пределов

4

- Пределы и неравенства
- Аксиома вложенных промежутков

5

- Важные пределы последовательностей (-)

6

- Определение предела функции
- Теорема об ограниченности предела
- Теорема единственности предела

7

- Арифметические свойства пределов функций
- Пределы и неравенства

8

- Определение непрерывности функции (-)
- Непрерывность сложной функции (суперпозиции)

9

- Бесконечно малые величины и их свойства

10

- Замечательные пределы (-)

11

- Непрерывность элементарных функций (не будет)

12

- Теорема об ограниченности непрерывной функции (можно без док-ва)

13

- Теорема о достижении наибольшего значения

14

- Теорема о существовании корня

15

- Теорема о промежуточном значении

16

- Определение и геометрический смысл производной (-)
- Дифференцируемость и непрерывность

17

- Таблица производных

18
Правила дифференцирования (хотя бы одно доказать)
19
Дифференцирование неявно заданной функции (-)
20
Дифференцирование обратной функции
21
Дифференцирование параметрически заданной функции (-)
22
Теорема Ферма
23
Теорема Ролля
24
Теорема Лагранжа
25
Теорема Коши
26
Раскрытие неопределенностей (правило Лопиталя)
27
Высшие производные
Формула Лейбница (производная произведения)
28
Формула Тейлора (остаток Пеано)
29
Формула Тейлора (остаток Лагранжа)
30
Многочлены Тейлора для основных функций
31
Условие монотонности дифференцируемой функции
32
Необходимое условие экстремума
Стационарные точки (-)
33
Первое достаточное условие экстремума
34
Определение выпуклости (-)
Достаточное условие выпуклости
35
Второе достаточное условие экстремума (-)
36
Точка перегиба (-)
Достаточное условие перегиба (-)
37

Наклонные асимптоты (-)

38

Определение первообразной (-)

Определение неопределенного интеграла (-)

39

Таблица интегралов (-)

40

Формула замены переменной (-)

41

Формула интегрирования по частям (-)

1

Аксиома индукции (-)

Пусть Pn - последовательность утверждений.
Если 1) P1 верно и 2) ∀n∈N из Pn следует Pn+1,
то Pn верны для всех n∈N

Формула бинома Ньютона (-)

$$(a+b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ldots + $$
$$+ C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ldots + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m$$

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

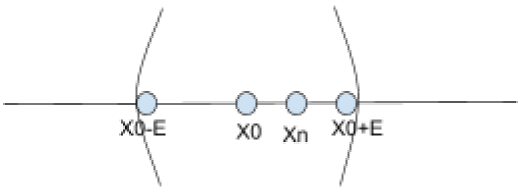
Числа $C_n^1, C_n^2, C_n^3, \ldots, C_n^{n-1}$ называются биномиальными коэффициентами. Их можно вычислить по треугольнику Паскаля. Первая строка в этой таблице содержит биномиальные коэффициенты для *n* = 1; вторая - для *n* = 2; третья - для *n* = 3 и т. д.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
………………………………………………………

2

Определение предела последовательности (-)

Если lim(n->∞)xn = x0, то
∀ ε>0 ∃N такое, что ∀n>N |xn-x0|<ε



Теорема единственности

Теорема 1.2 (о единственности предела). Если последовательность имеет предел, то он единственен.

Доказательство. Покажем, что наличие двух пределов у одной последовательности приводит к противоречию. Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, тогда для $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{3}$ найдутся числа N_a, N_b такие, что

$$\forall n > N_a \quad |x_n - a| < \frac{|a-b|}{3}, \qquad \forall n > N_b \quad |x_n - b| < \frac{|a-b|}{3}.$$

Возьмем $n > \max\{N_a, N_b\}$ и воспользуемся неравенством треугольника

$$|a-b| \leqslant |a - x_n| + |x_n - b| < 2\frac{|a-b|}{3}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. □

Теорема об ограниченности

Теорема 1.1 (об ограниченности сходящейся последовательности). Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то, полагая в определении $\varepsilon = 1$, найдем такое N, что $\forall n > N$ $|x_n - a| < 1$. Следовательно,

$$\min\{x_1, \dots, x_N, a-1\} < x_n < \max\{x_1, \dots, x_N, a+1\}.\square$$

Замечание 1.1 Из теоремы следует, что последовательность $x_n = p^n$ из примера 1.2 расходится при $|p| > 1$.

3

Арифметические свойства пределов

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = a \pm b \qquad \lim_{x\to x_0}(C\cdot f(x)) = C\cdot a$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = a\cdot b \qquad \lim_{x\to x_0}|f(x)| = |a|$$

см. 7 вопрос

4

Пределы и неравенства

Теорема 1.4 (о сохранении неравенств в предельных переходах). Пусть при всех n выполнены неравенства $x_n \geqslant y_n$ и существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда $a \geqslant b$.

Доказательство. Предположим, что это не так, т. е. $a < b$. Фиксируем $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$, определение предела гарантирует существование N такого, что

$$\forall n > N, \quad |x_n - a| < \frac{b-a}{3}, \quad |y_n - b| < \frac{b-a}{3}.$$

Следовательно,

$$x_n < a + \frac{b-a}{3} < b - \frac{b-a}{3} < y_n.$$

Это противоречит условиям. $\square$

Теорема 1.5 (о сжатой переменной). Пусть выполнены неравенства $x_n \geqslant z_n \geqslant y_n$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a,$$

тогда существует предел z_n и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Доказательство. Простота доказательства соответствует очевидности утверждения. Проверяем определение. Фиксируем $\varepsilon > 0$, выберем N так, что $\forall n > N$, $|x_n - a| < \varepsilon$, $|y_n - a| < \varepsilon$. Следовательно,

$$a - \varepsilon < y_n \leqslant z_n \leqslant x_n < a + \varepsilon, \text{ т. е. } |z_n - a| < \varepsilon. \ \square$$

Аксиома вложенных промежутков

Аксиома вложенных промежутков. Любая последовательность вложенных замкнутых промежутков имеет непустое пересечение или, в символьной записи,

$$\forall [a_n, b_n], \quad n \in \mathbf{N}, \quad [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \Rightarrow \cap_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n] \neq \varnothing.$$

Здесь использованы символы: $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел; $\varnothing$ – пустое множество, т. е. множество, не содержащее ни одного элемента.

Замечание 1.3 Условие замкнутости промежутков существенно. Это видно из следующего примера: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$, но если немного ослабить условия на промежутки, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \varnothing$.

Теорема 1.6 (Вейерштрасса). Если последовательность возрастает и ограничена, то она имеет предел, то есть

$$x_n \leqslant x_{n+1}, \quad \exists A \quad \forall n \quad x_n < A \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n.$$

5

Важные пределы последовательностей (-)

Походу Коточигов сам придумал, что это “важные пределы”.

$$1) \lim_{n\to\infty} p^{1/n} = 1, \ \forall p > 0; \qquad 2) \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1;$$

$$3) \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{(1+p)^n} = 0, \forall p > 0; \quad 4) \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

6

Определение предела функции

Пусть lim(x->x0) f(x) = a,

то есть ∀xn xn->x0, lim(n->∞) f(xn) = a

∀ε>0 ∃δ ∀x |x-x0|<δ ⇒ |f(x)-a|<ε

Определение 1.3 (основное). Число a является пределом функции f в точке x_0, если для любого положительного числа ε существует число $\delta > 0$ (греческая буква "дельта") такое, что из условия $0 < |x - x_0| < \delta$ следует, что $|f(x) - a| < \varepsilon$.

В символьной записи это выглядит так:

$$a = \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Теорема об ограниченности предела

Теорема 1.8 (об ограниченности). Если функция имеет предел в точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. Возьмем $\varepsilon = 1$ и подберем подходящее δ, тогда при $0 < |x - x_0| < \delta$ имеем $|f(x) - a| < 1$, $a - 1 < f(x) < a + 1$. $\square$

Теорема единственности предела

Теорема 1.9 (о единственности предела). Если функция имеет предел, то он единственный.

Доказательство повторяет рассуждение, проведенное для последовательностей.

см. 2 вопрос

7

Арифметические свойства пределов функций

Теорема 1.10 (об арифметике пределов). Предположим, что существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$.

Тогда справедливы утверждения:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot a$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$;

4) если $b \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$.

Доказательство. Ограничимся доказательством третьего утверждения. Фиксируем положительное число ε. Теорема об ограниченности гарантирует существование числа δ_1 такого, что при $|x - x_0| < \delta_1$ $|f(x)| < M$, $|g(x)| < M$. Согласно определению предела найдется число $\delta_2 > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta_2$ верно

$$|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Тогда при $0 < |x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ справедливо неравенство

$$|f(x)g(x) - ab| = |f(x)g(x) - ag(x) + ag(x) - ab| < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \ \square$$

Теорема 1. *Предел алгебраической суммы двух, трех и вообще определенного числа переменных равен алгебраической сумме пределов этих переменных:*

$$\lim (u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots + \lim u_k.$$

Доказательство. Проведем доказательство для двух слагаемых, так как для любого числа слагаемых оно проводится так же. Пусть $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$. Тогда на основании теоремы 1 § 4 можем написать

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

где α_1 и α_2 — бесконечно малые. Следовательно,

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Так как $(a_1 + a_2)$ есть постоянная величина, а $(\alpha_1 + \alpha_2)$ — величина бесконечно малая, то снова по теореме 1 § 4 заключаем, что

$$\lim (u_1 + u_2) = a_1 + a_2 = \lim u_1 + \lim u_2.$$

Пределы и неравенства

Теорема 1.12 (о сохранении неравенств). Предположим, что существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Тогда справедливы утверждения:

1) если $f(x) \geqslant M$ в некоторой окрестности точки x_0, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \geqslant M;$$

2) если $f(x) \geqslant g(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема 1.13 (принцип сжатой переменной). Пусть выполнены равенства $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$ и в некоторой окрестности точки x_0 $f(x) \geqslant h(x) \geqslant g(x)$, тогда существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$.

(доказательства аналог см. п4)

8

Определение непрерывности функции (-)

Говорят, что функция действительного переменного $f(x)$ является *непрерывной* в точке $a \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$—множество действительных чисел), если для любой последовательности $\{x_n\}$, такой, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Непрерывность сложной функции (суперпозиции)

Теорема 1.11 (о суперпозиции). Пусть функция f определена в окрестности точки x_0, и существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, причем $f(x_0) = y_0$, пусть функция g определена в окрестности точки y_0, и существует предел $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = g(y_0) = a$. Тогда сложная функция $h(x) = g(f(x))$ имеет предел в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$.

Доказательство. Фиксируем положительное число ε. Согласно определению предела найдется число δ_1 такое, что при $|y - y_0| < \delta_1$ $|g(y) - a| < \varepsilon$. Воспользуемся информацией о функции f и по δ_1 подберем δ_2 так, что при $|x - x_0| < \delta_2$ выполнено $|f(x) - y_0| < \delta_1$. Объединяя эти утверждения, получим, что при $|x - x_0| < \delta_2$ верно $|h(x) - a| < \varepsilon$. $\square$

9

Бесконечно малые величины и их свойства

Определение 1.5 Функция $\psi(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \to x_0$ если $\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = 0$.

Существует удобное стандартное обозначение $\psi(x) = o(1)$ при $x \to x_0$, которое читается – "функция ψ является о-малым от 1 при $x \to x_0$".

Теорема 1.14 (о произведении бесконечно малой и ограниченной величины). Пусть $\psi(x)$ бесконечно малая величина при $x \to x_0$ и функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда $\psi(x)f(x)$ – бесконечно малая величина при $x \to x_0$.

Доказательство. По условию существует M такое, что в некоторой окрестности точки x_0 $|f(x)| < M$. Фиксируем число $\varepsilon > 0$ и, сужая, если нужно, окрестность, добьемся того, что $|\psi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. Следовательно, в этой окрестности $|f(x)\psi(x)| < \varepsilon$, т. е. определение проверено. □

Краткая словесная формулировка теоремы: произведение бесконечно малой на ограниченную – бесконечно малая.

Свойства бесконечно малых [правитъ | править код]

- Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.
- Произведение бесконечно малых — бесконечно малая.
- Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную — бесконечно малая. Как следствие, произведение бесконечно малой на константу — бесконечно малая.
- Если a_n — бесконечно малая последовательность, сохраняющая знак, то $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ — бесконечно большая последовательность.

10

Замечательные пределы (-)

По Коточигову:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1;$	2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1;$
3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1;$	4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$

Асимптотические пределы

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^a}{e^x} = 0, a \in \mathbf{R};$	2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^a} = 0, a > 0.$

Кратко

sin(x) ~ x e^x - 1 ~ x ln(x + 1) ~ x

(x + 1)^a - 1 ~ ax, a != 0 ln(x) < x^a < e^x

1. Используем предел из теоремы 1.7 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^a}{(1+p)^n} = 0$. Положим $p = e - 1$ и заметим, что для каждого вещественного числа x единственным образом определено целое число $n = n(x)$ такое, что $n \leqslant x < n + 1$. Воспользуемся монотонностью функций, составляющих предел, и получим неравенства

$$n^a \leqslant x^a < (n+1)^a, \quad e \cdot e^n \geqslant e^x \geqslant e^n.$$

Разделим одно неравенство на другое и получим

$$\frac{n^a}{e \cdot e^n} \leqslant \frac{x^a}{e^x} \leqslant \frac{e(n+1)^a}{e^{n+1}}.$$

Заметим, что из условия $x \to +\infty$ следует, что $n = n(x) \to \infty$, и применим принцип сжатой переменной. По ранее доказанному соотношению пределы выражений, окаймляющих неравенство, равны 0.

2. Второе утверждение легко следует из теоремы о пределе сложной функции. Положим $y = \ln x$ и перепишем предел в новых обозначениях $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y}{e^{ay}} = 0$. Здесь использовано то обстоятельство, что $y \to +\infty$ тогда и только тогда, когда $x \to +\infty$, т. е. все свелось к пределу, полученному в п. 1. □

11

Непрерывность элементарных функций (не будет)

Все элементарные функции являются непрерывными в любой точке своей области определения. Функция называется элементарной, если она построена из конечного числа композиций и комбинаций (с использованием 4 действий - сложение, вычитание, умножение и деление) основных элементарных функций. Множество основных элементарных функций включает в себя:

1. Алгебраические многочлены $Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Kx + L$;
2. Рациональные дроби $\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Kx+L}{Mx^m+Nx^{m-1}+\ldots+Tx+U}$;
3. Степенные функции x^p;
4. Показательные функции a^x;
5. Логарифмические функции $\log_a x$;
6. Тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$;
7. Обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$, $\operatorname{arcsec} x$, $\operatorname{arccsc} x$;
8. Гиперболические функции $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$, $\operatorname{sech} x$, $\operatorname{csch} x$;
9. Обратные гиперболические функции $\operatorname{arcsinh} x$, $\operatorname{arccosh} x$, $\operatorname{arctanh} x$, $\operatorname{arccoth} x$, $\operatorname{arcsech} x$, $\operatorname{arccsch} x$.

12

Теорема об ограниченности непрерывной функции (можно без док-ва)

Теорема 2.3 (об ограниченности). Если функция f непрерывна на замкнутом отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Воспользуемся теоремой о равномерной непрерывности. Положим $\varepsilon = 1$, теорема гарантирует существование $\delta > 0$ такого, что из $|x_1 - x_2| < \delta$ следует $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$. Разобьем отрезок точками a_k на отрезки длины $\delta/2$. Число таких точек не больше, чем $M = \dfrac{2(b-a)}{\delta}$. Фиксируем точку $x_0 \in [a, b]$. Определим ее положение среди отрезков дробления: $a_m \leqslant x_0 < a_{m+1}$. Тогда, по неравенству треугольника,

$$|f(x_0)| \leqslant |f(a)| + |f(x_0) - f(a)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(a)| + |f(x_0) - f(a_m)| + \ldots + |f(a_1) - f(a)| < |f(a)| + m.$$

Следовательно, для любой точки отрезка x, $|f(x)| < |f(a)| + M$. □

13

Теорема о достижении наибольшего значения

Теорема 2.4 (о достижении наибольшего значения). Если функция f непрерывна на замкнутом отрезке $[a, b]$, то она достигает своего наибольшего значения, т. е.

$$\exists x_* \in [a, b], \quad \forall x \in [a, b] \quad f(x_*) \geqslant f(x).$$

Доказательство. Предположим, что теорема не верна. Это означает, что существуют x_k такие, что

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = M, \text{ но } \forall x \in [a, b] \quad f(x) < M.$$

Воспользуемся теоремой об ограниченной последовательности и выберем из последовательности x_k сходящуюся подпоследовательность t_m, $\lim\limits_{m \to \infty} t_m = t_0$. Поскольку $a \leqslant t_m \leqslant b$, то и $a \leqslant t_0 \leqslant b$. По условию функция непрерывна в этой точке, т. е. $\lim\limits_{m \to \infty} f(t_m) = f(t_0)$, и, значит, $f(t_0) = M$, что противоречит сделанному предположению. □

Аналогично формулируется и доказывается теорема о наименьшем значении. В этих теоремах условие замкнутости очень существенно. Достаточно рассмотреть функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на отрезке $(0, 1]$ и функцию $f(x) = x$ на отрезке $(0, 1)$.

14

Теорема о существовании корня

Теорема 2.5 (о существовании корня). Если функция f непрерывна на замкнутом отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то она имеет корень на этом отрезке.

Доказательство. Проведем построение, локализующее корень. Разделим отрезок пополам и обозначим через $[a_1, b_1]$ ту из половин отрезка, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Такой выбор возможен всегда, кроме случая, когда средняя точка является корнем функции, но в этом случае теорема доказана. К отрезку $[a_1, b_1]$ применимо то же рассуждение, и т. д. Возникающая последовательность отрезков по аксиоме вложенных промежутков имеет единственную общую точку x_0. Выберем из последовательности точек a_n бесконечную подпоследовательность точек a_{n_k}, в которых функция принимает значения одинаковых знаков. Для определенности будем считать, что $f(a_{n_k}) > 0$, тогда $f(b_{n_k}) < 0$. Поскольку $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = x_0$ и $\lim\limits_{k \to \infty} b_{n_k} = x_0$, то из непрерывности функции и теоремы о сохранении неравенств в предельных переходах следует, что $f(x_0) \geqslant 0$ и $f(x_0) \leqslant 0$. Значит, $f(x_0) = 0$. □

Процедуру, описанную в доказательстве, называют алгоритмом половинного деления. Алгоритм универсален и логичен, но из-за медленной сходимости практически не используется в приближенных вычислениях.

В приложениях используется модификация предыдущей теоремы.

15

Теорема о промежуточном значении

Теорема 2.6 (о промежуточном значении). Если функция f непрерывна на замкнутом отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения A и B, то она принимает на $[a, b]$ любые значения из интервала $[A, B]$.

Доказательство. Если $A = B$, то теорема верна. В противном случае для любого $C \in [A, B]$ можно рассмотреть функцию $g(x) = f(x) - C$. Ясно, что для этой функции выполнены условия теоремы о существовании корня. Тогда в соответствующей точке $f(x_0) = C$. □

16

Определение и геометрический смысл производной (-)

Определение 3.1 Пусть функция f задана в окрестности точки x. Если существует предел

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta},$$

то он называется производной функции в точке x. Сокращенная словесная формулировка: производная есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента.

Существует два стандартных способа обозначать производную: обозначение Ньютона f' и обозначение Лейбница $\dfrac{df}{dx}$.

Определение производной содержит ясный геометрический подтекст: две точки на графике функции $(x, f(x))$, $(x + \Delta, f(x + \Delta))$ определяют прямую – секущую графика, отношение $\dfrac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}$ равно тангенсу угла наклона секущей. Если существует производная, то секущие имеют предельное положение – касательную к графику функции в точке $(x, f(x))$. Таким образом, геометрический смысл производной состоит в том, что она равна тангенсу угла наклона касательной. Это позволят получить формулу касательной к графику функции.

Следствие 3.1 (уравнение касательной). Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то существует касательная к графику функции в этой точке, уравнение которой можно записать так: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Дифференцируемость и непрерывность

Рассмотрим функцию f(x), область определения которой содержит некоторый открытый интервал вокруг точки x0. Тогда функция f(x) является *дифференцируемой* в точке x0, и ее *производная* определяется формулой

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Теорема 3.1 (о непрерывности дифференцируемой функции) Если функция f дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. По определению предела из существования производной следует, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ такое, что

$$\forall\Delta: \ |\Delta| < \delta \quad \left|\frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta} - f'(x)\right| < \varepsilon,$$

следовательно, $|\Delta f| < (|f'(x)| + \varepsilon)\delta$ и функция непрерывна. □

Замечание 3.1 Условие непрерывности не гарантирует дифференцируемости. Это проявляется на очень простых функциях: $f(x) = |x|$ непрерывна в нуле, но не дифференцируема в этой точке. Методика вычисления производных по понятным причинам воспроизводит методику вычисления пределов. Прямая проверка определения, как правило, затруднительна, но факт существования производной, как правило, следует из алгоритма вычисления производной. Базу вычисления производных дает следующая таблица, на основе которой действуют правила вывода. Далее составляется список свойств производных – формул (правил вывода), которые позволяют расширять таблицу производных и вычислять производную любой „стандартной“ функции.

17

Таблица производных

1) $(x^a)' = ax^{a-1}$;	2) $(e^x)' = e^x$;
3) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;	4) $(\sin x)' = \cos x$;
5) $(\cos x)' = -\sin x$;	6) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
7) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	8) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

док-ва через $\Delta x \to 0$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ и бином Ньютона

18

Правила дифференцирования (хотя бы одно доказать)

По Коточигову:

Формула дифференцирования суммы

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).}$$

Эта формула является прямым следствием определения и соответствующего свойства пределов.

Формула дифференцирования произведения

$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x),$
в частности $(k\cdot g(x))' = k\cdot g'(x), k \in R.$

Доказательство. Воспользуемся определением, свойствами пределов и непрерывностью функции g (всякая дифференцируемая функция непрерывна):

$$(f(x)\cdot g(x))' = \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)g(x+\Delta) - f(x)g(x)}{\Delta} =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)g(x+\Delta) - f(x)g(x+\Delta) + f(x)g(x+\Delta) - f(x)g(x)}{\Delta} =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} g(x+\Delta)\frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta} + \lim_{\Delta\to 0} f(x)\frac{g(x+\Delta) - g(x)}{\Delta} =$$

$$= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).\square$$

Формула дифференцирования частного

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.}$$

Доказательство аналогично предыдущему.

Формула дифференцирования сложной функции

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x).}$$

Здесь предполагается, что функция g дифференцируема в точке x и функция f дифференцируема в точке $y = g(x)$.

$2M$ $2M$

Тогда при $0 < |x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ справедливо неравенство

$$|f(x)g(x) - ab| = |f(x)g(x) - ag(x) + ag(x) - ab| < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \ \square$$

Доказательство:

$$(f(g(x)))' = \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(g(x+\Delta)) - f(g(x))}{\Delta} =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(g(x+\Delta)) - f(g(x))}{g(x+\Delta) - g(x)}\ \frac{g(x+\Delta) - g(x)}{\Delta}.$$

Обозначим $\Delta_1 = g(x+\Delta) - g(x)$ и заметим, что $\lim\limits_{\Delta\to 0}\Delta_1 = 0$, следовательно,

$$(f(g(x)))' = \lim_{\Delta_1\to 0}\frac{f(g(x)+\Delta_1) - f(g(x))}{\Delta_1}\ \lim_{\Delta\to 0}\frac{g(x+\Delta)) - g(x)}{\Delta} =$$

$$= f'(g(x))\ g'(x).\ \square$$

Бл

19

Дифференцирование неявно заданной функции (-)

Чтобы найти производную функции $y = f(x)$, заданной уравнением в неявном виде, нужно продифференцировать обе части этого уравнения и разрешить полученное уравнение относительно y'.

Пример. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$xy^3 - yx^3 + 4x^2 = 1 - xy + y^3.$$

Продифференцируем обе части этого уравнения по переменной x:

$$y^3 + 3xy^2y' - y'x^3 - 3x^2y + 8x = -y - xy' + 3y^2y'.$$

Затем сгруппируем в одной части слагаемые, содержащие y', а в другой части – остальные слагаемые:

$$y'(3xy^2 - x^3 + x - 3y^2) = (-y - y^3 + 3x^2y - 8x).$$

Тогда

$$y' = \frac{-(y + y^3 - 3x^2y + 8x)}{3xy^2 - x^3 + x - 3y^2}.$$

20

Дифференцирование обратной функции

Теорема. Пусть функция $x = x(y)$ является обратной для функции $y = y(x)$. Если существует отличная от нуля производная функции $y = y(x)$ по переменной x, то существует и производная обратной функции $x = x(y)$ по переменной y. При этом

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

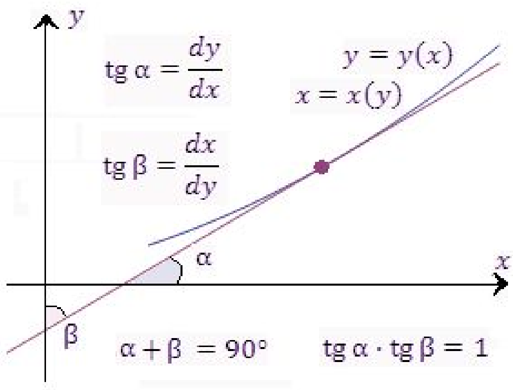
Доказательство. По определению производной

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Согласно теореме о непрерывности дифференцируемых функциях, $y(x)$ является непрерывной функцией и, следовательно, $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

что влечет за собой доказываемое утверждение.



21

Дифференцирование параметрически заданной функции (-)

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическим способом:

(1) $$\begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t), \end{cases}$$

где t некоторая переменная, называемая параметром. И пусть функции $y = y(t)$ и $x = x(t)$ имеют производные при некотором значении переменной t. Причем $x'(t) \neq 0$ и функция $x = x(t)$ имеет обратную функцию в некоторой окрестности точки t. Тогда функция (1) имеет в точке $x = x(t)$ производную $\dfrac{dy}{dx} \equiv y'_x$, которая, в параметрическом виде, определяется по формулам:

(2) $$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}, \\ x = x(t). \end{cases}$$

Здесь $y'(t)$ и $x'(t)$ – производные функций $y = y(t)$ и $x = x(t)$ по переменной (параметру) t.
Их часто записывают в следующем виде:

$$y'(t) \equiv y'_t \equiv \frac{dy}{dt};$$

$$x'(t) \equiv x'_t \equiv \frac{dx}{dt}.$$

Тогда систему (2) можно записать так:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \\ x = x(t). \end{cases}$$

22

Теорема Ферма

Теорема 3.4 (Ферма). Если функция f дифференцируема на интервале $[a, b]$ и принимает наибольшее (или наименьшее) значение во внутренней точке интервала $x_0 \in (a, b)$, то производная функции в этой точке равна 0.

Доказательство. Существует предел $\lim\limits_{\Delta \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$. Предположим, для определенности, что в точке x_0 функция принимает наибольшее значение, тогда при $\Delta > 0$ $\dfrac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} \leqslant 0$, и по теореме о сохранении неравенств в предельных переходах $f'(x_0) \leqslant 0$. С другой стороны, при $\Delta < 0$ $\dfrac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} \geqslant 0$, следовательно, $f'(x_0) \geqslant 0$. Объединив полученные неравенства, получим $f'(x_0) = 0$. $\square$

Следствие (Геометрический смысл теоремы Ферма):
В точке наибольшего и наименьшего значения, достигаемого внутри промежутка, касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

23

Теорема Ролля

(О нуле производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения)

Теорема 3.5 (Ролля). Если функция f дифференцируема на интервале $[a, b]$ и принимает на концах интервала равные значения, то внутри интервала найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. Функция непрерывна на интервале. По теореме 2.4 ее наибольшее и наименьшее значения достигаются в точках интервала $M = f(x^*) = \max(f(x) : x \in [a, b])$, $m = f(x_*) = \min(f(x) : x \in [a, b])$. Если $M = m$, то $f(x) = M$, $\forall x \in [a, b]$ и $f'(x) \equiv 0$. Если $M \neq m$, то в силу равенства значений функции на концах промежутка, хотя бы одна из точек

x_*, x^* лежит внутри интервала. Обозначим эту точку через c и, применив теорему Ферма, получим $f'(c) = 0$. □

Теорема Ролля допускает „поворот“, позволяющий отказаться от условия равенства значений функции на концах интервала.

Следствие 1 (Геометрический смысл теоремы Ролля):
Найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс.
Следствие 2:
Если , то теорему Ролля можно сформулировать следующим образом: между двумя последовательными нулями дифференцируемой функции имеется, хотя бы один, нуль производной.

24

Теорема Лагранжа

Теорема 3.6 (Лагранжа). Если функция f дифференцируема на интервале $[a, b]$, то внутри интервала найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Теорема имеет простой геометрический смысл: на любой дуге графика дифференцируемой функции найдется точка, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей концы дуги.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + (f(b) - f(a)) \frac{x - a}{b - a} \right).$$

Легко проверить, что $g(a) = g(b) = 0$. Применив к функции g теорему Ролля, найдем точку $c \in (a, b)$ такую, что $g'(c) = 0$. Остается заметить, что $0 = g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

Следствие 3.4 (формула конечных приращений). Если функция f дифференцируема на интервале $[a, b]$, то существует постоянная $t \in (0, 1)$ такая, что $f(b) = f(a) + f'(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Достаточно заметить, что точку c из формулировки теоремы всегда можно записать в виде $c = a + t(b - a)$, $t \in (0, 1)$. $\square$

Следствие 3.5 Если функция f дифференцируема на интервале $[a, b]$ и $f'(x) \equiv 0$, то $f(x) \equiv$ const.

25

Теорема Коши

Теорема 3.7 (Коши). Если функции f и g дифференцируемы на интервале $[a, b]$ и $g(a) \neq g(b)$, то внутри интервала найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Легко видеть, что $h(a) = h(b) = 0$. Применив к функции теорему Ролля и найдем точку $c \in (a, b)$ такую, что $h'(c) = 0$. Вычислив производную функции, получим $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$, что и дает нужное равенство. $\square$

26

Раскрытие неопределенностей (правило Лопиталя)

Теорема 3.8 (правило Лопиталя). Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, обе функции дифференцируемы в окрестности точки x_0, и существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, равный A.

Доказательство. Воспользуемся тем, что в предельной точке обе функции равны 0, и применим теорему Коши:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A.$$

Здесь $c \in (x_0, x)$ – точка, существование которой гарантирует теорема. $\square$

Теорему 3.8 называют правилом раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$. Существует целый ряд других типов неопределенностей, которые либо вычисляются подобным образом, либо сводятся к предыдущим. Для неопределенностей вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ правило сохраняется.

Теорема 3.9 Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, функции дифференцируемы в окрестности точки x_0 и существует предел $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то существует предел $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и он тоже равен A.

27

Высшие производные

Определение 3.6 Если функция f имеет производную в окрестности точки x_0 и функция $g(x) = f'(x)$ имеет производную в точке x_0, то говорят, что функция f дважды дифференцируема в точке x_0, функцию $g'(x)$ называют второй производной. Далее по индукции определяется производная n-го порядка (если она существует). Стандартное обозначение для n-й производной – $f^{(n)}$ или $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Следствие 3.6 Если функции $x = f(t)$, $y = g(t)$ дифференцируемы при $a < t < b$, $f(t) \neq 0$ и функция $y_1(t) = \frac{g'(t)}{f'(t)}$ тоже дифференцируема при $a < t < b$, то

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = \frac{dy_1}{dx}(x) = \frac{y_1'(t)}{f'(t)}.$$

Доказательство. В следствии 3.3 было показано, что в этих условиях $y_1 = \frac{dy}{dx}$. Тогда, применив следствие к паре функций $x = f(t)$ и $y_1(t)$, получим выражение для второй производной:

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = \frac{dy_1}{dx}(x) = \frac{y_1'(t)}{f'(t)}. \square$$

Формула Лейбница (производная произведения)

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ — n раз дифференцируемые функции, тогда

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}, \text{ где } C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$ — биномиальные коэффициенты.

28

Формула Тейлора (о

29

Формула Тейлора (остаток Лагранжа)

Следствие 3.7 (формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа). Если функция f имеет в окрестности точки x_0 $(n+1)$ непрерывную производную, то она допускает представление вида

$$f(x) = p(x) + r(x),$$

где $p(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \cdot + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$,

$r(x) = \frac{f^{(n)}(x_0 + t(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ – остаток в форме Лагранжа.

Доказательство. Доказательство проходит по той же схеме. Но на начальном этапе надо поставить в знаменатель $(x-x_0)^{n+1}$ и вместо правила Лопиталя применять теорему Коши. Последнее возможно, поскольку все производные числителя и знаменателя обращаются в 0 в точке x_0. В итоге получим:

$$\frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(x_0+t_n(x-x_0)) - f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(x-x_0)} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0+t(x-x_0))}{(n+1)!}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Последнее равенство следует из теоремы Лагранжа (формулы конечных приращений) и дает нужное выражение для остатка. □

30

Многочлены Тейлора для основных функций

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \ldots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

31

Условие монотонности дифференцируемой функции

Теорема 3.11 (об условии монотонности). Если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и ее производная не меняет знака во всех точках отрезка, то функция монотонна на этом отрезке.

Доказательство. Рассмотрим случай положительной производной. Надо проверить, что для любых точек $x_1, x_2 \in [a, b]$ таких, что $x_1 \leqslant x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Воспользуемся теоремой Лагранжа, согласно которой $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_3)(x_2 - x_1)$, здесь $x_3 \in (x_1, x_2)$. По условию $f'(x_3) \geqslant 0$ и $x_2 - x_1 \geqslant 0$, следовательно, $f(x_2) \geqslant f(x_1)$.

приводит к равенству

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - p^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

Последнее равенство вытекает из равенства $f^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0)$ и непрерывности $f^{(n)}$. □

Условие убывания функции доказывается аналогично. □

Теорема 1. (необходимое условие монотонности функции). Если дифференцируемая в интервале (*a, b*) функция *y* = *f* (*x*) возрастает (убывает) на этом интервале, то ее производная в каждой точке (*a, b*) $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$.

Теорема 2. (достаточное условие монотонности функции). Если непрерывная на отрезке [a, b] функция y = f(x) в каждой точке интервала (a, b) имеет положительную (отрицательную) производную, то эта функция возрастает (убывает) на отрезке [a, b].

32

Необходимое условие экстремума

Теорема 3.12 (необходимое условие экстремума). Если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и имеет экстремум в точке $x_0 \in (a, b)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Из определения экстремума следует, что можно выбрать достаточно малый отрезок $(c, d) \subset [a, b]$, $x_0 \in (c, d)$ такой, что в $f(x_0)$ наибольшее (или наименьшее) значение функции на отрезке (c, d). Следовательно, по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$. □

Стационарные точки (-)

Условие теоремы не является достаточным. У функции $f(x) = x^3$ $f'(0) = 0$, но функция является возрастающей и не имеет экстремумов. Тем не менее точки, где производная обращается в ноль, очень важны для исследования функций и имеют собственное название.

Определение 3.8 Точки, в которых производная функции обращается в ноль, называют стационарными.

33

Первое достаточное условие экстремума

Теорема 3.13 (первое достаточное условие экстремума). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема во всех точках отрезка, за возможным исключением точки $x_0 \in (a, b)$, и существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$, $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, то x_0 точка максимума.

Доказательство теоремы сводится к простому анализу определений, и мы его опускаем. Ниже будет приведен второй достаточный признак, более удобный в применении.

Теорема 4. (достаточный признак существования экстремума). Если непрерывная функция *y* = *f*(*x*) имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего критическую точку С (за исключением, может быть, самой этой точки), и если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку С меняет знак с плюса на минус, то функция в точке С имеет максимум, а при перемене знака с минуса на плюс – минимум.

34

Определение выпуклости (-)

Определение 3.9 Кривая, определяемая графиком дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклой вниз, если в каждой точке ее график лежит выше касательной. Аналогичным образом определяется выпуклость вверх (график ниже касательной).

Достаточное условие выпуклости

Теорема 3.14 (достаточное условие выпуклости). Если функция $y = f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 непрерывную вторую производную, и $f^{(2)}(x_0) > 0$, то график функции является выпуклым вниз в этой точке. (Если $f^{(2)}(x_0) < 0$, то график функции в этой точке выпуклый вверх.)

Доказательство. Разложим функцию по формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

По условию, график лежит выше касательной, что равносильно неравенству $f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) \geqslant 0$ или $f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0^2)) \geqslant 0$. Последнее неравенство верно, так как $f^{(2)}(x_0) > 0$, и по определению бесконечно малой найдется окрестность x_0, где $f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2 \geqslant o((x - x_0)^2)$. $\square$

Как правило, график функции находится по одну сторону от касательной. Точки, где это условие нарушено, очень важны для анализа поведения функции.

35

Второе достаточное условие экстремума (-)

Теорема 3.15 (второе достаточное условие экстремума). Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$, $f'(x_0) = 0$ и $f^{(2)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума. (Если $f^{(2)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.)

Доказательство прямо следует из определений: график выше касательной, касательная горизонтальна.

36

Точка перегиба (-)

Определение 3.10 Точка называется точкой перегиба, если в любой ее окрестности существуют точки на графике, лежащие по разные стороны от касательной.

„Сокращенная“ формулировка: в точке перегиба касательная пересекает график.

Наглядное представление точек перегиба дают графики функций $y = x^3$, $y = x^3 + x$ в окрестности точки ноль. Необходимое условие появления точек перегиба вытекает из предыдущей теоремы.

Следствие 3.8 Если функция $y = f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 непрерывную вторую производную и эта точка является точкой перегиба, то $f^{(2)}(x_0) = 0$.

Достаточное условие перегиба (-)

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке конечную или бесконечную производную и если $f''(x_0)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

Доказательство

Пусть f'' меняет знак с «-» на «+», тогда по достаточному условию строгой выпуклости функция $f(x)$ на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$ функция будет строго выпукла вверх, на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$ — строго выпукла вниз, т.е при переходе через точку x_0 направление выпуклости изменяется $\Rightarrow$ по определению x_0— точка перегиба.

37

Наклонные асимптоты (-)

Определение 3.11 Говорят, что график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$, если $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$.

То есть при больших значениях аргумента график функции очень близок к графику прямой. Такое может быть и с +∞, и с -∞.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = 0.$$

Пример 3.27 (нахождение асимптот для явно заданных функций):

$$f(x) = \frac{2x^2+3x+4}{5x+6},$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+4}{5x^2+6x} = \frac{2}{5}, \quad b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+3x+4}{5x+6} - \frac{2x}{5}\right) = \frac{3}{25},$$

график имеет наклонную асимптоту $y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{25}$.

38

Определение первообразной (-)

Первообразной функции *f(x)* на промежутке *(a; b)* называется такая функция *F(x)*, что выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ для любого *x* из заданного промежутка.
Если принять во внимание тот факт, что производная от константы *C* равна нулю, то справедливо равенство $(F(x)+C)' = f(x)$. Таким образом, функция *f(x)* имеет множество первообразных *F(x)+C*, для произвольной константы *C*, причем эти первообразные отличаются друг от друга на произвольную постоянную величину

Определение неопределенного интеграла (-)

Все множество первообразных функции *f(x)* называется неопределенным интегралом этой функции и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$.
Выражение $f(x)dx$ называют подынтегральным выражением, а *f(x)* – подынтегральной функцией. Подынтегральное выражение представляет собой дифференциал функции *f(x)*.
Действие нахождения неизвестной функции по заданному ее дифференциалу называется *неопределенным* интегрированием, потому что результатом интегрирования является не одна функция *F(x)*, а множество ее первообразных *F(x)+C*.
На основании свойств производной можно сформулировать и доказать свойства неопределенного интеграла (свойства первообразной).

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x)$

   Производная результата интегрирования равна подынтегральной функции.

2. $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$

   Неопределенный интеграл дифференциала функции равен сумме самой функции и произвольной константы.

3. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, где k – произвольная константа.
Коэффициент можно выносить за знак неопределенного интеграла.

4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
Неопределенный интеграл суммы/разности функций равен сумме/разности неопределенных интегралов функций.

Промежуточные равенства первого и второго свойств неопределенного интеграла приведены для пояснения.
Для доказательства третьего и четвертого свойств достаточно найти производные от правых частей равенств:

$$\left(k \cdot \int f(x)dx\right)' = k \cdot \left(\int f(x)dx\right)' = k \cdot f(x)$$

$$\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) \pm g(x)$$

Эти производные равны подынтегральным функциям, что и является доказательством в силу первого свойства. Оно же используется в последних переходах.

39

Таблица интегралов (-)

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$
$n \neq -1,\ x > 0$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм:
$\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$
14. «Длинный» логарифм:
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Доказательство каждого из табличных интегралов осуществляется с помощью дифференцирования (по определению)

Пример:

$$10.\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot\left(1+\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)=$$

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

$$11.\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)'=\frac{1}{2a}\cdot\frac{a-x}{a+x}\cdot\frac{1\cdot(a-x)-(-1)\cdot(a+x)}{(a-x)^2}=\frac{1}{a^2-x^2}$$

40

Формула замены переменной (-)

Теорема. Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке *T* и пусть *X* – множество значений этой функции, на котором определена функция *f*(*x*). Тогда, если на множестве *X* функция *f*(*x*) имеет первообразную, то на множестве *T* справедлива формула:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Пример:
Найти неопределённый интеграл методом замены переменной:

$$\int\frac{x^3}{(x-1)^2}dx.$$

Решение. Положим x – 1 = t ; тогда x = t + 1. Отсюда dx = dt . По формуле (1)

$$\int\frac{x^3}{(x-1)^2}dx=\int\frac{(t+1)^3}{t^2}dt=$$

$$=\int\left(t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{2}t^2+3t+3\ln|t|-\frac{1}{t}+C.$$

41

Формула интегрирования по частям (-)

Рассмотрим функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$, которые имеют непрерывные производные. Согласно свойствам дифференциалов, имеет место следующее равенство:

$$d(uv)=udv+vdu$$

Проинтегрировав левую и правую части последнего равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int (udv + vdu) \Rightarrow uv = \int udv + \int vdu$$

Полученное равенство перепишем в виде:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Формулу интегрирования по частям целесообразно применять к интегралам следующего вида:

1) $\int P_n(x)e^{kx}dx$; $\int P_n(x)\sin(kx)dx$; $\int P_n(x)\cos(kx)dx$

Здесь $P_n(x)$ - многочлен степени n, k - некоторая константа. В данном случае в качестве функции u берется многочлен, а в качестве dv - оставшиеся сомножители. Для интегралов такого типа формула интегрирования по частям применяется n раз

1-15 – рукописный конспект!!!

4 без док-в

Вопросы к экзамену

—— – Док-во нужно уметь.

1

1) Аксиома индукции, формула бинома Ньютона.
2) Определение предела последовательности, теоремы единственности и ограни-ти.
3) Арифметические свойства пределов. – док-во любого (+ – / * ÷)
4) Пределы и неравенства, аксиома вложенных промежутков. – формулировка с доказательством
5) Важные пределы последовательностей.
6) Определение предела функции, теорема единственности, теорема об ограниченности.
7) Арифметические свойства пределов функций, пределы и неравенства.
8) Определение непрерывности функции, непрерывность сложной функции. – можно не доказывать (знать план)
9) Бесконечно малые величины и их свойства. – см. обозн.
10) Замечательные пределы .
11) Непрерывность элементарных функций. – Хим в билетах
12) Теорема об ограниченности непрерывной функции. – можно доказывать (но не обязательно)
13) Теорема о достижении наибольшего значения.
14) Теорема о существовании корня.
15) Терема о промежуточном значении.

!!! 16) Определение и геометрический смысл производной, дифф-сть и непрерывность

17) Таблица производных. – понимание и небольшие док-ва

18) Правила дифференцирования. – док-ва любого (+ – / * ÷)

19)* Дифференцирование неявно заданной функции.

20)* Дифференцирование обратной функции.

21)* Дифференцирование параметрически заданной функции. – Задачи

22) Теорема Ферма. !

23) Теорема Ролля. !

24) Теорема Лагранжа. – доказательства учить

25) Теорема Коши.

26) Раскрытие неопределенностей. (через теорему Коши)

27) Высшие производные. Формула Лейбница. – формула +/–

28) Формула Тейлора (остаток в форме Пеано). – можно без док-ва (общий план!)

29) Формула Тейлора (остаток в форме Лагранжа).

30) Многочлены Тейлора для основных функций. – например, для экспоненты (вывод формулы)

32) Условие монотонности дифференцируемой функции.

32) Необходимое условие экстремума. Стационарные точки.

33) Первое достаточное условие экстремума. – определение

34) Определение выпуклости. Достаточное условие выпуклости. – сложный вопрос, док-во через Тейлора и Лагранжа

35) Второе достаточное условие экстремума.

36) Точки перегиба. Необходимое условие перегиба. – аналогично через 2-ую производную

37) Наклонные асимптоты. – определение = как определить → x^3, x^4 – контр. примеры

38) Первообразная и неопределенный интеграл.

39) Таблица интегралов. → $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

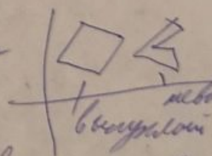
40) Формула замены переменной.

41) Формула интегрирования по частям. – без док-в, но с примерами!

Задач нет! Определения и взаимосвязь. (ссылка на теорему задания)

Логарифмическое дифференцирование – классика!

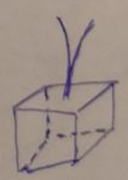
Точечно?



все лежат выше/ниже

Регламент экзамена

1



e^x – это ...?

1) $o(1)\cdot O(1) = o(1)$

ограниченная — доказательство

2) $f \sim g$, $x \to x_0$ $\lim \frac{f}{h} = \lim \frac{g}{h}$ — доказательство

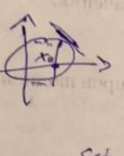
---

19) Неявная ф-ция:

$F(x,y) = 0$.

$\frac{dy}{dx}\Big|_{(x_0,y_0)}$

$x^2+y^2=1$ $x_0 = y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$



$e^x - 1 \sim x$

$|e^x-1| < C\cdot x$

непрерывна в 0

26) $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ ⟶ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x - x}{\cos x - x} = 1$ (выносим за скобку, а не Лопиталем)

Как раскрывание неопределённости.

Идея док-ва формулы Тейлора

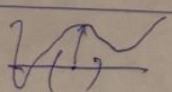
Сравнить $\frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^n}$ — бесконечно малая или имеет больше нуля

1) дифференцируем, пока не получится (0 в x_0) — Пеано

2) Лагранжа: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$ — дифференцируем и применяем теорему Коши

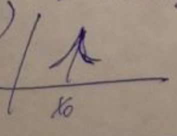
Из-за лишней степени получаем в конце $f^{(n+1)}(c)$, значит $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = f^{(n+1)}(c)$

---

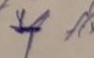
32)  это локальное понятие! Не можем доказать на конце, т. к. нет окрестности.

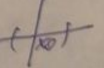
Дифференцируемость везде ($f'(x)=0$) — теорема Ферма и окрестности.

Примеры стационарных точек —!

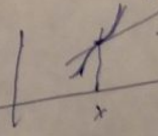
33)  нет зависимости от того, что производная есть! Но ф-ия непрерывна

---

34) Док-во через многочлен Тейлора  $f'(x_0)=0$

35) $\exists f''$  $f''(x_0) > (<) 0$

Теорема Больцано-Вейерштрасса

36)  — $f'(x)$ меняет знак

Н е

Вопросы к экзамену

1

1)Аксиома индукции, формула бинома Ньютона.

2)Определение предела последовательности, теоремы единственности и ограни-ти.

3)Арифметические свойства пределов.

4) Пределы и неравенства, аксиома вложенных промежутков.

5)Важные пределы последовательностей.

6) Определение предела функции, теорема единственности,теорема об ограниченности.

7) Арифметические свойства пределов функций, пределы и неравенства.

8) Определение непрерывности функции, непрерывность сложной функции.

9) Бесконечно малые величины и их свойства.

10) Замечательные пределы

11) Непрерывность элементарных функций.

12) Теорема об ограниченности непрерывной функции.

13) Теорема о достижении наибольшего значения.

14) Теорема о существовании корня.

15) Терема о промежуточном значении.

16) Определение и геометрический смысл производной, дифф-сть и непрерывность

17) Таблица производных.

18) Правила дифференцирования.

19)* Дифференцирование неявно заданной функции.

20)* Дифференцирование обратной функции. (+ ln дифф)

21)* Дифференцирование параметрически заданной функции.

22) Теорема Ферма.

23) Теорема Ролля.

24) Теорема Лагранжа.

25) Теорема Коши.

26) Раскрытие неопределенностей. $\frac{0}{0}$

27) Высшие производные. Формула Лейбница.

28) Формула Тейлора (остаток в форме Пеано).

29) Формула Тейлора (остаток в форме Лагранжа).

30) Многочлены Тейлора для основных функций. !

32) Условие монотонности дифференцируемой функции.

32) Необходимое условие экстремума. Стационарные точки.

33) Первое достаточное условие экстремума.

34) Определение выпуклости. Достаточное условие выпуклости.

35) Второе достаточное условие экстремума.

36) Точки перегиба. Необходимое условие перегиба. !

37) Наклонные асимптоты. + $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(kx+b))=0$

38) Первообразная и неопределенный интеграл. +

39) Таблица интегралов +

40) Формула замены переменной. +

41) Формула интегрирования по частям. П/б практики

Регламент экзамена

1)Аксиома индукции, формула бинома Ньютона.
2)Определение предела последовательности, теоремы единственности и ограни-ти.
3)Арифметические свойства пределов.
4) Пределы и неравенства, аксиома вложенных промежутков.
5)Важные пределы последовательностей.
6) Определение предела функции, теорема единственности,теорема об ограниченности.
7) Арифметические свойства пределов функций, пределы и неравенства.
8) Определение непрерывности функции, непрерывность сложной функции.
9) Бесконечно малые величины и их свойства.
10) Замечательные пределы .
11) Непрерывность элементарных функций.
12) Теорема об ограниченности непрерывной функции.
13) Теорема о достижении наибольшего значения.
14) Теорема о существовании корня.
15) Терема о промежуточном значении.
16) Определение и геометрический смысл производной, дифф-сть и непрерывность.
17) Таблица производных.
18) Правила дифференцирования.
19)* Дифференцирование неявно заданной функции.
20)* Дифференцирование обратной функции.
21)* Дифференцирование параметрически заданной функции.
22) Теорема Ферма.
23) Теорема Ролля.
24) Теорема Лагранжа.
25) Теорема Коши.
26) Раскрытие неопределенностей.
27) Высшие производные. Формула Лейбница.
28) Формула Тейлора (остаток в форме Пеано).
29) Формула Тейлора (остаток в форме Лагранжа).
30) Многочлены Тейлора для основных функций.
32) Условие монотонности дифференцируемой функции.
32) Необходимое условие экстремума. Стационарные точки.
33) Первое достаточное условие экстремума.
34) Определение выпуклости. Достаточное условие выпуклости.
35) Второе достаточное условие экстремума.
36) Точки перегиба. Необходимое условие перегиба.
37) Наклонные асимптоты.
38) Первообразная и неопределенный интеграл.
39) Таблица интегралов.
40) Формула замены переменной.
41) Формула интегрирования по частям.