Комплексные числа

Многочлены

Матрицы и определители

03.09

Алгебра и Геометрия

Линейное пространство и их преобразования

Литература: • лекции; Г. Курош „Курс алгебры"; З. Боревич „Матрицы и определители"

Глава 1 Комплексные числа

Z – целые
N – натур
Q – рац.
R – вещ

§1 Алгебраическая форма комплексного числа

1° Определение

Комп. ч. назыв. $a+bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а i – символ, который наз. мнимой единицей и кот. удов. $i^2=-1$

• Дей-вия с ком. выполняются по станд. ариф. дей-виям с учётом $i^2=-1$

! Группы – одна операция $*$ – любая операция

(1) $a*(b*c)=(a*b)*c$

(2) $\exists$ – существует $\forall$ – любой, каждый $\exists e: a*e=e*a=a$

(3) $\forall a \; \exists a^{-1}: a \cdot a^{-1}=e$ – обратная величина зав. от ~~дей-ствия~~

Кольца

Поля

Примеры: $-1, 0, 1, 2 \ldots$ – по сложению

! изучить дома

Кольца – две операции $+$ – группа $a+b=b+a$ больше условий

$a(bc)=(ab)c$

Поле – $+ / \times$ $+$ абелевая группа $\times$: $\{K-0\}$ – абелева группа

(K-поле) если поле явл. кольцо

Примеры: Рац. числа

$a(b+c)=ab+ac$

• $a+b=b+a$
$a+(b+c)=(a+b)+c$
$a+\theta=\theta+a=a$
$a+(-a)=0$

• $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$
кольцо с единицей $e\cdot a=a\cdot e=a$

$z=a+bi \quad i^2=-1; \; a, b \in R$

$Re\, z=a$ – (коэ-т) вещ. части

$Im\, z=b$ – (коэ-т) мнимой части

2° Арифметические дей-вия над комп. числами в алгебр. форме.

$(2+3i)+(4-2i)=6+i$

$(2+3i)\cdot(4-2i)=8-4i+12i+6=14+8i$

$\frac{3+4i}{2-i}=\frac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{6+3i+8i-4}{4+1}=\frac{11i+2}{5}=$

Коммутативная опер
$x \circ y = y \circ x$
если групповая опер явл. к => абелева группа
$+ \mid a^{-1}=-a$
$\cdot \mid a^{-1}=\frac{1}{a}$

3° Сопряжённое число, модуль и аргумент

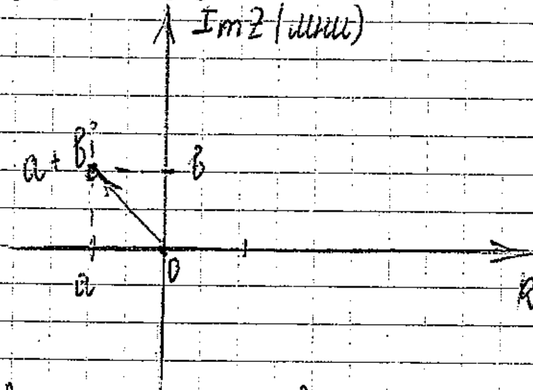
Опр. $z = a + bi \Rightarrow \bar{z}$ (сопряж) называют комп. число, отличающееся знаком ~~комп~~ мнимой части $\bar{z} = a - bi$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bci-adi+bd}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \Leftarrow z = a + bi$$

§2 Геометрическое представление комп. числа

1° Комп. плоскость



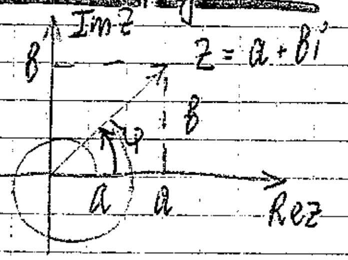
Комп. числу сопоставляется радиусу векторов или точкой на комп плоскости

Проверить сам.

Слож. комп. чисел сопост. сложение векторов

Изоморфизм — множество комп. чисел и вектор. как сопост. один в один, сохраняется на арифм. действиях

2° Модуль и аргумент



$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

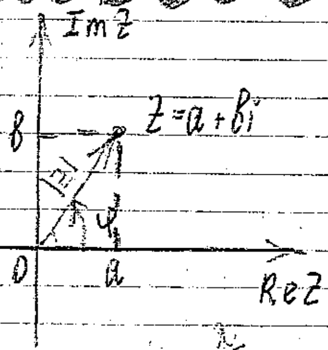
$\varphi = \arg z$ (аргумент комп. числа)

может принимать ∞ значений с разницей в 2π

Arg z — все аргументы

arg z — миним.

3° Тригон. форма комп. числа



$a = |z| \cdot \cos \varphi$
$b = |z| \cdot \sin \varphi$ $\Rightarrow$

$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$

пол. всегда +

$\cos \varphi = \frac{a}{|z|}$

$\sin \varphi = \frac{b}{|z|}$

$|z| \cdot \cos \varphi +$
$|z| \cdot \sin \varphi \cdot i$
$= |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Теорема:

∘ При умножении двух комп. чисел в тригоном. форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются

∘ При делении комп. чисел в т. форме мод. равен частному от делен. модуля делимого на мод. делителя, а арг. равен разности аргументов делимого и делителя

∘ При возведение в степень с нат. пок. числа в тр. форме модуль возвод. в степень, аргумент умн. на пок. степени

$z_1 = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z_2 = \rho\,(\cos\psi + i\sin\psi)$ ← пси

$z_1 \cdot z_2 = r\rho\,(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{\rho}\,(\cos(\varphi-\psi) + i\cdot\sin(\varphi-\psi))$

$z_1^n = r^n\,(\cos n\cdot\varphi + i\cdot\sin n\cdot\varphi)$

Толкачёва Алёна Алексеевна

10.09

* / Теорема о дей-виях над к.ч. в триг. форме

$z_1 = r_1\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$z_1 \cdot z_2 = r_1\cdot r_2\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

$z_1^n = r_1^n\,(\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1)$ /* $\forall n \in \mathbb{N}$ мат. индукции

Следствие: Ф-ла извлечения корня n-ой степени из к.ч.

$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

$$z_1 = z_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} Re\,z_1 = Re\,z_2 \\ Im\,z_1 = Im\,z_2 \end{cases} \text{ алг. ф}$$

$\Updownarrow$ тр. ф

$\begin{cases} r_1 = r_2 \\ \arg z_1 = \arg z_2 + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

◊ Д-во: $\sqrt[n]{z} = w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$\Updownarrow$

$w^n = z$

$\rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = z$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$ ◊

<u>Пример:</u> Записать в триг. форме числа $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$; $z_2 = -5i$, $z_3 = 3 - 4i$

$$\boxed{z = a + bi = \underbrace{|z|}_{=r} \cdot \Big(\underbrace{\frac{a}{r}}_{\cos\varphi} + \underbrace{\frac{b}{r}}_{\sin\varphi} \cdot i\Big)}$$ ← перевод из одной формы в другую

• $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ $\quad |z| = \sqrt{4 + 4\cdot 3} = \sqrt{16} = 4$

$z_1 = 4\Big(\underset{\cos\varphi}{\overset{}{\frac{1}{2}}} + \underset{\sin\varphi}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot i\Big) = 4\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big) = 4e^{i\pi/3}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{a}{r} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r}\end{aligned}\right\} \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

$\Downarrow$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & * \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a} & ** \end{cases}$$

• $z_2 = -5i$ $\quad |z| = \sqrt{25} = 5$

$z_2 = 5(\cancel{-1} \cdot 0 - i) = 5(\cancel{3} \cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{2})$

$= 5e^{3\pi i/2}$

• $z_3 = 3 - 4i$ $\quad |z| = \sqrt{9 + 16} = 5$

$z_3 = 5\Big(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\Big) = 5\Big(\cos\operatorname{arctg}\big(-\frac{4}{3}\big) + i\sin\operatorname{arctg}\big(-\frac{4}{3}\big)\Big)$

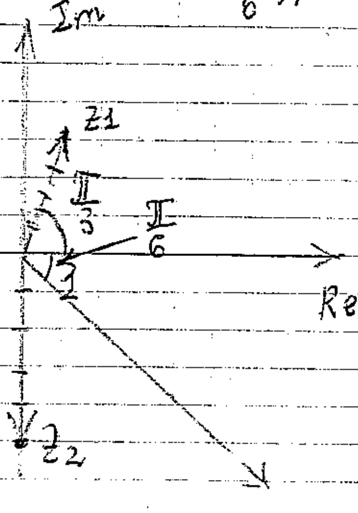
* z в I, IV

** z в II, III

$z_1 \cdot z_2 = (\cancel{2+}\ 4\cdot 5\Big(\cos\big(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\big) + i\sin\big(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\big)\Big) = 20\Big(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\Big)$

$= 20\Big(\cos\big(2\pi - \frac{\pi}{6}\big) + i\cdot\sin\big(2\pi - \frac{\pi}{6}\big)\Big) = 20\cdot\Big(\cos\big(\frac{\pi}{6}\big) - i\sin\frac{\pi}{6}\Big) = 20\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\Big)$

$= 10\sqrt{3} - 10i$



Показательная форма записи к.ч.

Ф-ла Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

~~sin φ = e~~

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha} \quad [1^\infty]$$

Разложение в ряд ф-ци К.П.

$$\boxed{z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\cdot e^{i\varphi}}$$

Показательная форма комп. числа

$r = |z|$

$\varphi = \arg z$

Действия над к.ч в показ. форме

- $z_1 = r_1\cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2\cdot e^{i\varphi_2}$
- $z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
- $z^n = r^n\cdot e^{in\varphi}$
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}} \quad k\in Z$

Пример: $\sqrt[5]{1-i} = {}''$

$* \; z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$'' = \sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)} = \sqrt[10]{2}\, e^{i\left(\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{5}\right)} \quad k\in Z$

$z_0 = \sqrt[10]{2}\cdot e^{\frac{7\pi}{20}i}$

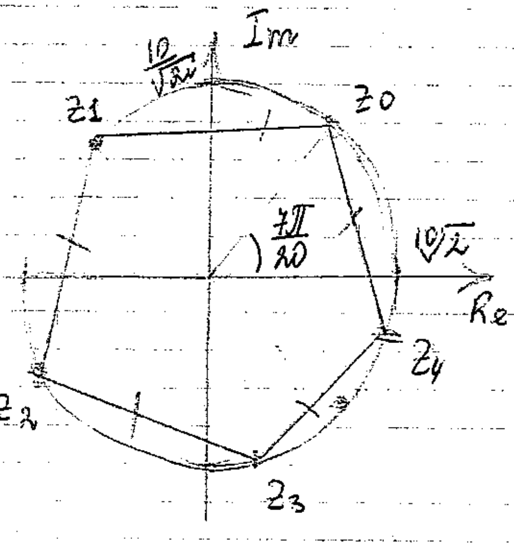
$z_1 = \sqrt[10]{2}\cdot e^{\frac{15\pi}{20}i} = \sqrt[10]{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$z_2 = \sqrt[10]{2}\cdot e^{\frac{23\pi}{20}i}$

$z_3 = \sqrt[10]{2}\cdot e^{\frac{31\pi}{20}i}$

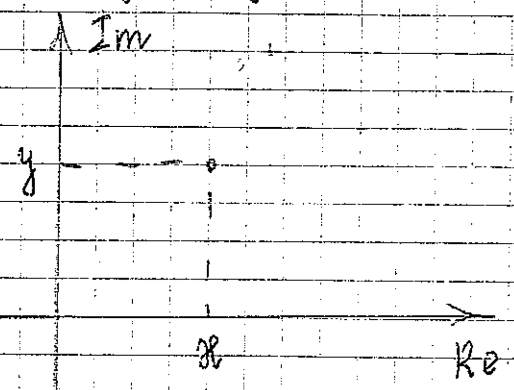
$z_4 = \sqrt[10]{2}\cdot e^{\frac{39\pi}{20}i}$

$z_5 = \sqrt[10]{2}\cdot e^{\frac{47\pi}{20}i} = \sqrt[10]{2}\cdot e^{\frac{7\pi}{20}i} = z_0$



Изображение на камп. плоскости

$\Longleftarrow$ $\mathbb{C} = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \}$ $\Longrightarrow$



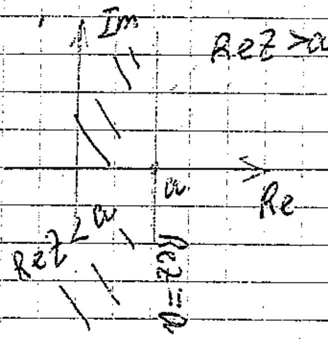
♦ Ур-ние $F(x,y)=0$ задаёт линию на плоскости

♦ Нер-во $F(x,y) \geq 0$ задаёт часть плоскости, ограниченно линией $F(x,y)=0$

ПОЛУПЛОСКОСТИ

① $\operatorname{Re} z \geq a \iff x \geq a$

$z(x,y)$



V ② $\operatorname{Im} z \geq b$ // Аналоги

③ $a \operatorname{Re} z + b \operatorname{Im} z \geq c$

РАССТОЯНИЕ М/Д ТОЧКАМИ

② $|z|$ - расст от $O(0;0)$ до z

$|z-0|$

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ - расстояние между двумя точками

$|z - z_1| = |z - z_2|$

$|z - z_0| = r$ ГМТ (геометрическое мн. точек)

$\rightarrow$ Окр $(z_0; r)$

! Эллипс - геом. место точек, сумма расстояний от кот до двух данных есть величина постоянная

$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$

! Гипербола - ГМТ, разность рас-ний от котор до данных величина постоянная

$|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$

17.09 §3 МНОГОЧЛЕНЫ

1° $f(x) = \boxed{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}$, где x - символ, $a_0 \neq 0$

$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n}$

$a_0 x^n$ - старший член
n при x^n - степень многочлена
a_n - свободный член

$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}}$ - стандартная запись многочлена

2° Деление многочленов с остатком:

Пр: $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 3x$
$g(x) = x^2 - 2x + 1$

$$\begin{array}{l|l}
3x^4 + 2x^2 - 3x & x^2 - 2x + 1 \\
\cline{2-2}
-\ 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 & 3x^2 + 6x + 11 \\
\cline{1-1}
\quad 6x^3 - x^2 - 3x & \\
-\ 6x^3 - 12x^2 + 6x & \\
\cline{1-1}
\quad 11x^2 - 9x & \\
\quad 11x^2 - 22x + 11 & \\
\cline{1-1}
\quad 13x - 11 &
\end{array}$$

неполное частное (q)

остаток (r)

Теорема:
(о дел. с ост.)

Для любой пары многочленов $f(x)$, $g(x)$ над полем k $\exists!$ единст. пара многочленов $q(x)$, $r(x)$, таких что:

$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$

// deg (степень); // $\deg r(x) < \deg g(x)$

3° Корни многочлена:

Теорема Безу и ее следствия;

Опр// число x_0 назыв. корнем мног $f(x)$, если при подстановке этого числа вместо переменной получается 0 $\Leftrightarrow f(x_0) = 0$

Теорема Безу:

Остаток от деления мног. $f(x)$ на линейный двучлен $(x-a)$ равен значению этого многочлена в точке a.

$$f(x) = (x-a)\,q(x) + r$$

$$f(a) = r$$

◊ Д-во: $f(x) = (x-a)\,q(x) + r$

$$\deg r < \deg(x-a) = 1 \Rightarrow r = const$$

$$f(a) = (a-a)\,q(a) + r = 0 + r \ ◊$$

Степень $0 = -\infty$

! Замечание: при умножении мног. старший член всегда равен произведению старших членов сомножителей; степень пр. равна сумме степеней сомножителей

Следствие:

Многочлен $f(x)$ делится на линейный двучлен $(x-a)$ без остатка тогда, и только тогда, когда a является корнем многочлена. $f(x)$ дел. на $(x-a) \Leftrightarrow f(a)=0$

◊ Д-во ($\Rightarrow$): $f(x) = (x-a)\,q(x)$ // $r=0$

$$\Rightarrow f(a) = (a-a)\cdot q(x) = 0$$

($\Leftarrow$) $f(a) = 0$

$$f(x) = (x-a)\,q(x) + f(a) = (x-a)\,q(x) \ ◊$$

✱ $f \mid g \Leftrightarrow f$ делит $g \Leftrightarrow g \vdots f$ — g делится на f ✱

4° ◊ Основная теорема алгебры ◊

(Карл Фридрих Гаусс)

Всякий многочлен, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный

Лемма 1. $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$, $x_0=\alpha+\beta i$ – корень f

$a_i\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $x_1=\alpha-\beta i$ – корень f

сопряж знач тоже корень

Если x_0 кратный корень, то x_1 тоже кратный к. той же кратности

Д-во $\quad f(x_0)=0=\sum_{i=0}^{n} a_i(\alpha+\beta i)^{n-i}$

$$\overline{f(x_0)}=\overline{0}=0=\sum_{i=0}^{n}\overline{a_i}\cdot(\alpha-\beta i)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot(\alpha-\beta i)^{n-i}=f(x_1)$$

Лемма 2.

$(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)=$ имеет $\mathbb{R}$ коэфф

$=(x-\alpha)^2-(\beta i)^2=(x-\alpha)^2+\beta^2$

// Всякий мног. с $\mathbb{R}$-коэф может быть представлен как про-ние множителей I и II степени с $\mathbb{R}$-коэф //

Пример: $x^4+1+2x^2-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+1-x\sqrt{2})\times(x^2+1+x\sqrt{2})$

// $K[x]$ → множество мног. над полем компл. чисел

$\mathbb{R}[x]$ ⟶ с $\mathbb{R}$-коэф

~~Неприводимый –~~

Многочлен наз. неприводимым над данным полем, если его нельзя представить как произв-ние двух непостоянных многочленов с коэф из того же поля

x^2+3x-2 – разложим; приводим

x^2+1 – неприводим

Следствие.

▷ Каждый многочлен над полем комп. чисел раскладывается на линейные множители; кол-во множ. равно степени многочлена

▷ Это разложение единственно с точностью до перестановки сомножителей $f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$

$$\deg f(x) = n, \ (x-a)$$

◇ Д-во: $f(x)$, $\deg f(x) = n \geq 1 \Rightarrow \exists x_1 : f(x_1) = 0$

$$f(x) = (x - x_1)\cdot f_1(x)$$

а) Если $f_1 = const \Rightarrow f_1 = a_0$

б) Если $\deg f_1 \geq 1 \Rightarrow f_1 = (x - x_2) f_2$ ◇

Опр. Кратностью корня многочлена $f(a) = 0$ называется кол-во множителей вида $(x-a)$ в разложении f на линейные множители

$$f(x) = (x-a)^k \cdot g(x)$$
$$g(a) \neq 0$$

? а является корнем кратности k многочлена $f(x)$, только тогда, когда он является корнем для f и его первых $(k-1)'$ — кол-во одинаковых множ. пример

корень кратности 1 = простой корень

$(x+1)^2 = 0$
$x = -1$
корень кратности 2

$$\boxed{f(x) = a_0 \cdot \prod_{i=1}^{s} (x - x_i)^{k_i} \qquad \sum k_i = n}$$

Теорема:

Каждый многочлен с коэфф $\in \mathbb{R}$ может быть разложен в произведение множителей первой и второй степени с $\mathbb{R}$-коэфф.

Если все множ. II степени не имеют $\mathbb{R}$-корней, это представление един. с точностью до порядка сомножителей и старших коэффициентов

$\frac{T(x)}{} + \frac{R(x)}{V(x)}$

мн-н   прав. дробь

// Теорема:

Всякая /прав. дробь //

Дробь называется **простейшей**, если её знаменатель явл степенью неприводимого многочлена, а числитель имеет степень меньше неприводимого

Над C   Над R

$\frac{A}{(x-a)^k}$ $\frac{A}{(x-a)^k}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)}$, $p^2-4q<0$

Теорема:

Всякая прав. рац. дробь может быть представлена как сумма простейших дробей и это представление единственно с точностью до порядка слагаемых.

* Поле алг. чисел замкнуто

Алгоритм разложения прав. дроби в сумму простейших $\frac{P(x)}{Q(x)}$

① Представить $Q(x)$ в виде произ-ния неприводимых мног.

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{k} (x-a_i)^{t_i} \times$$

$$\prod_{j=1}^{S} (x^2 + p_j x + q_j)^{r_j}$$

② Для каждого множ. в этом разлож. выписываем все простейшие дроби с данным знам. и его делителем

$$(x-a_1)^{t_1} \to \frac{A_1}{(x-a_1)^{t_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{t_1-1}} + \dots + \frac{A_{t_1}}{(x-a_1)}$$

$$(x^2+p_1x+q_1)^{r_1} \to \frac{B_1x+C_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1-1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{B_{r_1}x + C_{r_1}}{\dots}$$

24.09 5°// **Схема Горнера**

$f(x),\ a$

$f(x) = (x-a) f_1(x) + f(a)$

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$

$f_1(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$

$n:\ a_0 = b_0$	$b_0 = a_0$
$n-1:\ a_1 = b_1 - ab_0$	$b_1 = a_1 + ab_0$
$n-2:\ a_2 = b_2 - ab_1$	$b_2 = a_2 + ab_1$
$\ldots$	$\ldots$
$1:\ a_{n-1} = b_{n-1} - ab_{n-2}$	$b_{n-1} = a_{n-1} + ab_{n-2}$
$0:\ a_n = f(a) - ab_{n-1}$	$f(a) = a_n + ab_{n-1}$

$f(x) = x^4 + 3x^2 - x + 1 \qquad a = 2$

$a=2$	1	0	3	-1	1
	1	2	7	13	27
	1	4	15	43	
	1	6	27		
	1	8			

$f(x) = (x-2)^4 + 8(x-2)^3 + 27(x-2)^2 + 43(x-2) + 27$

разложение $f(x)$ по степеням $(x-2)$

6°// **Простые дроби**

Над $\mathbb{C}$ неприв. $(x-a)$

Над $\mathbb{R}$ неприв. $(x-a)$ и x^2+px+q при $p^2-4q<0$

Рац. дробь это отношение двух многочленов

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная $\Leftrightarrow \deg P < \deg Q$

$\frac{U(x)}{V(x)} = \frac{V(x)\cdot t(x) + R(x)}{V(x)} = \qquad \deg R < \deg V$

③ Все выписан. дроби складываем и приравниваем к исходной дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)^{t_1}} + \ldots + \frac{B_s x + C_s}{(x^2+p_s x+q_s)}$$

④ Приравниваем коэф-ты при одинаковых степенях в числителе, получаем систему линейных уравнений;

получаемая система имеет единст. решение; найдя это решение и подставив его в сумму простейших дробей, получаем решение задачи.

Примеры:

1) $$\frac{x^2+x+1}{(2x^2+1)x} = \frac{Bx+C}{2x^2+1} + \frac{A}{x} = \frac{Bx^2+Cx+2Ax^2+A}{(2x^2+1)x}$$

$0: \quad 1 = A$

$1: \quad x1 = Cx$

$2: \quad 1 = B + 2A$

$B = 1 - 2A = 1 - 2 = -1$

$$\frac{x^2+x+1}{(2x^2+1)x} = \frac{-x+1}{2x^2+1} + \frac{1}{x}$$

2) $$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} = \frac{A(x+2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

$x = 1 \Rightarrow 6 = -6A$ | $A = -1$

$x = -2 \Rightarrow 3 = 15B$ | $B = \frac{1}{5}$

$x = 3 \Rightarrow 18 = 10C$ | $C = \frac{9}{5}$

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+2)(x-3)} = -\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{5(x+2)} + \frac{9}{5(x-3)}$$

Если в разложении знаменателя только линейный двучлен I степени, можно решать этим методом

Глава 2

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1. Действия над матрицами

$\underline{1^\circ}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x^2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы пересечение

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (m — число строчек, n — столбцов)

• квадратные / прямоугольные

$M_n(\mathbb{R}) = M_{m \times m}$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$diag(a_1, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_k \end{pmatrix}$$

указатели стоят на главной диагонали, а остальные 0 (квадратная по умолчанию)

$A = (a_{ij})$

$\underline{2^\circ}$ Сложение матриц и умножение на скаляр.

Замечание: обе опер. наз. линейные операц над матрицами

2.1. Сложение: складывают матрицы только одного размера

$A, B \in M_{m \times n}(K)$

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

$A + B = C \in M_{m \times n}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Пример $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

§2 Элементарные преобразования. Приведение матрицы к ступенчатому виду с помощью элем. преоб.

Алгоритм Гаусса

Линейная зависимость и линейная независимость

1° Линейная комбинация

$a_1, \dots a_k;$
$\alpha_1, \dots \alpha_k$

$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$

Определение:

Набор объектов $a_1, \dots a_k$ называ-ется линейнозависимым тогда и только тогда, когда существует набор скаляров, не все из которых равны 0, такой что линейная комб. $= 0$

$a_1, \dots a_k$ - лин зав $\Leftrightarrow \exists\ \alpha_1, \dots \alpha_k$-скаляры
$(\exists \alpha_i \neq 0)$

$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$

Опред: $a_1, \dots a_k$ - линейно независим $\Leftrightarrow \forall\ \alpha_1, \dots \alpha_k$, если
$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$

2° Св-ва 1) Если набор содер. 0-элемент, то набор линейнозависим
$\exists i : a_i = 0 \Rightarrow$ лин. зависим

2) Если к линейнозависимому набору добавить один или несколько объектов, св-ва линей. зав. сохраняется

$a_1, \dots a_k$ - лин зав $\Rightarrow a_1, \dots a_k, b_1, \dots b_\ell$ - зав.

3) Набор линейнозав тогда и только тогда, когда один из его элементов явл. линейной комбинацией оставшихся

$a_1, \dots a_k$ - лин. зав. $\Leftrightarrow \exists i : a_i = \sum_{s \neq i} \alpha_s a_s$

4) $a_1, \dots a_k$ - лин независимы $\Rightarrow$ то удаляя элементы сохраняется св независим.

$M_n(K)$ Множество квадратных матриц образует кольцо

3° Элем. операции над матрицами

2.2 Умножение на скаляр

$A = (a_{ij}), \quad c \in K$

$cA = (c\,a_{ij})$

Пример.

$$-3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & -6\\ 0 & -3\\ 3 & -12\end{pmatrix}$$

3° Умножение матриц.

Определение. $A \in M_{m\times k}$; $B \in M_{k\times n} \Rightarrow A\cdot B = C(i,j)$

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}\cdot b_{lj}$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$AB = C \begin{pmatrix}-3 & 3 & 7\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$c_{11} = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 3\cdot(-1) = -3$

$c_{12} = 0 + 0 + 3 = 3$

$c_{13} = 2\cdot 1 - 1\cdot 1 + 3\cdot 2 = 2 - 1 + 6 = 7$

$AB \neq BA$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix} \overset{?}{=}$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 6\\ 9 & 8\end{pmatrix}$$

Свойства опер. над матрицами

+ 1) $A + (B + C) = (A + B) + C$

2) $A + B = B + A$

α $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

$\times$ 1) $A(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$

2) $A(B + C) = AB + AC$

4° Алгоритм Гаусса

▶ Ведущим элем. строки матрицы называют первый слева ненулевой элемент этой строки.

▶ Матрица наз. ступенчатой (станд), если вторые индексы ведущих элементов строк от первой до последней образуют строго возрастающую послед.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема: Любая матрица конечного раз. может быть приведена к ступенч. виду за конечное число элем. преобразований.

Д-во:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

① Выбираем в строке ведущий элемент $\forall$ строки
② Выб. строку, в которой элем. имеет мин. второй индекс
③ Ставим эту строку на первое место $a_{11} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \xrightarrow{M_{21}\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

④ Умножаем первую строку на соотв. коэ-ты и вычитаем ее из остальных строк, чтобы не осталось 0 элементов

Пример:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2,\ -1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3,\ -1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{42}(-1) \cdot M_{32}(3) \cdot M_{41}(-1) \cdot M_{31}(-2)\, A$$

Лемма 2 (ненулевые) Строки ступ. матрицы линейно независимы

1) Перестановка местами строк матрицы
2) Умножение строки на скаляр
3) Прибавление к одной строке другой строки

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \Leftrightarrow 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогичные операции можно выполнять над столбцами

$$P_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} i \\ j \end{array} \\ \quad i \;\; j \end{array}$$

$$M_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \alpha & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} i$$

$$M_{ij}(\alpha) = i \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\quad j$

Лемма: Умножение произв. матрицы на P_{ij} слева равносильно перестановке строк i и j

Умн. $M_i(\alpha)M$ - умножение i строки на α

Умн. $M_{ij}(\alpha)M$ - прибавление к i-ой строке $j \cdot \alpha$ строки.

$M P_{ij}$ - перестановка i и j-го столбцов

$M \cdot M_i(\alpha)$ - умножаем i столбец на α

$M \cdot M_{ij}(\alpha)$ - прибавление к j-столбцу i-го, умн. на α

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & \dots & m_{2n} \\ m_{k1} & \dots & m_{kn} \end{pmatrix} \cdot i \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ & \alpha & & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{1j} + m_{1i} \cdot \alpha & \\ m_{21} & \vdots & m_{2j} + m_{2i} \cdot \alpha & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ m_{k1} & m_{k2} & \vdots & \end{pmatrix}$$

$j \qquad\qquad j$

$(A|E) \xrightarrow{эл.пр.} (E|B)$

Теорема. $A \in M_n(\mathbb{R})$

$(A|E)$ - расширенная

1) Если в результате применение к расш матрицы эл преоб над строчками (алгор. Гаусса) получается треугол матрица с ненулевой диагональю

$$(A|E) \to (T|B),\quad T = \begin{pmatrix} t_{11} & & * \\ 0 & t_{22} & \\ 0 & 0 & t_{nn} \end{pmatrix} \qquad t_{ii} \neq 0\ \forall i \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$(T|B) \to (E|A^{-1})$$

тогда матрица A обратима и она получается в правой половине расшир матрицы, если преобраз над строчками получить единичную матрицу

2) Если в результате применения прямого хода метода Гаусса пол к мат A получается ~~ну~~ матр с нулевой строкой, то матрица A - необратима

$$A \to \begin{pmatrix} \dots \\ 0\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \text{ не сущ.}$$

Д-во

$$(A|E) \to (T|B) \to \left(\begin{matrix} 1 & & * \\ 0 & 1 & \\ \vdots & 0 & \\ 0 & \dots & 1 \end{matrix} \middle| C\right) \to \left(\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{matrix} \middle| D\right) \to (E|U) =$$

$$= M_k \dots M_2 M_1 (A|E) = (\underbrace{MA}_{E} | \underbrace{ME}_{M}) \Rightarrow M = U = A^{-1}$$

② Если эл. преобр. над строк. нельзя получить треуг. матрицу с ненулевой диагональю, значит метод Гаусса приводит к матрице с нулевой строкой; T

$$(A|E) \to \left(\begin{matrix} t_{11} & \\ 0\,0\,0\,0 \end{matrix} \middle| B\right)$$

$$= (T|B) = M_k \dots M_2 \cdot M_1 (A|E)$$

$$\boxed{T = M_k \cdot \dots M_1 \cdot A}$$

• Матрица T необратима!

$$T^{-1} ?\quad T \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} * \\ 0\,0\,0 \end{pmatrix}$$

Замечание.

все матр. эл преоб обратимы

$M_i(\alpha),\ P_{ij},\ M_{ij}(\alpha)$

$$(M_i(\alpha))^{-1} = M_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

$$(M_{ij}(\alpha))^{-1} = M_{ij}(-\alpha)$$

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \\ \alpha_s \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1k_1} & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{2k_2} & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{sk_s} \\ & & & \dots & & \end{pmatrix}$$

$$0 \quad 0 \quad \boxed{0} \quad 0 \quad \dots \quad 0$$

$$\alpha_1 \cdot a_1 k_1 + \alpha_2 0 + \dots \alpha_3 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 \cdot a_2 k_2 + \alpha_3 0 + \dots \alpha_s = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_s = 0$$

<u>Лемма</u>

// Ранг - рангом матрицы (строчным рангом) называется кол-во элем. в макс. линейнонезависимом наборе её строк //

Аналогично со столбцовым рангом.

Элем. преобразования не меняют ранг матрицы.

5°// <u>Обратная матрица, её вычисление с помощью элем преобразований</u>

a^{-1}:

$(a^{-1})\, a = 1$

<u>Определение</u>:

A^{-1} наз-тся обратной для A, если: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ (един. матрица)

Св-ва: $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$; $(B^{-1}(A^{-1} \cdot A) \cdot B) = E$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) = B$$

Пример

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+0 & 0+b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c+0 & 0+d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c+0 & 0+d \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = \frac{a}{c}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \frac{a}{d}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{b}{c}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \frac{b}{d}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{a}{d}\ \underline{ad - bc}$$

$$\left|\mathbb{I}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right| = \alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha = 0$$

Замечание:

Если ф-ция элем. матрицы обладает св-ми ①/③, эта ф-ция равна определителю матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$?

○ Правило Δ-ка

$-$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$+$ $-$ $+$

Правило Саррюса!

2° Простейшие св-ва опр.

① ~~Если опр. содержит строку~~

▷ Если матрица имеет нулевую строку => её опр. = 0

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{22} & a_{2n} \\ 0 \ldots & 0 \\ a_{n1} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad |A| = \alpha|A| \quad \forall \alpha \Rightarrow |A| = 0$$

$$\alpha \cdot |A| = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots & a_{1n} \\ \alpha\cdot 0 \ldots & \alpha\cdot 0 \\ a_{n1} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

▶ Матрица T необ => матрица A необ.

Замечание: Каждая обр матрица может быть представлена как произ-ние матриц элемент. преоб

Пример 3

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{M_{21}(-\frac{3}{2})} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{M_1(\frac{1}{2})M_2(-\frac{2}{5})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & -2/5 \end{array}\right) \xrightarrow{M_{12}(-3/2)}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{9}{10} = \frac{5-9}{10} = \frac{4}{10}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 3/5 & -2/5 \end{array}\right)$$

$$M_{12}(-3/2) M_1(1/2) M_2(-2/5) M_{21}(-3/2) E = A^{-1}$$

§3 Определитель матрицы

1° Опред. определ. матрицы.

Определителем квадр. матрицы назыв-ют функцию, которая полилинейным и антисимметр. (~~образом~~ способом) зависит от строк матриц и нормированным условием, что определитель един. матрицы равен 1

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\det(A) = |A|$$

▷ ① $\det E = 1$

② Если мы поменяем строки то опр. будет отличаться знаком

$$A \xrightarrow[\substack{i \text{ и } j \\ \text{строк}}]{\text{перест}} B \qquad |A| = -|B|$$

③ а) $A \xrightarrow[\substack{\text{умнож.} \\ i \text{ строки над}}]{} B \qquad |B| = |A| \cdot \lambda$

б) Если мы представим строчку как сумму двух строк, и составим две новые матрицы, где другие стр одинаковые, а в пер. ч - один из слагаемых, а во втор - второй

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i-1\,1} & & a_{i-1\,n} \\ b_{i1} + c_{i1} & & b_{in} + c_{in} \\ \dots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} i \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ b_{i1} \dots b_{in} \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = |B| + |C|$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ c_{i1} \dots c_{in} \end{pmatrix}$$

~~16~~ 15. 10. 2018 Транспозиция и инверсии

Свойство 1

Любая транспозиция меняет чётность перестановки.

чётная пер - чётное число инверсий

Свойство 2

Тривиальная - ~~три (основное упорядочение)~~ перестановка с естественным порядком

От ~~чётной~~ трив. к перестановке можно перейти к нечётной за чётное число перестанов.

$$I_{j_1, j_2 \ldots j_n} \quad \begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad j_1 \; j_2 \\ \begin{pmatrix} 0 0 \ldots \cancel{1} \, 0 \ldots 0 \\ 0 0 \ldots 0 \, 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Лемма 1

а) Если среди индексов $j_1 \ldots j_n$ есть одинаковые, то определитель матрицы равен нулю $\det(I_{j_1, \ldots j_n}) = 0$

б) Если все индексы разные, то они образуют перестановку, $j_1, j_2 \ldots j_n$ - перестановка

Если П чётная, то опред. матр $= 1$ ~~de~~ $\det(I_{j_1, \ldots j_n}) = 1$

Если П нечётная, то О.М $= -1$

$$(-1)^{\delta} = \begin{cases} 1 & \text{чётная сигма } \delta \\ -1 & \text{сигма нечётная} \end{cases}$$

$$\deg^t I_{i_n, j_n} = (-1)^{(j_1 - j_n)}$$

Док-во

а) Предположим $j_1 = j_k$

$$\begin{pmatrix} 000\ldots & 1 & 0\ldots0 \\ 000\ldots & 1 & 000 \end{pmatrix} \begin{array}{c} j_1 \\ k \end{array}$$

б) Если совпадений нет, то $j_1, j_2, \ldots j_n$ - перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

② Если матрица имеет две один. строки, то её опред равен 0

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

③ Если матр имеет две пропорциональные строчки, то её опред равен 0

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha b_1 & \dots & \alpha b_n \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ b_1 & \dots & b_n \\ b_1 & \dots & b_n \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \cdot 0 = 0$$

④ Если мы к одной строке матрицы прибавим строку умнож на α, то опред. новой матрицы равен опр. исходной

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \\ a_{j1}+\alpha a_{i1} & \dots & \alpha a_{in}+a_{jn} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \alpha a_{i1} & \dots & \alpha a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + 0$$

$= |A|$

▷ Эл. преоб. над строчками матриц либо не меняют её опр, либо меняют контролированным образом.

3°) Опр. опр. с помощью перестановок

$(1, \dots, n) = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \dots\ \sigma(n))$ $\quad n!$

- инверсия
- транспозиция

$\frac{n(n-1)}{2}$ пар

не инверсия

$(8, 3, 1, 4, 2, 5, 7, 6)$

инверсия, если больший стоит от меньшего

$(1\ 3\ 4\ 6\ 5\ 2)$

$(1\ 5\ 4\ 6\ 3\ 2)$ транспозиция

§4 Определитель транспонированной матрицы

$A' = A^t$ Т.М для матр. A назыв. матрица, строки которой совпадают со столбцами мат. A, расположенными в естеств. порядке

$A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$
$A^t = (a_{ji}) \in M_{n\times m}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Теорема:</u>

Опр. исходной мат = опр транспонированной

$$\det A = \det A^t$$

$B = A^t = (b_{ij})$ $\quad b_{ij} = a_{ji}$

$$|B| = \sum_{\delta} (-1)^{\delta} b_{1\delta(1)} \cdot b_{2\delta(2)} \cdot b_{3\delta(3)} \dots b_{n\delta(n)} =$$

$$= \sum_{\delta} (-1)^{\delta} a_{\delta(1)1} \cdot a_{\delta(2)2} \cdot \dots a_{\delta(n)n} = \sum_{\delta} (-1)^{\delta} \cdot a_{1\delta(1)} \dots a_{n\delta(n)}$$

$\delta(1)\ 1 \Rightarrow \delta(1)\ 1$

! Все св-ва опр, сформулированные для строчек справедливы и для столбцов.

Теорема:

Определитель кв. мат вычисляется по алгоритму:

1. Составляются все возможные произв из n-сомнож. В эти произв входит один элемент из каждой строки и один э. из каждого столбца;

2. Каждому произв приписывается знак по след. правилу:

• первые индексы расп. в естеств. порядке $1, 2 \dots n$; вторые образуют перестановку:

• если она чётная то произв сохраняет знак, иначе меняется знак

3 Опр = сумма всех полученных произв с учётом знаков

Теорема: $\det A = \sum\limits_{\delta} (-1)^{\delta} a_{1\delta(1)} a_{2\delta(2)} \dots a_{n\delta(n)}$

Д-во:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & & a_{2n} \\ \dots & & & \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{2n} \\ \dots & & & & \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & & a_{2n} \end{pmatrix} =$$

$= n^n$ слагаемых

Вынесем ненулевой эл $\rightarrow$ произвед мат с опред

$$\det (A_{j_1 \dots j_n}) = \det \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & a_{2j_2} & 0 & \dots \end{pmatrix} = a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \dots a_{nj_n} (-1)^{\delta};$$

$$\delta \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0\ a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 \dots & a_{ij} & \dots 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cancel{(-)}\,(-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 \dots 0 & a_{ij} & 0 \dots 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{i-1\,1} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \dots & a_{i+1\,n} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1+j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 \dots 0 \\ a_{1j} & \\ 0 & * \\ \vdots & \end{vmatrix}$$

* Здесь получается матрица порядка $n-1$, получен из A вычёркивание соотв. строки и столбца

$$* = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} \\ & & \end{pmatrix}$$

Матрица * получ из матрицы A вычёркив. i строки и j столбца ◊

5°. Теорема: Вычисление определителя с помощью понижения порядка матрицы

Опр: Минором элемента кв. матрицы называется опред. m, полученной из данной в результате вычёркивания строки и столбца, содержащий данный элем

M_{ij} $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

! Минор не зависит от элемента, по которому он образован

Опр: Алгебраическое дополнение это ~~минор~~

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Теорема: Определитель $A = (a_{ij})$ может быть определен (вычисл):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Д-во: Рассмотрим част. случай.

a) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots \end{pmatrix}$

$$|A| = \sum_{\delta} (-1)^{\delta} a_{11} a_{2\delta(2)} \dots a_{n\delta(n)} = a_{11} |A_1|$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим общий случай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & 0 \dots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{i2} \dots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$